

## 4

# O SISTEMA CONTÍNUO ROTOR-MANCAL

### 4.1

#### Introdução

Na seção 3.5 as equações de movimento foram determinadas considerando-se parâmetros concentrados. Entretanto, rotores reais são mais complexos, constituídos de vários discos e a seção do eixo não é constante, fazendo-se necessária uma análise com auxílio de um modelo com parâmetros distribuídos no qual a massa, a rigidez e o amortecimento são distribuídos. Este modelo é, também, chamado de rotor contínuo. A análise de um rotor contínuo é baseada na teoria da vibração transversal da viga. A teoria mais fundamental é a teoria da viga Bernoulli-Euler, que assume que a seção permanece plana e perpendicular à linha de centro. Se o eixo for delgado, essas equações representam bem o movimento do rotor. Quando a viga vibra segundo modos mais altos, o efeito da inércia de rotação da seção transversal e das deformações de cisalhamento aparecem, não mais podendo ser desprezadas. Este modelo é conhecido como viga de Timoshenko, o qual não será considerado neste estudo. Este modelo acrescenta outras equações específicas da rotação da seção transversal.

Quando o diâmetro do disco é muito maior em relação à sua largura, aparece a ação giroscópica, que será considerada neste estudo.

Existem diversos métodos aproximados para análise de rotores contínuos. Será empregado aqui o Método dos Elementos Finitos.

### 4.2

#### Equações de Movimento

A figura 4.1 ilustra o modelo de um rotor contínuo elástico cujo centro coincide com o eixo  $Z$ . As deflexões nas direções  $X$  e  $Y$  são denotadas por

$x(z, t)$  e  $y(z, t)$ , respectivamente. A inclinação em torno das direções  $X$  e  $Y$  são representadas por  $\alpha(z, t)$  e  $\beta(z, t)$ , respectivamente, e são dadas por

$$\alpha = -\frac{\partial y}{\partial z} ; \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial z} \tag{4-1}$$

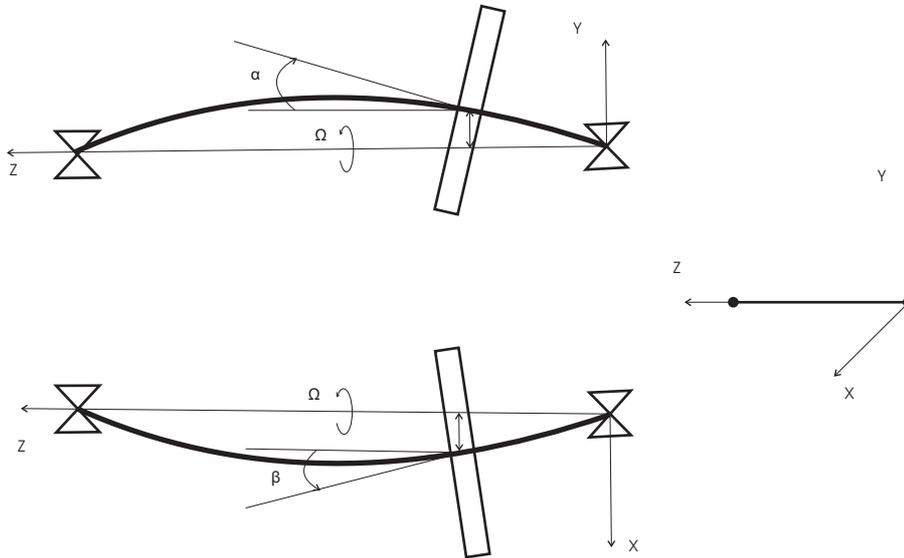


Figura 4.1: Oscilação do rotor com 4 graus de liberdade

Para se chegar às equações de movimento, consideramos um elemento infinitesimal do eixo de espessura  $dz$ , mostrado na figura 4.2 nas duas direções.

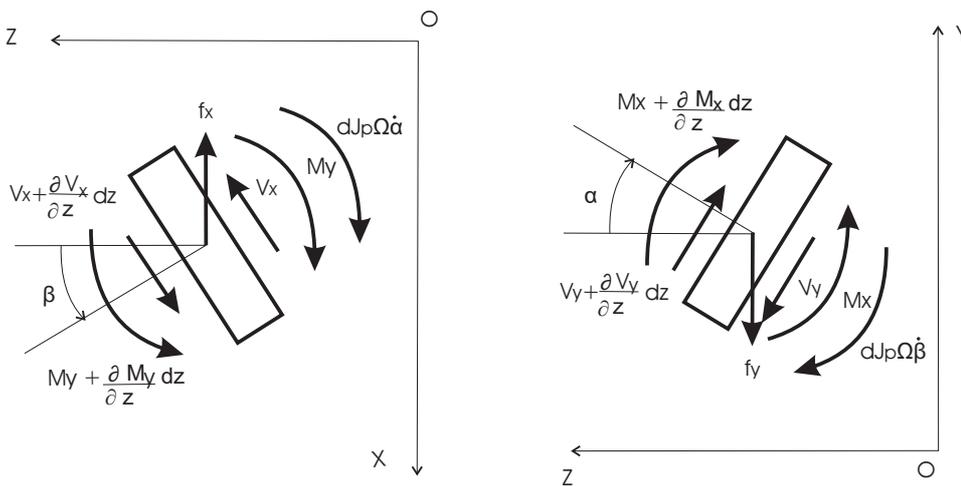


Figura 4.2: Condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal

A condição de equilíbrio dinâmico nas direções  $X$  e  $Y$  nos dá

$$\begin{aligned} -V_x + \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) - \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dz - c \frac{\partial x}{\partial t} dz - f_x &= 0 \\ -V_y + \left( V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz \right) - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dz - c \frac{\partial y}{\partial t} dz - f_y &= 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

onde,

$V_x$  e  $V_y$  - esforço cortante nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$f_x$  e  $f_y$  - forças externas nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$A$  - área da seção transversal do eixo

$\rho$  - densidade do material

$\bar{c}$  - coeficiente de amortecimento por unidade de comprimento

Simplificando, temos

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial x}{\partial t} + f_x ; \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial y}{\partial t} + f_y \quad (4-3)$$

Da condição de equilíbrio do momento, obtém-se, desprezando as forças oriundas da aceleração angular

$$\begin{aligned} -M_y + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} dz \right) + V_x dz - dJ_p \Omega \dot{\alpha} &= 0 \\ M_x - \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} dz \right) - V_y dz + dJ_p \Omega \dot{\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

onde  $dJ_p \Omega \dot{\alpha}$  e  $dJ_p \Omega \dot{\beta}$  são os momentos giroscópicos

Lembrando que

$$\begin{aligned} M_x &= EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} ; & M_y &= EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ \dot{\alpha} &= - \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} ; & \dot{\beta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} \end{aligned} \quad (4-5)$$

onde

$I$  - momento de inércia de área.

