3
OS MANCAIS HIDRODINÂMICOS

3.1
Introdução

Os mancais hidrodinâmicos são largamente empregados em turbomáquinas por permitirem altas cargas em altas velocidades. Além disso, a vida de um mancal de deslizamento é, teoricamente, infinita, uma vez que não existe contato entre peças com movimento relativo, garantindo longa continuidade operacional.

Este capítulo analisa a teoria básica da lubrificação e, a partir da Equação de Reynolds estuda o mecanismo de formação da pressão de sustentação da carga dos mancais, determinando as propriedades de rigidez e amortecimento.

As seções 3.3 e 3.4 são um resumo dos textos de Allaire [24] e Cameron [25].

3.2
A Teoria da Lubrificação

A lubrificação consiste na interposição de um fluido lubrificante entre superfícies que possuem movimento relativo, com o objetivo de reduzir o coeficiente de atrito, evitando, consequentemente, o desgaste.

A viscosidade é uma das propriedades mais importantes de um lubrificante. Seu significado fundamental pode ser ilustrado considerando-se duas placas paralelas: uma fixa e a outra móvel sob a ação de uma força P, paralela à placa fixa e separadas por uma película de lubrificante de espessura h, conforme ilustrado na figura 3.1.

As partículas do lubrificante aderem às placas fixa e móvel. O movimento é acompanhado por um escorregamento linear ou cisalhamento das partículas do lubrificante através de toda a altura h da película. Sendo A

a área de contato da placa com o fluido, a tensão cisalhante será igual a $\tau = \frac{P}{A}$

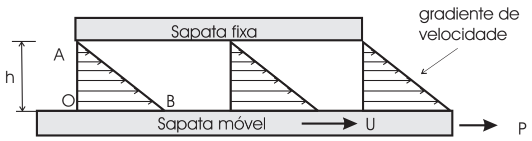

Figura 3.1: Cisalhamento do filme de óleo

Esta tensão cisalhante varia de forma diretamente proporcional à velocidade U da placa móvel e inversamente à espessura h da película.

Define-se

$$\mu = \frac{P/A}{U/h} = \frac{tens\tilde{a}o\ de\ cisalhamento}{gradiente\ de\ velocidade}$$

onde μ é a constante de proporcionalidade, conhecida como viscosidade.

Quando a sapata fixa é paralela à que se move, como no caso da figura 3.1, as velocidades das várias lâminas de fluido são proporcionais à sua distância à sapata fixa e a área do triângulo OAB é proporcional ao volume de fluido que passa por uma seção unitária na unidade de tempo. Neste caso, a sapata fixa não sustenta nenhum esforço vertical. Se a sapata fixa for inclinada de tal modo que a espessura da película varie de h_1 na seção onde o óleo entra, até h_2 por onde o óleo sai, o gradiente de velocidade variará ao longo da placa. A curva representativa da variação da velocidade é côncava na entrada e convexa na saída, como mostrado na figura 3.2. Os diagramas não são mais triangulares, mas devem ter todos a mesma área, desde que não haja fuga de lubrificante. Assim, a carga w será suportada pela pressão gerada entre as sapatas no filme fluido como indicado na figura 3.2.

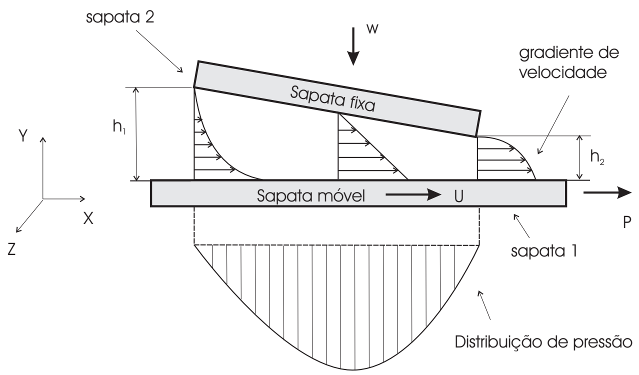

Figura 3.2: Sapata deslizante inclinada

3.3 A Equação de Reynolds

A equação de Reynolds é deduzida a partir da condição de equilíbrio de um elemento infinitesimal(figura 3.3) sob a ação de tensões de cisalhamento viscoso τ e da pressão p do fluido.

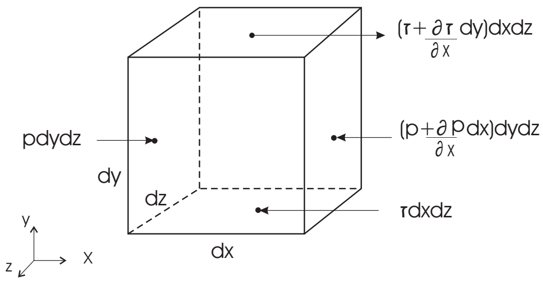

Figura 3.3: Equilíbro de um elemento infinitesimal

Supõem-se as seguintes hipóteses na dedução da equação:

1. Campos externos como o magnético e gravitacional são desprezados.
2. A pressão ao longo da espessura do filme lubrificante é considerada constante, uma vez que tal espessura é muito pequena (da ordem de centésimos de milímetro).
3. As curvaturas da superfície do mancal são consideradas muito grandes comparadas com a espessura do filme, o que significa que a direção da velocidade das lâminas é considerada constante.
4. Não existe deslizamento na interface fluido-sólido, o que significa que a velocidade da superfície é a mesma da última lâmina adjacente de lubrificante.
5. O lubrificante é Newtoniano.
6. O fluxo é laminar.
7. A viscosidade do filme lubrificante não varia, mantidas constantes a carga e a velocidade.
8. A inércia do fluido é desprezada.