$dJ_p = \rho A dz R^2 / 4$  é o momento de inércia polar de massa do elemento

Substituindo 4-5 em 4-4, obtém-se

$$V_x = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} - \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} = 0 \quad (4-6)$$

$$V_y = -\frac{\partial^3 x}{\partial z^3} + \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} = 0$$

onde  $\bar{J}_p = \rho A R^2 / 4$  é o momento de inércia por unidade de comprimento

Substituindo 4-6 em 4-3, obtém-se

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} + \bar{c} \frac{\partial x}{\partial t} - f_x = 0 \quad (4-7)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \bar{J}_p \Omega \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} + \bar{c} \frac{\partial y}{\partial t} - f_y = 0$$

Considerando somente a direção  $X$ , uma vez que o procedimento para a solução em  $Y$  é o mesmo, multiplicaremos 4-7 pela função do modo  $\phi_j$  e integraremos de 0 a  $l$ . Tal função é uma aproximação da autofunção exata que, na maioria dos casos não é possível ser determinada analiticamente pelo método da separação das variáveis. Essas funções são conhecidas, também, como funções teste e são escolhidas de forma que, pelo menos, satisfaçam às condições de contorno geométricas e sejam diferenciáveis duas vezes. Assim,

$$\begin{aligned} EI \int_0^l \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \phi_j dz + \rho A \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \phi_j dz + \bar{J}_p \Omega \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} \phi_j dz + \bar{c} \int_0^l \frac{\partial x}{\partial t} \phi_j dz \\ = \int_0^l f \phi_j dz \end{aligned} \quad (4-8)$$

Integrando por partes ( $\int u dv = uv - \int v du$ ) o primeiro termo de 4-8, temos

$$\int_0^l \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \phi_j dz = \phi_j \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \phi_j' dz$$

Integrando por partes novamente,

$$\int_0^l \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \phi_j' dz = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' dz$$

A equação 4-8 fica, então

$$EI \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j'' + \boxed{EI \phi_j \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_0^l} - \boxed{EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \phi_j' \Big|_0^l} + \rho A \int_0^l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \phi_j dz$$

$$+ \bar{J}_p \Omega \int_0^l \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t} \phi_j dz + c \int_0^l \frac{\partial x}{\partial t} \phi_j dz = \int_0^l f \phi_j dz \quad (4-9)$$

As condições de contorno são incorporadas na equação através dos termos em destaque.

Para gerar um modelo de equações diferenciais aproximadas com  $N$  graus de liberdade por direção, os deslocamentos do sistema contínuo serão expandidos como uma combinação linear de  $N$  funções de modo  $\phi$  linearmente independentes. Assim, tem-se

$$x(z, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(z); \quad y(z, t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \phi_i(z) \quad (4-10)$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são as coordenadas generalizadas dependentes do tempo, a serem determinados.

O que está se dizendo aqui é que cada modo contribuirá para a resposta global e o tamanho desta contribuição será controlado por cada  $a_i$  e  $b_i$ .

Substituindo 4-10 em 4-9, obtém-se, nas direções  $X$  e  $Y$ ,

$$\ddot{\mathbf{a}}_i(t) \rho A \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{a}}_i(t) \bar{c} \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{b}}_i(t) \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j dz$$

$$+ \mathbf{a}_i(t) EA \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j''(z) dz = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz$$

$$\ddot{\mathbf{b}}_i(t) \rho A \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz + \dot{\mathbf{b}}_i(t) \bar{c} \int_0^l \phi_i(z) \phi_j(z) dz - \dot{\mathbf{a}}_i(t) \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j dz$$

$$+ \mathbf{b}_i(t) EA \int_0^l \phi_i''(z) \phi_j''(z) dz = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz \quad (4-11)$$

ou

$$[M_x]_{ij} \ddot{\mathbf{a}}_i(t) + [C_x]_{ij} \dot{\mathbf{a}}_i(t) + [G_x]_{ij} \dot{\mathbf{b}}_i(t) + [K_x]_{ij} \mathbf{a}_i(t) = F_x(\phi_j) \quad (4-12)$$

$$[M_y]_{ij} \ddot{\mathbf{b}}_i(t) + [C_y]_{ij} \dot{\mathbf{b}}_i(t) - [G_y]_{ij} \dot{\mathbf{a}}_i(t) + [K_y]_{ij} \mathbf{b}_i(t) = F_y(\phi_j)$$

onde

$$\begin{aligned}
 [M_x]_{ij} &= \rho A \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz, & [M_y]_{ij} &= \rho A \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz \\
 [K_x]_{ij} &= EA \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i''(z) dz, & [K_y]_{ij} &= EA \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i''(z) dz \\
 [C_x]_{ij} &= \bar{c} \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz, & [C_y]_{ij} &= \bar{c} \int_0^l \phi_j(z) \phi_i(z) dz \\
 [G_x]_{ij} &= \bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i(z) dz, & [G_y]_{ij} &= -\bar{J}_p \Omega \int_0^l \phi_j''(z) \phi_i(z) dz
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

e

$$[F_x]_{j1} = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz, \quad [F_y]_{j1} = \int_0^l f(z, t) \phi_j(z) dz \tag{4-14}$$

Os dois conjuntos de equações matriciais 4-12 podem ser agrupados numa única equação matricial, como segue.

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + (C + G)\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t)$$

onde

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{bmatrix}; & C &= \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \\
 G &= \begin{bmatrix} 0 & G_x \\ -G_y & 0 \end{bmatrix}; & K &= \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \\
 Q &= \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}; & q(t) &= \begin{bmatrix} a_i(t) \\ b_i(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

sendo  $M$ ,  $C$ ,  $G$  e  $K$  de dimensão  $2N$  e  $Q$  e  $q(t)$ ,  $2N \times 1$ .

### 4.3

#### O Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é uma poderosa técnica que usa métodos variacionais e de interpolação para modelar e resolver problemas de condições de contorno em sistemas contínuos.

O método consiste da discretização da estrutura, ou seja, divisão em pequenos subdomínios, chamados elementos finitos. Cada elemento possui extremidades chamadas nós, que conectam-se ao elemento seguinte. O elemento pode conter nós em seu interior, a depender da função de aproximação escolhida. A equação de movimento para cada elemento é então determinada e resolvida. As soluções das equações dos elementos são aproximação por uma combinação linear de polinômios de baixa ordem. Cada uma das soluções polinomiais individuais são compatibilizadas com a solução adjacente, chamada condição de continuidade, nos nós comuns a dois elementos. Estas soluções são, então, reunidas através de um procedimento, resultando em matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, que descrevem a estrutura como um todo. O vetor de deslocamentos associados com a solução global do modelo de elementos finitos descreve o movimento.

As coordenadas usadas no modelo de elementos finitos, ilustrado na figura 4.3 são as duas coordenadas lineares  $x_1(t)$  e  $x_3(t)$  e duas coordenadas angulares  $x_2(t) = \beta_1$  e  $x_4(t) = \beta_2$ , necessárias para descrever o movimento de cada nó, ou seja, cada nó possui dois graus de liberdade. O deslocamento estático transversal deve satisfazer

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EI \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4-16)$$

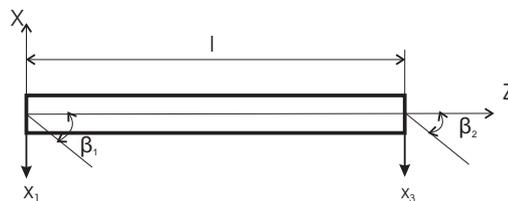


Figura 4.3: Elemento finito simples em flexão

Para valores constantes de  $EI$ , 4-16 torna-se  $\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = 0$ , que, integrando, leva a

$$x(z, t) = c_1(t)z^3 + c_2(t)z^2 + c_3(t)z + c_4(t) \quad (4-17)$$

onde  $c_i(t)$  são as constantes de integração. A equação 4-17 é usada para interpolar os deslocamentos dentro do elemento.

Os deslocamentos desconhecidos  $x_i(t)$  devem satisfazer às condições de contorno

$$\begin{aligned} x(0, t) &= x_1(t) & x'(0, t) &= x_3(t) \\ x(l, t) &= x_1(t) & x'(l, t) &= x_4(t) \end{aligned} \quad (4-18)$$

Estas relações são substituídas em 4-17 e resolvidas para as constantes de integração  $c_i$ , levando a

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{l^3}[2(x_1 - x_3) + l(x_2 + x_4)] \\ c_2(t) &= \frac{1}{l^2}[2(x_3 - x_1) - l(2x_2 + x_4)] \\ c_3(t) &= x_2(t) \quad c_4(t) = x_1(t) \end{aligned} \quad (4-19)$$

Substituindo 4-19 em 4-17, e rearranjando os termos como coeficientes de deslocamentos nodais desconhecidos, leva ao resultado aproximado do deslocamento  $x(z, t)$  para o elemento, expresso por

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \left(1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}\right) x_1(t) + l \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) z_2(t) \\ &+ \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}\right) z_3(t) + l \left(-\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) z_4(t) \end{aligned} \quad (4-20)$$

Os polinômios entre parênteses são as funções aproximadas  $\phi_i$  dos modos de vibrar que serão usadas para o cálculo das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da equação 4-14. Então,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left(1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3}\right) ; \quad \phi_2 = l \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) \\ \phi_3 &= \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3}\right) ; \quad \phi_4 = l \left(-\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right) \end{aligned} \quad (4-21)$$

Assim, substituindo 4-21 em 4-13, temos

$$M_x = \rho A \begin{bmatrix} \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_1 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_1 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_2 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_2 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_3 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_3 dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3 \phi_4 dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4 \phi_4 dz \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

$$K_x = EI \begin{bmatrix} \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_1'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_1'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_2'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_2'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_3'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_3'' dz \\ \int_{z_1}^{z_2} \phi_1'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_2'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_3'' \phi_4'' dz & \int_{z_1}^{z_2} \phi_4'' \phi_4'' dz \end{bmatrix} \quad (4-23)$$



$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \text{sim} & & & \\ 0 & -6l & 4l^2 & & & & & & \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 6l & & & \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & & \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

$$C = \frac{c}{420l} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & \text{sim} & & & \\ 0 & 22l & 4l^2 & & & & & & \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & & & & \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & & & \\ 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 22l & 4l^2 & & \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 & \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$G = \frac{\Omega J_p}{30l^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & \text{anti sim} & & & \\ -3l & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -3l & 4l^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36l & 0 & & & \\ -3l & 0 & 0 & l^2 & 3l & 0 & 0 & & \\ 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3l & 4l^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

com o correspondente vetor dos deslocamentos

$$q^T = [x_1 \ y_1 \ \beta_1 \ \alpha_1 \ x_2 \ y_2 \ \beta_2 \ \alpha_2] \quad (4-33)$$

O passo seguinte é a montagem das matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, que consiste em agregar apropriadamente os coeficientes das matrizes. Qualquer elemento  $k_{ij}$  da matriz global pode ser obtido adicionando-se os correspondentes coeficientes associados com aquelas coordenadas do nó. Assim, se por exemplo, considerarmos dois elementos finitos (figura 4.4), para obtermos o coeficiente de rigidez  $k_{55}$  da matriz global, é necessário adicionar os coeficientes de rigidez dos elementos **1** e **2** correspondentes ao nó 2. Estes coeficientes são designados por  $k_{55}^1$  e  $k_{11}^2$ , respectivamente, onde o superescrito identifica o elemento da viga

e o índice inferior localiza o coeficiente apropriado na matriz do elemento correspondente. A equação 4-34 ilustra o processo descrito, onde pode-se verificar que, onde houver superposição, as contribuições à matriz global  $[K]$  de dimensão  $12 \times 12$  são somadas.

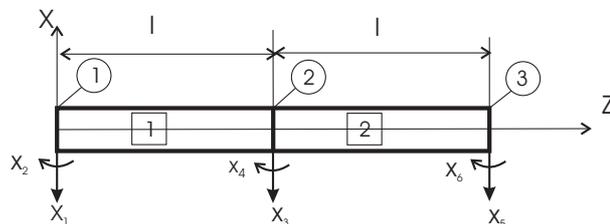


Figura 4.4: Viga com dois elementos finitos

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12+12 & 0 & 0 & -6l+6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12+12 & 6l-6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l-6l & 4l^2+4l^2 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l-6l & 0 & 0 & 4l^2+4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 6l & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

O mesmo procedimento é adotado para as demais matrizes.

### 4.3.1 Condições de contorno e carregamento

Como já foi abordado na seção 4-12, as condições de contorno estão incorporadas na equação 4-9 através dos termos em destaque. Assim, se considerarmos uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, estes termos são nulos, uma vez que  $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(l) = \phi'''(l) = 0$ . isto equivale a eliminar a primeira e segunda linhas e colunas das matrizes  $M$ ,  $K$ ,  $C$  e  $G$ , uma vez que  $x_1 = x_2 = 0$ .