Considerando a equação da continuidade

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \tag{3-1}$$

onde q é a vazão nas direções X,Y e Z,
chega-se à Equação de Reynolds em três dimensões

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}h(U_1+U_2)+\frac{\partial}{\partial z}h(W_1+W_2)+2(V_1-V_2)\right] \tag{3-2}$$

onde,
U - velocidade da superfície na direção X
V - velocidade da superfície na direção Y
W - velocidade da superfície na direção Z

Em geral, não existe movimento dos mancais na direção Z , portanto, $W_1 = W_2 = 0$. Nas direções X e Y, somente uma das superfícies se move, toma-se então, $U_2 = V_2 = 0$.

Assim, fazendo $U_1 = U$ e $V_1 = V$, a equação 3-2 reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left(2V+\frac{\partial(Uh)}{\partial x}\right) \tag{3-3}$$

Efetuando a derivada do segundo membro, otém-se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left(2V+U\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial U}{\partial x}\right) \tag{3-4}$$

Quando atuam somente cargas estáticas no mancal, como o peso do rotor, por exemplo, haverá equilíbrio e o termo de velocidade V será nulo. Se, por outro lado, considerarmos cargas dinâmicas como a força resultante de um desbalanceamento do rotor, o eixo oscilará em torno de uma posição de equilíbrio, produzindo o efeito conhecido como "***squeeze***"(esmagamento do filme). Outro exemplo é o mancal que apóia o virabrequim de máquinas alternativas, como motores a explosão ou compressores alternativos, nos quais a direção e amplitude da carga mudam constantemente com a posição angular do virabrequim.

Duas aproximações são usadas para se obter uma solução analítica de problemas de mancal, a saber: mancal curto, em que a largura B é muito menor que o comprimento L, e o mancal longo, no qual $B >> L$. Será considerado aqui, somente o primeiro caso já que o mancal objeto dos experimentos será o curto.

3.3.1 Solução para Mancais Curtos

Mancais cuja dimensão na direção Z é bem menor que na direção X, como mostrado na figura 3.4, são considerados curtos. Assim sendo, o pico de pressão deve cair mais rapidamente para a pressão ambiente p_a na direção Z do que na direção X. Logo, como o gradiente de pressão $\partial p/\partial z$ é muito maior que o gradiente de pressão $\partial p/\partial x$, o primeiro termo do lado esquerdo da equação 3-4 pode ser desprezado. Se considerarmos apenas carga estática, não haverá movimento na direção Y, portanto $V = 0$, ficando, então

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{3-5}$$

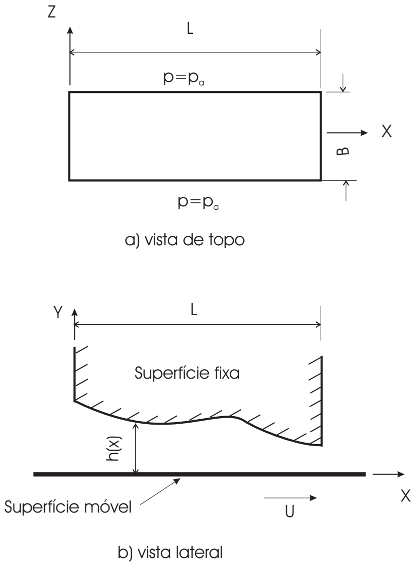

Figura 3.4: Mancal curto $B << L$

Como h é apenas função de x, a equação 3-5 torna-se

$$\frac{d^2p}{dz^2} = 6U\mu\frac{dh/dx}{h^3} \tag{3-6}$$

que, integrando, obtém-se

$$\frac{dp}{dz} = 6U\mu\frac{dh/dx}{h^3}\frac{z^2}{2} + c_1z + c_2 \tag{3-7}$$

onde c_1 e c_2 são as constantes de integração, obtidas aplicando-se as condições de contorno. Considerando a origem do sistema de coordenadas na metade da largura B, elas são

$$p = p_a = 0, \quad \text{para} \quad z = B/2 \quad \text{e} \quad z = -B/2 \tag{3-8}$$

Então,

$$p = 3\mu U \frac{dh/dx}{h^3} \left(z^2 - \frac{B^2}{4} \right) \tag{3-9}$$

A equação 3-9 confirma o que foi dito na seção 3.2, ou seja, se $dh/dx = 0$(superfícies paralelas), a pressão será nula, não havendo, portanto, capacidade de sustentação de carga no mancal.

A capacidade de carga do mancal será dada por

$$w = \int_{-fracL2}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p \, dzdx$$

3.4 Mancais Radiais

Um mancal radial é composto por um alojamento com superfície curva (cilídrica, elíptica ou multilobular) e um eixo em seu interior, ambos separados por um fluido lubrificante, conforme mostrado na figura 3.5 nas posições de repouso, início de movimento e em movimento. Nas duas primeiras posiçoes há contato direto do munhão (parte do eixo dentro do mancal) com as paredes do mancal.