Se considerarmos que a viga possui a extremidade apoiada em um elemento flexível com amortecimento, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{k}{EI} x(0) ; & \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{k}{EI} x(l) \\ \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{c}{EI} \frac{\partial x(0)}{\partial t} ; & \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{c}{EI} \frac{\partial x(l)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-35)$$

Assim, à matriz global  $K$  são adicionados os efeitos das propriedades concentradas nos nós das extremidades:

$$K_b = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma fazemos com a matriz de amortecimento

$$C_b = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

As condições de contorno para o rotor apoiado em mancais hidrodinâmicos, incluindo rigidez e amortecimento cruzados, serão

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x(0)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{xx}x(0) + k_{xy}y(0) + c_{xx}\frac{\partial x(0)}{\partial t} + c_{xy}\frac{\partial y(0)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 x(l)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{xx}x(l) + k_{xy}y(l) + c_{xx}\frac{\partial x(l)}{\partial t} + c_{xy}\frac{\partial y(l)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 y(0)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{yy}y(0) + k_{yx}x(0) + c_{yy}\frac{\partial y(0)}{\partial t} + c_{yx}\frac{\partial x(0)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial^3 y(l)}{\partial z^3} &= \frac{1}{EI} \left[ k_{yy}y(l) + k_{yx}x(l) + c_{yy}\frac{\partial y(l)}{\partial t} + c_{yx}\frac{\partial x(l)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4-36)$$

onde os coeficientes de rigidez  $k$  e amortecimento  $c$ , principais e cruzados, foram definidos na seção 3.4.2

Assim, às matrizes de rigidez e amortecimento correspondentes ao primeiro e último elementos são adicionadas as matrizes

$$K_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{yx} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

$$C_b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

Os carregamentos são considerados no vetor de forças externas  $F$ . Assim, se uma força vertical  $wf(t)$  for aplicada no nó 2 (figura 4.4) com deslocamento  $x_3$ , o vetor  $F$  ficará

$$[F^1]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad wf(t) \quad 0 \quad 0] \quad (4-39)$$

Se for aplicado um carregamento distribuído  $\bar{w}f(t)$ , onde  $\bar{w}$  é a carga unitária, o vetor  $F$  é encontrado aplicando-se a equação 4-14. Assim,

$$F = pf(t) \begin{Bmatrix} \int_0^l \left( 1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l l \left( \frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l \left( 3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3} \right) dz \\ \int_0^l l \left( -\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) dz \end{Bmatrix} = pf(t) \begin{Bmatrix} l \\ l^2/2 \\ l^3/3 \\ l^4/4 \end{Bmatrix} \quad (4-40)$$

Assim, montadas as matrizes globais, teremos a equação diferencial

$$M\ddot{q} + (C + G)\dot{q} + Kq = Q \quad (4-41)$$

onde  $M$ ,  $C$ ,  $G$  e  $K$  são matrizes de dimensão  $n = 8p - 4$  e  $Q$ ,  $n \times 1$ , sendo  $p$  o número de elementos finitos em que foi dividido o rotor. Para  $p = 1$ ,  $n=8$ . A escolha de  $p$  depende do grau de precisão requerido para o problema.

#### 4.4

#### Solução da Equação de Movimento

Conforme o que foi visto na seção 4.3, as direções  $X$  e  $Y$  são acopladas pelas matrizes de rigidez e amortecimento através das condições de contorno, bem como pela matriz giroscópica. Além disso, estas matrizes assimétrizam

a matriz global. Portanto, o problema não pode ser resolvido pela análise modal clássica .

Faz-se necessário, então, analisar o sistema homogêneo em seu espaço de estado [14]

$$\dot{u}(t) = Au(t) + BQ(t) \quad (4-42)$$

onde

$$u(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)]^T$$

é um vetor de estado de dimensão  $2n \times 1$  e

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}(C + G) \end{array} \right] \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ M^{-1} \end{array} \right] \quad (4-43)$$

onde  $A$  é a matriz não simétrica de dimensão  $2n$  e  $B$ ,  $2n \times n$ .

A solução da parte homogênea de 4-42 tem a forma

$$u(t) = e^{\lambda t}u \quad (4-44)$$

onde  $\lambda$  é uma constante escalar e  $u$  um vetor constante de dimensão  $2n$ . Substituindo 4-44 em 4-42, obtemos o problema de autovalor generalizado

$$Au = \lambda u \quad (4-45)$$

A equação 4-45 admite soluções na forma de autovalores  $\lambda_i$  e correspondentes autovetores  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ) que satisfazem às equações

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-46)$$

Para que esta base de autovetores sirva para diagonalizar a matriz  $A$ , é necessário que eles sejam ortogonais entre si e em relação a  $A$ . Entretanto, como  $A$  não é simétrica, não existe esta relação de ortogonalidade.

Lembrando que  $\det(A^T) = \det(A)$ , podemos concluir que

$$\det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$

donde concluímos que  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos autovalores. Assim, podemos escrever o problema de autovalor associado com  $A^T$  na forma

$$A^T v = \lambda v \quad (4-47)$$

O problema de autovalor para  $A^T$  admite soluções na forma de autovalores  $\lambda_j$  e autovetores  $v_j$  que satisfazem às equações

$$A^T v_i = \lambda_i v_i, \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-48)$$

Transpondo 4-47, obtém-se

$$v_j^T A = \lambda_j v_j^T \quad (4-49)$$

Em função da posição em relação à matriz  $A$ , os autovetores  $v_j$  são conhecidos como autovetores à esquerda de  $A$  e os autovetores  $u_i$  são conhecidos como autovetores à direita de  $A$ .

Em seguida, premultiplicamos a equação 4-46 por  $v_j^T$ , posmultiplicamos a equação 4-49 por  $u_i$  e subtraímos o segundo resultado do primeiro para obter

$$(\lambda_i - \lambda_j) v_j^T u_i = 0 \quad (4-50)$$

Entretanto, como todos autovalores são distintos, temos

$$v_j^T u_i = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4-51)$$

A equação 4-51 diz que os autovetores à esquerda e os autovetores à direita de uma matriz real não simétrica de diferentes autovalores são ortogonais. Diz-se que os dois conjuntos de autovetores são biortogonais.

Em seguida, pré multiplicamos a equação 4-46 por  $v_j^T$  e substituímos 4-51, obtendo

$$v_j^T A u_i = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (4-52)$$

de modo que os autovetores à direita e à esquerda são biortogonais em relação à matriz  $A$ . Esses pares de autovetores podem ser normalizados fazendo-se  $v_j^T u_i = 1$ , satisfazendo às relações de biortonormalidade

$$v_j^T u_i = \delta_{ij} \quad (4-53)$$

onde  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Além disso, premultiplicando 4-46 por  $v_j^T$  e substituindo 4-53, obtemos

$$v_j^T A u_i = \lambda_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4-54)$$

Este desenvolvimento pode ser expresso em uma forma matricial compacta. Para este fim, introduziremos a matriz espectral

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \quad (4-55)$$

bem como as matrizes dos autovetores à esquerda e à direita

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n}], \quad U = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2n}] \quad (4-56)$$

Assim, as relações de biortogonalidade 4-53 e 4-54 podem ser escritas

$$V^T U = I \quad (\text{a}) \quad V^T A U = \Lambda \quad (\text{b}) \quad (4-57)$$

$$V^T = U^{-1} \quad (4-58)$$

Substituindo 4-58 em 4-57 b, obtém-se

$$U^{-1} A U = \Lambda \quad (4-59)$$

Assim, assumindo que todos os autovalores são distintos, a matriz  $A$  pode ser diagonalizada por meio desta relação de semelhança.