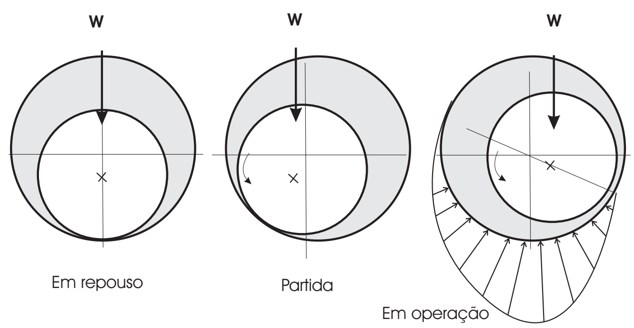

Figura 3.5: Funcionamento do mancal radial

O fluido é forçado para a região abaixo do munhão devido às forças de cisalhamento geradas pela rotação do eixo. Isto gera alta pressão no fundo do eixo similar à da sapata deslizante mostrada na figura 3.2. Esta alta pressão suporta o peso do rotor, impedindo que o munhão toque a superfície do mancal.

Consideremos, conforme ilustrado na figura 3.6, um eixo circular de raio R, girando a uma velocidade angular absoluta Ω em um mancal cilíndrico de raio $R + f$ e largura B na direção Z. As coordenadas do centro C do eixo são dadas por x_c e y_c em um sistema inercial com origem no centro do mancal que é designado por O. A distância entre o centro do munhão e o centro do mancal é definida como excentricidade e. Será definida uma coordenada angular θ, medida a partir da posição de espessura máxima do filme, que se localiza onde a extensão da linha $\overline{CO}$ corta a superfície do mancal em B. Se considerarmos um ponto D qualquer no mancal, observa-se que o ângulo $\widehat{BCD} = \theta$ possui o vértice em C.

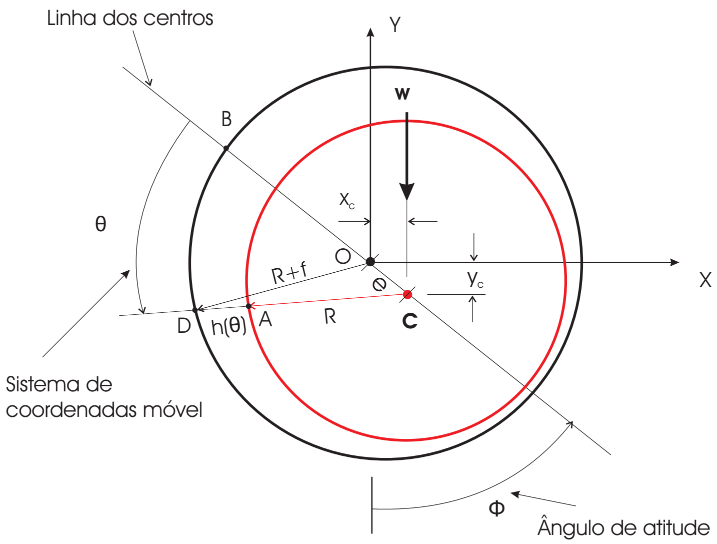

Figura 3.6: Geometria do mancal radial

A linha $\overline{CD}$ corta a superfície do munhão em A e $\overline{AD} = h(\theta)$ é a espessura do filme, determinada aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo COD, como segue.

$$\begin{aligned}(R+f)^2 &= e^2 + (R+h)^2 - 2e(R+h)\cos\theta \\ R^2 + 2Rf + f^2 &= e^2 + R^2 + 2Rh + h^2 - 2eR\cos\theta - 2eh\cos\theta\end{aligned} \quad (3\text{-}10)$$

Simplificando e desprezando os termos de segunda ordem f^2, e^2, h^2 e eh, obtém-se

$$h = f + e\cos\theta = f(1 + \varepsilon\cos\theta) \quad (3\text{-}11)$$

onde $\varepsilon = e/f$ é conhecida como razão de excentricidade.

A expressão exata da espessura será aqui desenvolvida para efeito de comparação com a aproximação. Assim, desenvolvendo 3-10, encontramos uma equação do segundo grau na espessura exata h_e

$$h_e^2 + 2(R - e\cos\theta)h_e - 2eR\cos\theta + e^2 - f^2 - 2Rf = 0 \quad (3\text{-}12)$$

cuja raiz positiva é

$$h_e = e\cos\theta - R + \sqrt{(R+f)^2 - e^2\,\text{sen}^2\,\theta} \quad (3\text{-}13)$$

Fazendo as adimensionalizações de 3-13 com $\bar{f} = f/R$ e $\varepsilon = e/f$, obtém-se

$$h_e = f\left(\frac{\sqrt{(\bar{f}+1)^2 - (\bar{f}\varepsilon)^2 \operatorname{sen}^2\theta} - 1}{\bar{f}} + \varepsilon\cos\theta\right) \tag{3-14}$$

O gráfico 3.7 compara o erro percentual $(h_e - h)$ em um mancal de 20 mm de diâmetro para diferentes razões de excentricidade ε. Conclui-se que o erro é nulo em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, tende a zero quando ε tende a zero e é máximo quando ε tende a 1.

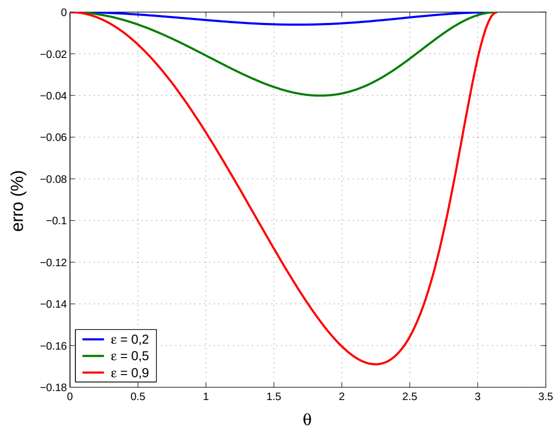

Figura 3.7: Erro da aproximação da espessura do filme

A carga do mancal w é tomada verticalmente de cima para baixo e corresponde à metade do peso do rotor, suportado por dois mancais. O ângulo de atitude ϕ é o ângulo entre a linha de carga e a linha dos centros $\overline{OC}$.

Daí pode-se tirar as seguintes relações trigonométricas da figura 3.6

$$\begin{gathered} e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \\ x_c = e \operatorname{sen}\phi; \qquad y_c = -e\cos\phi \end{gathered} \tag{3-15}$$

O mancal é analisado considerando o que foi estabelecido na figura 3.4, substituindo-se a coordenada x pela coordenada θ conforme indicado na figura 3.8. Mais adiante será visto que será considerado somente o intervalo de 0 a π.

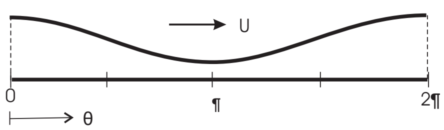

Figura 3.8: Desenvolvimento do filme de óleo

A equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas para o mancal radial é encontrada fazendo-se $x = R\theta$ em 3-4. Assim,

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left(2V+\frac{U}{R}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\frac{h}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \qquad (3\text{-}16)$$

Se considerarmos o mancal curto desprezando o primeiro termo do lado esquerdo, a equação 3-16 reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu\left(2V+\frac{U}{R}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\frac{h}{R}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \qquad (3\text{-}17)$$

cujas condições de contorno em Z são

$$p = p_a(z=-B/2); \qquad p = p_a(z=B/2) \qquad (3\text{-}18)$$

suficientes para calcular o mancal curto

Para o cálculo dos termos de velocidade U e V, componentes do vetor $\mathbf{v_A}$, dado por 3-19, ilustramos na figura 3.9 o vetor excentricidade em uma posição genérica e os sistemas móveis de referência $R(X_1Y_1)$ e $S(X_2Y_2)$.

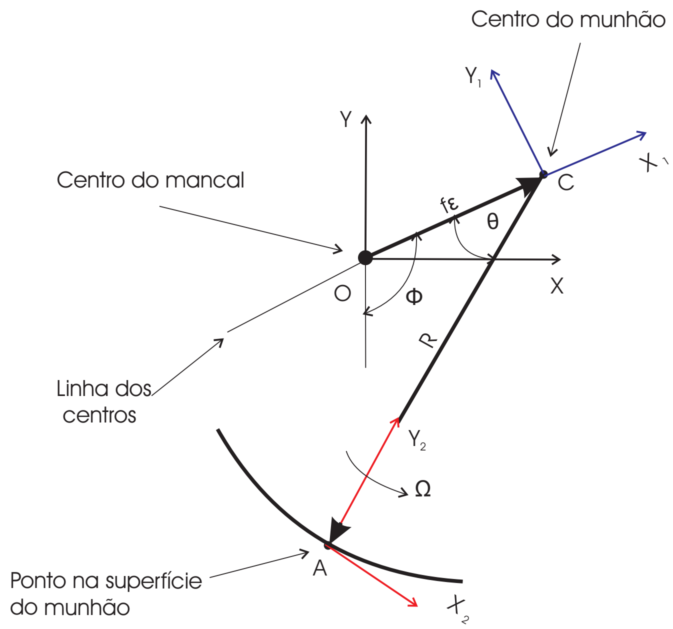

Figura 3.9: Cinemática para definição de U e V

Embarcando no sistema de referência R e escrevendo os vetores com componentes em S:

$$^{\mathbf{S}}\mathbf{v_A} = {}^{\mathbf{S}}\mathbf{v_C} + {}^{S}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{R}}\,{}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}}\mathbf{r_{CA}} + {}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}}\mathbf{v_{relA}} \qquad (3\text{-}19)$$

onde ${}^{S}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{R}} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{matrix} \right\}$

A velocidade do ponto C é facilmente escrita em R

$$
{}^{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{\mathbf{C}} = \left\{ \begin{matrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3-20}
$$

e pode ser transformada para S com ajuda da matriz de transformação de coordenadas ${}^{S}T^{R}$, ${}^{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{\mathbf{C}} = {}^{S}T^{R}\,{}^{R}v_{C}$

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & \operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{matrix} \right\} = \\
& \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} f\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\dot{\phi} \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f\dot{\varepsilon}\operatorname{sen}\theta - f\varepsilon\dot{\phi}\cos\theta \\ f\dot{\varepsilon}\cos\theta + f\varepsilon\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3-21}
$$

A componente da velocidade devido à rotação do SR R:

$$
{}^{\boldsymbol{S}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{R}}\;{}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{C}}\mathbf{r}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\phi}R \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3-22}
$$

Embarcando em R, o movimento de um ponto na superfície do munhão ocorre com uma velocidade angular de módulo $\Omega - \dot{\phi}$

$$
{}^{\mathbf{S}}_{\mathbf{R}}\mathbf{v}_{\mathbf{relA}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} - \Omega & 0 \\ \Omega - \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} R(\Omega - \dot{\phi}) \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3-23}
$$