Valendo-se desta transformação, consideraremos a solução da equação 4-42 a partir da seguinte transformação

$$q(t) = U \zeta(t) \quad (4-60)$$

onde  $\zeta(t)$  é o vetor das coordenadas modais

Substituindo 4-60 em 4-42, premultiplicando por  $V^T = U^{-1}$  e considerando as relações de biortogonalidade 4-57, obtém-se

$$\dot{\zeta}(t) = \Lambda \zeta(t) + Z(t) \quad (4-61)$$

onde  $Z(t) = V^T B Q(t)$  é o vetor força modal

A equação 4-62 representa um conjunto de  $2n$  equações independentes da forma

$$\dot{\zeta}_i(t) = \lambda_i \zeta_i(t) + Z_i(t) \quad (4-62)$$

e a solução é dada por

$$\zeta_i(t) = e^{\lambda_i t} \zeta_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} Z_i(\tau) d\tau \quad (4-63)$$

onde, premultiplicando 4-60 por  $V^T$  e fazendo  $t = 0$ , encontramos as coordenadas modais das condições iniciais. Assim,

$$\zeta_i(0) = V^T q(0) \quad (4-64)$$

Substituindo 4-63 e 4-64 em 4-60, encontra-se a solução nas coordenadas físicas

$$q(t) = U e^{\lambda_i t} V^T \zeta_i(0) + \int_0^t U e^{\Lambda_i(t-\tau)} V^T B Q(\tau) d\tau \quad (4-65)$$

Apesar de aparecerem unidades complexas em 4-65, somente a parte real é considerada, como demonstrado em seguida.

De 4-62 conclui-se que, para autovalores complexos conjugados aparecem pares de equações complexas conjugadas na forma

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) - \lambda_i \zeta_i(t) &= Z_i(t) \\ \dot{\bar{\zeta}}_i(t) - \bar{\lambda}_i \bar{\zeta}_i(t) &= \bar{Z}_i(t) \end{aligned} \quad (4-66)$$

onde a barra refere-se ao conjugado do vetor.

As soluções nas coordenadas modais dadas por 4-63 para autovalores complexos conjugados são complexas conjugadas entre si. Se considerarmos somente a contribuição do par modal dos complexos conjugados dada por 4-65 na transformação para as coordenadas físicas, tem-se

$$q(t) = v^T \zeta(t) + \bar{v}^T \bar{\zeta}(t) \quad (4-67)$$

podendo-se observar que a contribuição imaginária de  $v^T \zeta_i$  é cancelada pela contribuição imaginária de  $v^T \bar{\zeta}_i$  e que a parte real é igual. Assim, a equação 4-67 pode ser substituída por

$$q(t) = 2\text{Re}(v^T \zeta(t)) \quad (4-68)$$

onde  $Re$  significa a parte real do imaginário

## 4.5 Análise Rotodinâmica

A análise rotodinâmica de uma turbomáquina é composta de três partes: análise de velocidade crítica não amortecida, análise de resposta amortecida ao desbalanceamento e análise de estabilidade [1]. Estas análises serão conduzidas para o rotor objeto de estudo deste trabalho conforme critérios das normas de turbomáquinas do American Petroleum Institute

(API)[1]. A geometria do rotor será detalhada no capítulo seguinte, onde serão apresentados os dados experimentais.

Todos os diagramas das figuras 4.5, 4.6, 4.8, 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 são obtidos pelo programa ROMAC da University of Virginia. O programa faz a modelagem do rotor pelo Método dos Elementos Finitos, considerando os efeitos da inércia de rotação, cisalhamento e a ação giroscópica. A determinação das propriedades do mancal é feita através da solução numérica completa da Equação de Reynolds, considerando a variação da viscosidade no filme lubrificante.

#### 4.5.1

##### **Análise de Velocidade Crítica não Amortecida**

Como não leva em conta o amortecimento, bem como forças de desbalanceamento, a análise de velocidade crítica não amortecida serve como estimativa preliminar das velocidades críticas e características dos modos de vibrar.

As velocidades críticas, bem como seus modos associados são extremamente influenciados pela magnitude da rigidez do mancal, posição do mancal e da massa e rigidez do rotor. A análise de velocidade crítica é feita variando-se a rigidez principal do mancal para o modelo do rotor. A rigidez cruzada não é considerada na mapa de críticas. As velocidades críticas são, então, calculados para cada valor de rigidez. Deste modo, chega-se a curvas que representam o lugar geométrico das frequências naturais do rotor.

O resultado básico desta análise é o mapa de críticas, ilustrado na figura 4.5 que plota as quatro primeiras críticas como função da rigidez do mancal.

Uma importante relação que governa as características gerais do mapa de crítica é a relação entre a rigidez do eixo e a rigidez do mancal. Quando a rigidez do mancal é baixa em relação à rigidez do eixo, a rigidez do mancal governa a frequência natural e o eixo se moverá com pequena deflexão. Ao contrário, quando os mancais são muito mais rígidos que o eixo, as frequências naturais mais baixas serão governada pela rigidez do eixo. Sob esta condição, os mancais tornam-se um nó e uma alta deflexão do eixo ocorre em seu modo de vibrar.

O mapa de críticas resume estas relações. Se observarmos a primeira crítica, pode-se notar que existe uma região onde a inclinação da curva é praticamente constante. Esta região é chamada de seção rotor rígido do mapa de críticas porque a rigidez do eixo é maior que a rigidez do mancal.

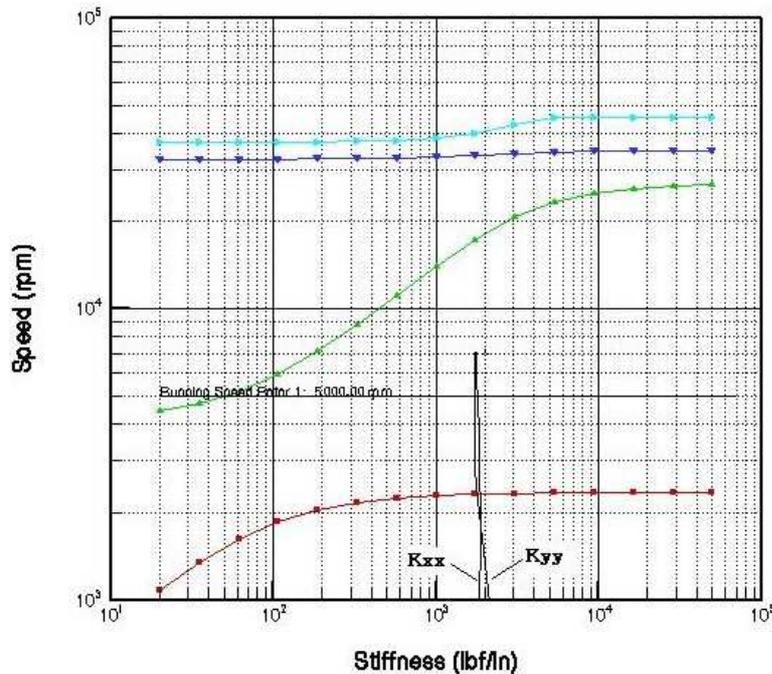


Figura 4.5: Mapa de críticas com dados da figura 4.6

No lado direito do mapa, a partir de 200 lb/in (35.316 N/m) de rigidez, a curva começa a tornar-se assintótica a uma velocidade de aproximadamente 2.400 *rpm*, o que significa que, a partir deste ponto, aumentar a rigidez do mancal não alterará a velocidade crítica. Esta região é chamada de seção mancal rígido porque a rigidez do eixo domina a dinâmica do sistema.

Com o mapa de crítica definido, o passo final é definir as características reais de rigidez do mancal  $k_{xx}$  e  $k_{yy}$ , mostrada na 4.6, como função da velocidade. A partir deste gráfico, pode-se notar que este mancal possui uma estreita margem de variação de 1.800 lb/in (313920 N/m) a 2.200 lb/in (385.533 N/m) e é aproximadamente isotrópico. Estes valores são plotados no mapa de críticas. As velocidades onde as curvas de rigidez do mancal interceptam o mapa de crítica, são potenciais velocidades críticas do sistema. Neste caso, a primeira velocidade crítica está em torno de 2400 *rpm*.

A partir das curvas de rigidez no mapa de críticas, pode-se inferir a característica geral da resposta amortecida ao desbalanceamento. Se a curva de rigidez interceptar a seção rotor rígido, então o fator de amplificação  $AF$  será baixo (menor que 8), e a resposta ao desbalanceamento será bem amortecida. No nosso caso ocorrerá o contrário, pois a interseção ocorre na seção mancal rígido do mapa.

A relação entre o mapa de críticas e o resultado da análise de resposta ao desbalanceamento pode ser melhor entendida se os modos de vibrar não amortecidos forem examinados para os casos de mancal rígido e mancal

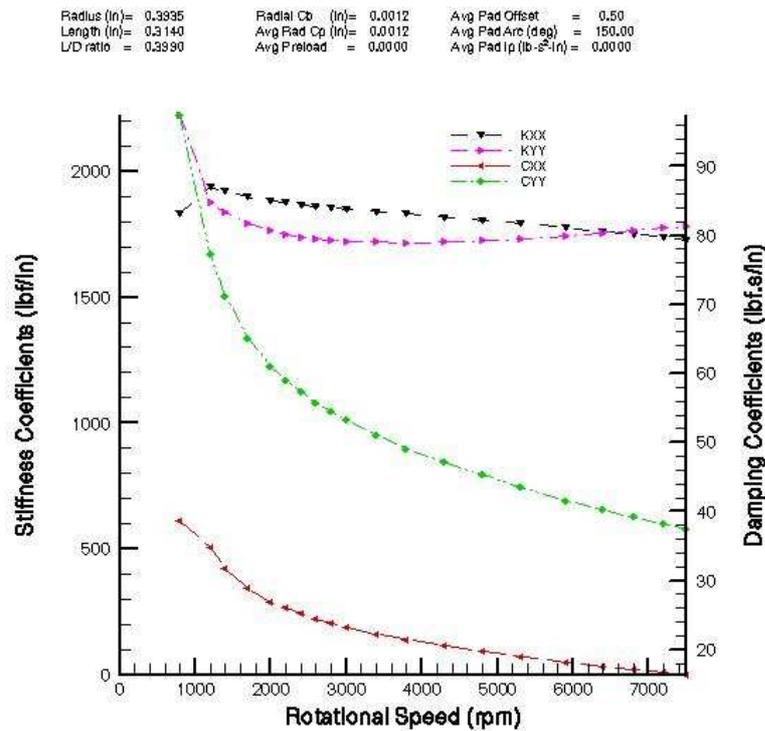


Figura 4.6: Propriedades do mancal

flexível conforme a figura 4.7. No caso dos mancais flexíveis, a deflexão do eixo é menor que a deflexão dos mancais. O amortecimento dos mancais será usado para atenuar as vibrações do rotor. Por outro lado, quando os mancais são mais rígidos que o eixo, mesmo se o amortecimento for alto, as forças de amortecimento serão pequenas porque o movimento do eixo no mancal é pequeno.

Os modos de vibrar não amortecidos são úteis pelas seguintes razões:

1. São planos ou bidimensionais, diferentemente das deflexões complexas tridimensionais que ocorrem no rotor devido à presença do amortecimento.
2. Dão uma indicação aproximada dos deslocamentos relativos do eixo quando o rotor opera na vizinhança da velocidade crítica associada.
3. Dão uma indicação da distribuição do desbalanceamento que será necessário para excitar a velocidade crítica associada. Esta informação é vital para determinar a localização do desbalanceamento na análise de resposta ao desbalanceamento. No nosso caso, pode-se concluir que a estação 8 (metade do disco) não é adequada para excitar o segundo modo, pois este ponto é um nó.

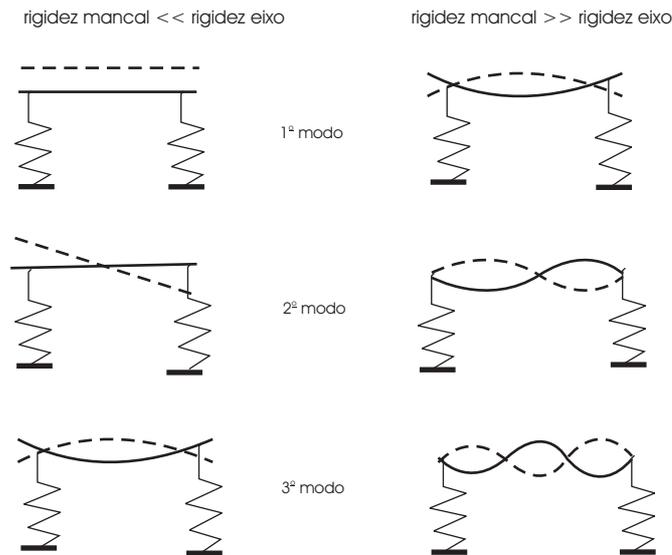


Figura 4.7: Modos de vibrar para mancal flexível e rígido

Os modos de vibrar do nosso rotor são mostrados na figura 4.8. Pode-se verificar que os modos 2, 3 e 4 são essencialmente giroscópicos.

#### 4.5.2

##### Análise de Resposta Amortecida ao Desbalanceamento

A análise de resposta amortecida nos dá a amplitude de vibração esperada. Seu objetivo é informar se a máquina atenderá aos requisitos de margem de separação e limites de vibração.

As normas do American Petroleum Institute (API) para turbomáquinas prescrevem a magnitude do desbalanceamento a ser aplicado na simulação, bem como sua localização. A deflexão máxima do eixo não deve exceder 75% da folga neste ponto.

O limite de vibração pico a pico em  $\mu m$  lido pelos sensores é dado pela relação

$$L_v = 25\sqrt{\frac{12.000}{N}} \quad \text{ou} \quad L_v = 250, \quad \text{o que for menor} \quad (4-69)$$

onde  $N$  é a máxima velocidade de operação contínua em  $rpm$ .