Somando 3-21, 3-22 e 3-23, tem-se

$$
{}^{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{\mathbf{A}} = \left\{ \begin{matrix} f\dot{\varepsilon}\operatorname{sen}\theta - f\varepsilon\dot{\phi}\cos\theta + \Omega R \\ f\varepsilon\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta + f\dot{\varepsilon}\cos\theta \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{3-24}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
U &= f\dot{\varepsilon}\,\operatorname{sen}\theta - f\varepsilon\dot{\phi}\cos\theta + \Omega R \\
V &= f\varepsilon\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta + f\dot{\varepsilon}\cos\theta
\end{aligned} \tag{3-25}
$$

Efetuando as derivações constantes do segundo membro de 3-17,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -f\cos\theta$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f\dot{\varepsilon}\cos\theta + f\varepsilon\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{3-26}$$

Substituindo 3-26 e 3-11 na equação 3-17, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) &= 6\mu f[2\dot{\varepsilon}\cos\theta + 2\dot{\phi}\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta(f\dot{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\theta - f\varepsilon\dot{\phi}\cos\theta + \Omega R)/R \\ &+ f(1+\varepsilon\cos\theta)(\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)/R]\end{aligned} \tag{3-27}$$

Efetuando as operações em 3-27, desprezando os termos de f^2/R e lembrando que a espessura h não varia com a coordenada z, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{6\mu f[2\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega)\,\mathrm{sen}\,\theta]}{h^3} \tag{3-28}$$

que pode ser facilmente integrada, aplicando-se as condições de contorno 3-18 para resultar em

$$p(\theta, z) = \frac{3\mu[2\dot{\varepsilon}\cos\theta + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega)\,\mathrm{sen}\,\theta]}{f^2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left(z^2 - \tfrac{B^2}{4}\right) + p_a \tag{3-29}$$

Se considerarmos carga puramente estática, temos $\dot{\varepsilon} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$, e a equação 3-29 reduz-se a

$$p(\theta, z) = -\frac{3\mu\varepsilon\Omega\,\mathrm{sen}\,\theta}{f^2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left(z^2 - \tfrac{B^2}{4}\right) + p_a \tag{3-30}$$

Todos os termos de 3-30 são positivos, exceto $\mathrm{sen}\,\theta$, que é positivo para $0 < \theta < \pi$ e negativo para $\pi < \theta < 2\pi$. Como o líquido não pode suportar pressão negativa, forma-se uma região de vapor oriundo do óleo. A pressão de vapor nunca cai abaixo da pressão de vapor do lubrificante. Geralmente, a pressão da região sujeita à cavitação é constante, denotada por p_{cav} e é tomada aproximadamente igual a zero. Na solução da Equação de Reynolds, a qualquer valor com pressão negativa atribui-se p_{cav}. Assim,

$$p = \begin{cases} -\dfrac{3\mu\Omega f\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\theta}{f^2(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left(z^2 - \tfrac{B^2}{4}\right) + p_a\ , & 0 < \theta < \pi \\ 0 & ,\ \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{3-31}$$

A figura 3.10 mostra o perfil da distribuição de pressão em volta do munhão.

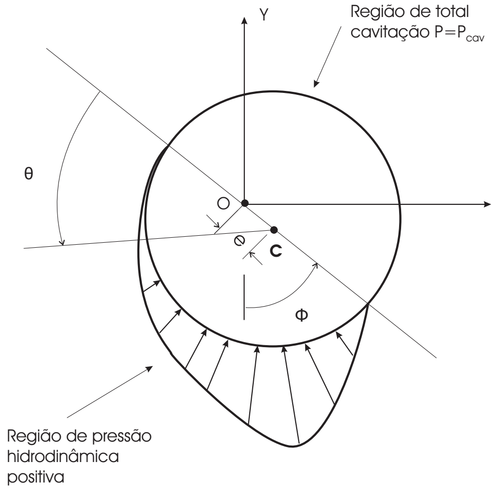

Figura 3.10: Distribuição de pressão no mancal radial

3.4.1 Forças agindo sobre o munhão

As forças calculadas no sistema de coordenadas móvel R são denotadas por força radial F_r, direção da mínima espessura de filme, e força tangencial F_t a 90^o de F_r. Também podem ser calculadas no sistema fixo, denotadas por F_x e F_y conforme ilustradas na figura 3.11.

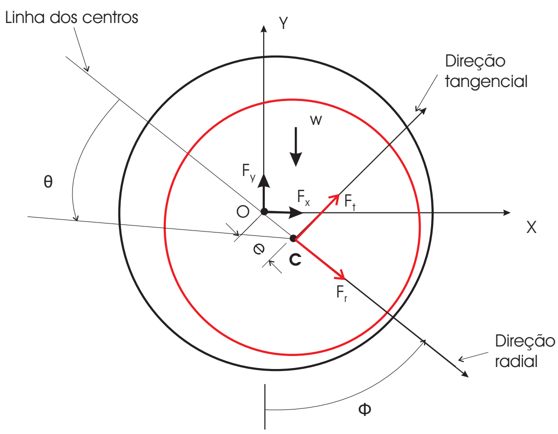

Figura 3.11: Forças sobre o eixo

As forças hidrodinâmicas sobre o munhão são dadas por

$$F_r = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p \cos\theta dz R d\theta \qquad (3\text{-}32)$$

$$F_t = \int_0^{\pi} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p \operatorname{sen}\theta dz R d\theta \tag{3-33}$$