Este limite não deverá ser excedido, mesmo se o desbalanceamento aplicado for quatro vezes o residual  $u$ , dado pela relação

$$u = \frac{6350w}{N} \quad (4-70)$$

onde  $w$  é a carga estática total sustentada pelos mancais do rotor em  $Kg$ .

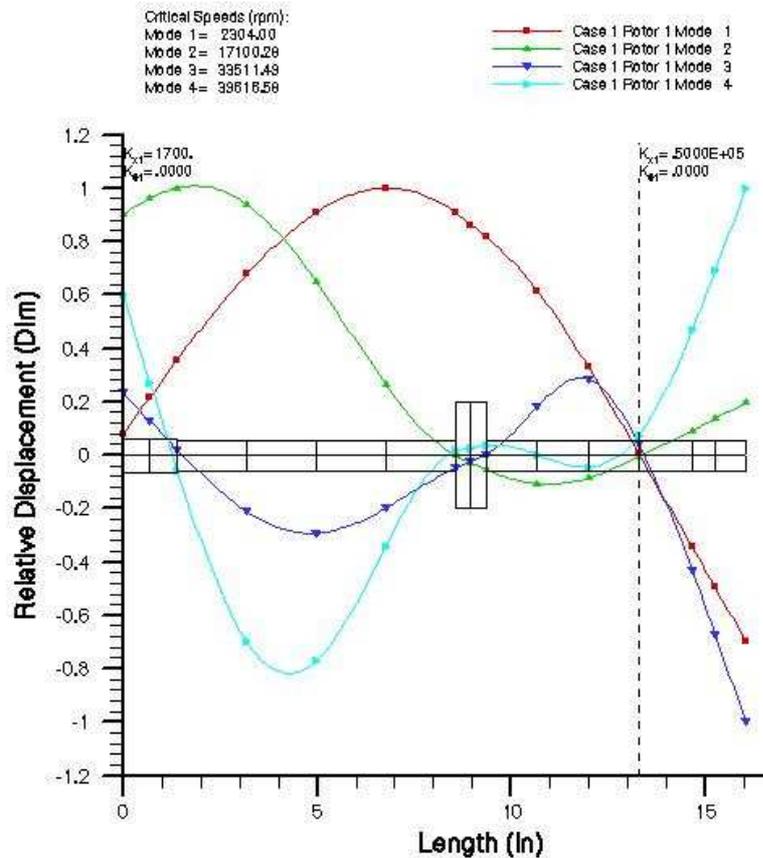


Figura 4.8: Modos de vibrar não amortecidos

O produto principal da análise de resposta ao desbalanceamento é o Diagrama de Bode contendo o fator de amplificação  $AF$  e a margem de separação  $SM$ . A margem de separação mede o quanto a velocidade de operação dista da velocidade crítica e é dada como um percentual da velocidade mínima de operação se a crítica estiver abaixo dela, ou da velocidade máxima, se acima. O fator de amplificação é uma medida indireta da quantidade do amortecimento disponível para atenuar o nível de vibração. Estes parâmetros estão ilustrados na figura 4.9 retirada da norma API para turbomáquinas [1].

O limite estabelecido para a margem de separação é dado pela expressão

$$SM = 17 \left( 1 - \frac{1}{AF-1,5} \right) \quad \text{ou} \quad SM = 16, \quad \text{o que for menor} \quad (4-71)$$

Fazendo a simulação, considerando a faixa de operação de 5.000  $rpm$  a 7.000  $rpm$  e aplicando  $u = 7,0$  g.mm, temos o diagrama de Bode na figura 4.10, onde podemos ver que  $AF = 13,7$  e  $SM = 52\%$ , maior que a requerida  $SM_R = 15\%$ . O alto  $AF$  encontrado confirma a análise de

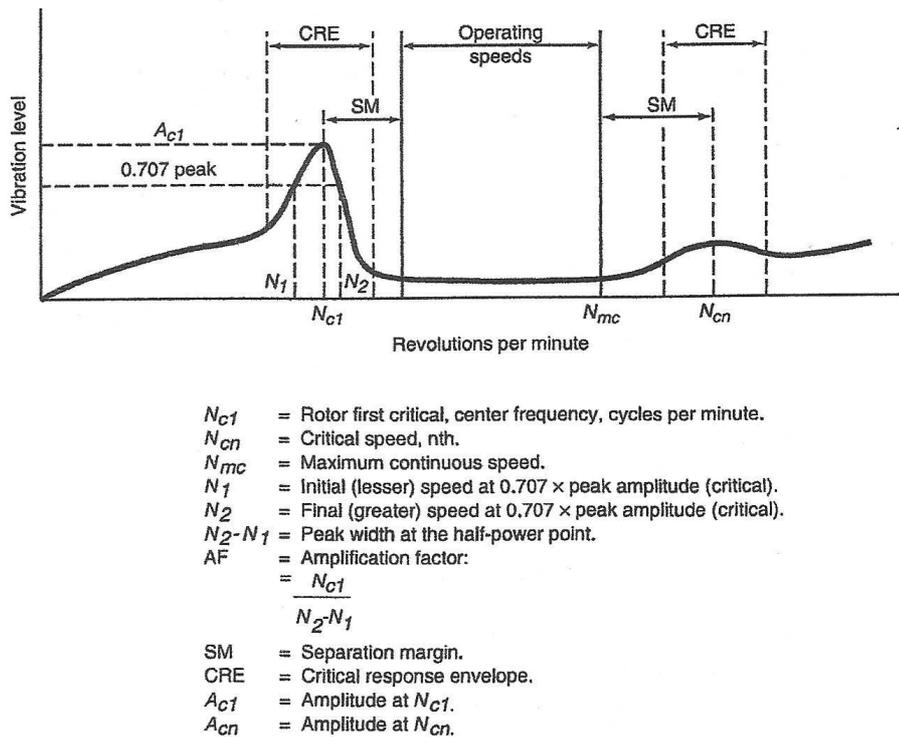


Figura 4.9: Fator de amplificação e margem de separação

velocidade crítica feita na seção 4.5.1, onde vimos que a curva de rigidez do mancal intercepta o mapa de crítica na seção mancal rígido.

Se compararmos o pico de vibração de 0,8 mils ( $20 \mu m$ ) zero a pico e compararmos com o limite  $L_v = 1,31(32 \mu m)$  pico a pico estabelecido por 4-69, concluímos que o limite de vibração foi ultrapassado.

Os modos de vibrar tridimensionais são mostrados nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13 mostram a resposta ao desbalanceamento. Pode-se observar nestas figuras que a linha elástica do rotor não está contida num plano, o que ilustra o significado dos autovetores complexos de uma matriz não simétrica.

### 4.5.3

#### Análise de estabilidade

O anexo A contém a análise de estabilidade, onde podemos ver que a 4.800rpm o primeiro autovalor possui a parte real  $\sigma = 0,1765$ , positiva, correspondente ao fator exponencial. O respectivo decremento logarítmico é  $-0,01$ , o que indica que a esta rotação o rotor está sujeito à instabilidade.