Substituindo 3-29 em 3-32 e 3-33, obtém-se

$$F_r = \tfrac{3\mu R}{f^2} \int_{\frac{-B}{2}}^{\frac{B}{2}} (z^2 - \tfrac{B^2}{4}) dz \left[2\dot{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right] \tag{3-34}$$

$$F_t = \tfrac{\mu R}{2f^2} \int_{\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (z^2 - \tfrac{B^2}{4}) dz \left[2\dot{\varepsilon} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} + \varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega) \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right] \tag{3-35}$$

As integrais em θ foram calculadas por Sommerfeld [25] e valem

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)} d\theta &= -\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \\ \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} &= \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \\ \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} &= \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{3-36}$$

Substituindo 3-36 em 3-34 e 3-35 e simplificando, obtém-se

$$F_r = -\frac{\mu R B^3}{2f^2} \left[\frac{\pi\dot{\varepsilon}(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{2\varepsilon^2(2\dot{\phi} - \Omega)}{(1-\varepsilon^2)^2} \right] \tag{3-37}$$

$$F_t = \frac{\mu R B^3}{2f^2} \left[\frac{4\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\pi\varepsilon(2\dot{\phi} - \Omega)}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \right] \tag{3-38}$$

Se considerarmos somente cargas estáticas, temos $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$ e as forças sobre o mancal serão

$$F_r = -\frac{\mu\Omega R B^3}{f^2} \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \tag{3-39}$$

onde o sinal negativo indica que a força está na direção da máxima espessura do filme.

e

$$F_t = \frac{\mu \Omega R B^3}{f^2} \frac{\pi \varepsilon}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \tag{3-40}$$

onde o sinal positivo indica que a força está na mesma direção da rotação do eixo e é a força desestabilizadora do mancal.

As forças F_r e F_t podem ser relacionadas com as forças externas aplicadas, como o peso, força de engrenamento, no caso de multiplicadores ou redutores de velocidade, ou empuxo radial do vapor no caso de turbinas.

Relembrando que nesta análise o sistema mecânico está em equilíbrio, consideremos a carga externa w aplicada na direção vertical para baixo. Observando a figura 3.11, temos que

$$F_r = w \cos\phi \,, \qquad F_t = w \operatorname{sen}\phi \tag{3-41}$$

Substituindo 3-39 e 3-40 em 3-41 e resolvendo para w e ϕ, obtém-se

$$w = \frac{\mu \Omega R B^3}{4f^2} \frac{\pi \varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2} \tag{3-42}$$

$$\tan\phi = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \tag{3-43}$$

Sob condição de carga estática, o eixo opera no ponto do espaço dado pela excentricidade e e ângulo de atitude ϕ. Isto significa que, se a carga externa não variar com o tempo, a posição do eixo também não mudará. Em uma máquina real, sempre haverá variações da carga externa, ou efeitos internos como o desbalanceamento. Usualmente estas cargas são pequenas comparadas com a carga estática, de modo que o eixo move-se em uma pequena órbita em torno da posição de equilíbrio.

Se rearrumarmos 3-42 na forma

$$\frac{\mu \Omega R B}{w(f/R)^2} = \left(\frac{R}{B}\right)^2 \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi \varepsilon \sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}} \tag{3-44}$$

teremos no lado esquerdo o parâmetro adimensional conhecido como Número de Sommerfeld S, que reúne as características geométricas e operacionais do mancal. A figura 3.12 ilustra a curva do Número de Sommerfeld para o mancal que será objeto de análise deste trabalho, destacando o ponto de trabalho para uma rotação de 4.100 rpm.

O ângulo de atitude ϕ também pode ser traçado como função da razão de excentricidade ε. Pode ser mostrado que a posição de equilíbrio do munhão segue um semicírculo conforme mostra a figura 3.13. Assim, quando a velocidade é zero, o centro do munhão está no fundo, a razão de

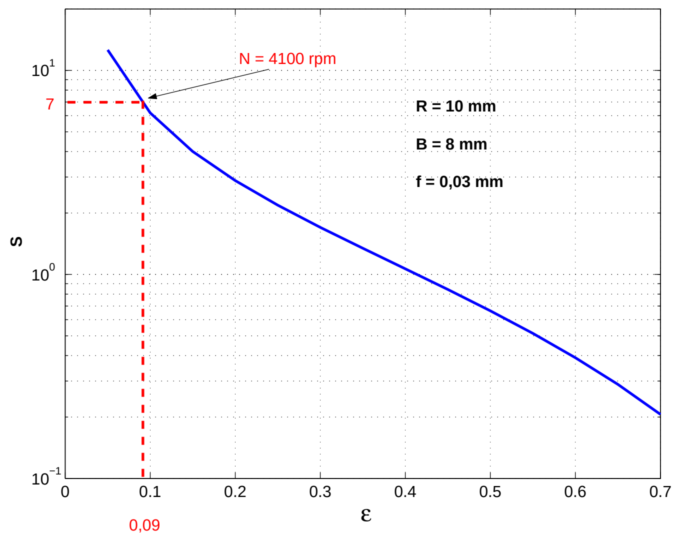

Figura 3.12: Número de Sommerfeld

excentricidade será $\varepsilon = 1$ e o ângulo de atitude $\phi = 0$. À medida que se aumenta a velocidade tendendo a infinito, o centro desloca-se aproximando-se do centro do mancal, onde $\varepsilon = 0$ e $\phi = 90^o$.

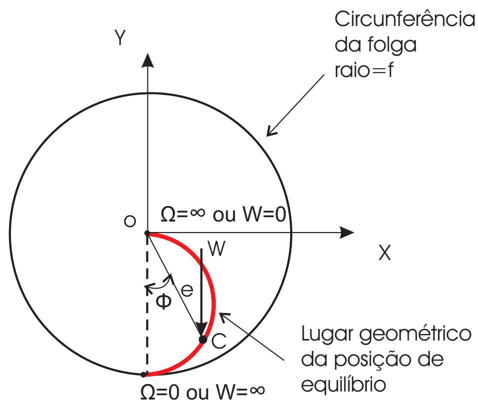

Figura 3.13: Lugar geométrico da posição de equilíbrio do munhão

3.4.2
Rigidez e amortecimento dos mancais radiais

Estabelecendo uma posição de equilíbrio em uma dada condição operacional, o filme de lubrificante ilustrado na figura 3.2 comporta-se como um sistema massa-mola-amortecedor de rigidez k e amortecimento c, ilustrado pela figura 3.14. Se aplicarmos uma pequena perturbação Δy na sapata móvel, por exemplo, a força de reação F_y sobre ela aumentará de ΔF_y. Análise análoga pode ser feita com uma pequena perturbação $\Delta \dot{y}$ na velocidade $\dot{y}$.

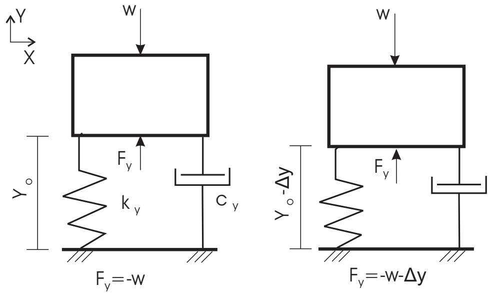

Figura 3.14: Modelo massa-mola para o filme fluido

A figura 3.15 ilustra o gráfico da variação da força de reação que será aplicada através do fluido à sapata fixa. Assim, Os coeficientes k_y e c_y são definidos como

$$k_y = -\frac{\Delta F_y}{\Delta y} \; ; \qquad c_y = -\frac{\Delta F_y}{\Delta \dot{y}} \tag{3-45}$$

podendo, também, ser escritos na forma derivativa, uma vez que correspondem à inclinação da curva

$$k_y = -\frac{\partial F}{\partial y} \; ; \qquad c_y = -\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$$

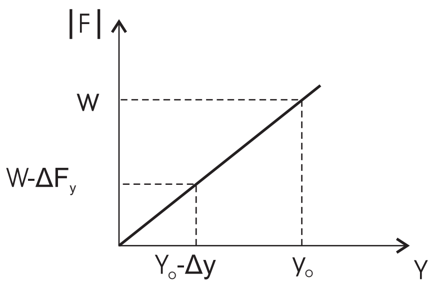

Figura 3.15: Variação da força de reação com o deslocamento

Então, a força total de reação F do fluido sobre a sapata móvel será

$$F = -w - k_{yy}\Delta y - c_{yy}\Delta \dot{y}$$

Em um mancal radial o problema é mais complexo porque o munhão tem uma posição no espaço dada pelas componentes x_c e y_c, bem como pode possuir as componentes de velocidade $\dot{x}_c$ e $\dot{y}_c$. As forças do fluido agindo sobre o munhão terão componentes horizontal F_x e vertical F_y. Se o munhão for deslocado de sua posição de equilíbrio de uma pequena distância horizontal Δx_c para a direita, como mostrado na figura 3.16, duas mudanças ocorrem:

ΔF_x - Mudança na força horizontal devido ao deslocamento horizontal Δx_c
ΔF_y - Mudança na força vertical devido ao deslocamento horizontal Δx_c

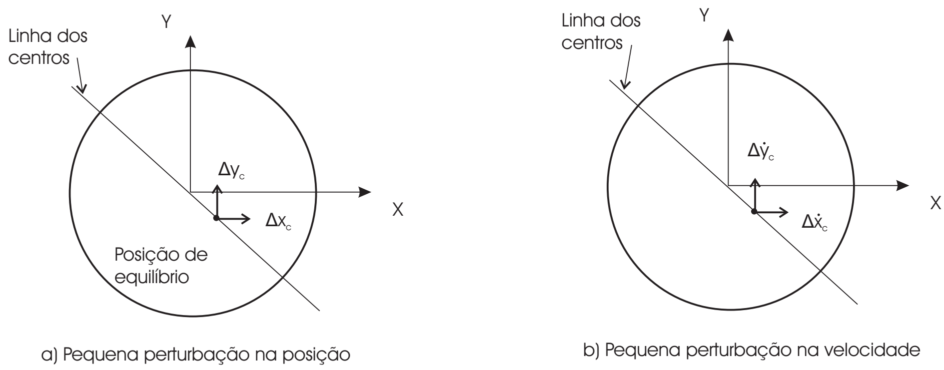

Figura 3.16: Perturbações em torno da posição de equilíbrio

Os dois coeficientes de rigidez correspondentes a essas mudanças são

$$k_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial x_c} \; ; \qquad k_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{3-46}$$