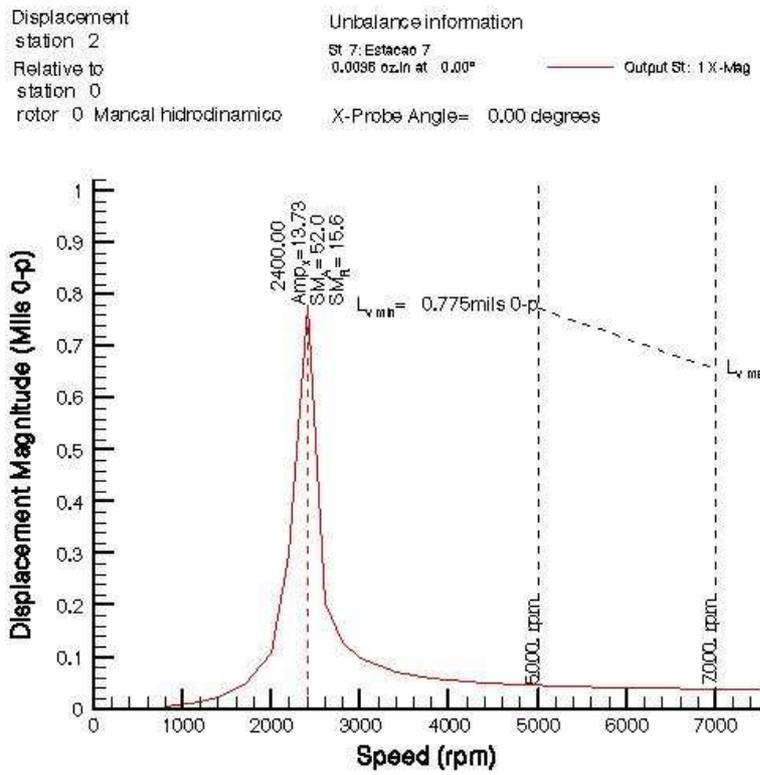


Figura 4.10: Diagrama de Bode

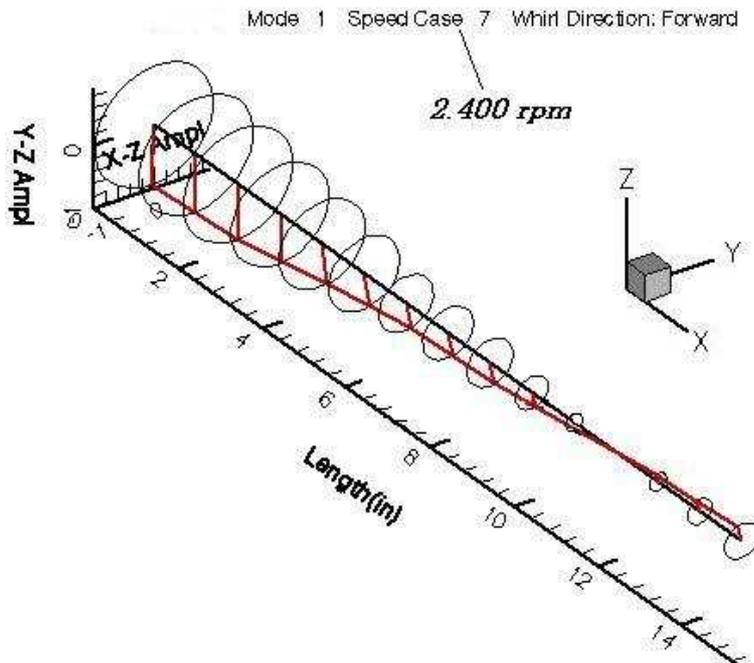


Figura 4.11: 1º modo e vibrar

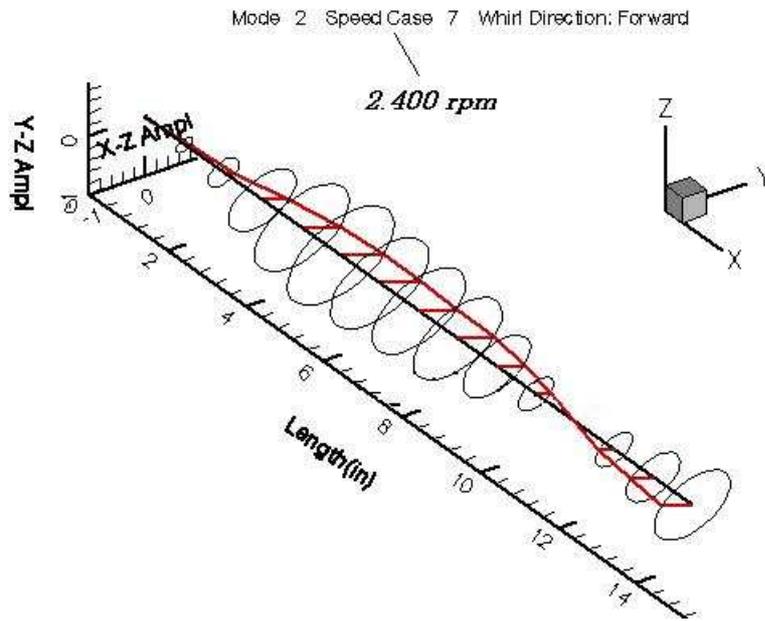


Figura 4.12: 2º modo de vibrar

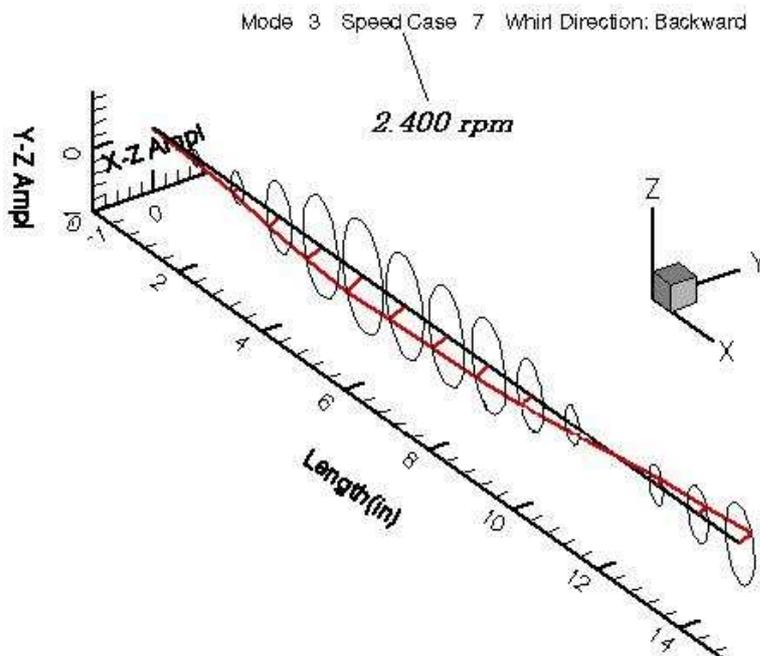


Figura 4.13: 3º modo de vibrar