Se o munhão for deslocado de sua posição de equilíbrio de uma pequena distância vertical Δy_c para cima, duas mudanças ocorrem:
ΔF_x - Mudança na força horizontal devido ao deslocamento vertical Δy_c
ΔF_x - Mudança na força vertical devido ao deslocamento vertical Δy_c

Os dois coeficientes de rigidez correspondentes a essas mudanças são

$$k_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial y_c} \; ; \qquad k_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial y_c} \tag{3-47}$$

Os coeficientes de rigidez são conhecidos como principais ou cruzados. Assim, o termo k_{xx}, principal, corresponde à força na direção horizontal produzida por um pequeno deslocamento na direção horizontal. O termo k_{yx}, cruzado, corresponde à força na direção vertical produzida por um pequeno deslocamento na direção horizontal.

Da mesma forma definem-se os coeficientes de amortecimento:
ΔF_x - Mudança na força horizontal devido à pequena velocidade horizontal $\Delta \dot{x}_c$
ΔF_x - Mudança na força vertical devido à pequena velocidade horizontal $\Delta \dot{x}_c$

Os dois coeficientes de amortecimento correspondentes a essas mudanças são

$$c_{xx} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}_c} \; ; \qquad c_{yx} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \tag{3-48}$$

ΔF_x - Mudança na força horizontal devido à pequena velocidade vertical $\Delta \dot{y}_c$

ΔF_y - Mudança na força vertical devido à pequena velocidade vertical $\Delta \dot{y}_c$

Os respectivos coeficientes são

$$c_{xy} = -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}_c} \; ; \qquad c_{yy} = -\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \tag{3-49}$$

A fim de calcular estes coeficientes, será aplicada uma pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio $(\phi_o, f\varepsilon)$, conforme ilustrado na figura 3.17, onde e_r e e_t são os vetores unitários nas direções radial e tangencial, repectivamente.

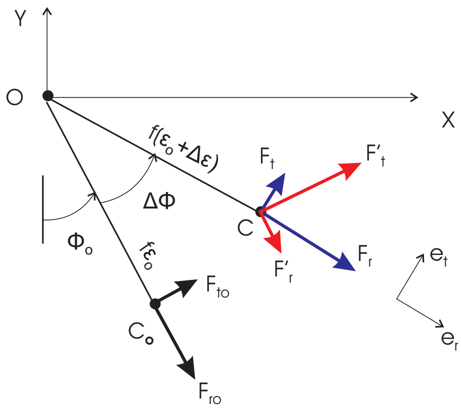

Figura 3.17: Pequena perturbação em torno da posição de equilíbrio

Para pequenas vibrações $(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}, \dot{\phi})$ em torno da posição de equilíbrio estático (ε_o, ϕ_o), a força $F = F_r\mathbf{e_r} + F_t\mathbf{e_t}$ sobre o munhão pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ro} \\ F_{to} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\phi} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\varepsilon \\ f\varepsilon\Delta\phi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\Delta\dot{\phi} \end{Bmatrix} \tag{3-50}$$

Da figura 3.17, tem-se a seguinte transformação

$$\begin{Bmatrix} F_r{}' \\ F_t{}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\phi & -\operatorname{sen}\Delta\phi \\ \operatorname{sen}\Delta\phi & \cos\Delta\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} \tag{3-51}$$

onde $F_r{}'$ é a componente da força do fluido F na mesma direção da componente F_{ro} na posição de equilíbrio, e F_{to} é a componente de F na mesma direção da componente F_{to}.

Para uma pequena perturbação $\Delta\phi << 1$, $\cos\Delta\phi = 1$ e $\operatorname{sen}\Delta\phi = \Delta\phi$.

Usando estas aproximações, 3-51 pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} F_r{}' \\ F_t{}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} + \Delta\phi \begin{Bmatrix} -F_t \\ F_r \end{Bmatrix} \tag{3-52}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r{}' \\ F_t{}' \end{Bmatrix} - f\varepsilon\Delta\phi \begin{Bmatrix} -F_t/f\varepsilon \\ F_r/f\varepsilon \end{Bmatrix} \tag{3-53}$$

Substituindo 3-53 em 3-50 e rearranjando, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} F_r{}' - F_{ro} \\ F_t{}' - F_{to} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\phi} - \frac{F_t}{f\varepsilon} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\varepsilon} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\phi} + \frac{F_r}{f\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\varepsilon \\ f\varepsilon\Delta\phi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \\ \frac{\partial F_t}{f\partial\dot{\varepsilon}} & \frac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f\Delta\dot{\varepsilon} \\ f\varepsilon\Delta\dot{\phi} \end{Bmatrix} \tag{3-54}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} k_{rr} & k_{rt} \\ k_{tr} & k_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F_r}{f\partial\varepsilon} & -\dfrac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\phi} + \dfrac{F_t}{f\varepsilon} \\ \\ -\dfrac{\partial F_t}{f\partial\varepsilon} & -\dfrac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\phi} - \dfrac{F_r}{f\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{3-55}$$

$$\begin{bmatrix} c_{rr} & c_{rt} \\ c_{tr} & c_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F_r}{f\partial\dot{\varepsilon}} & -\dfrac{\partial F_r}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \\ \\ -\dfrac{\partial F_t}{f\partial\dot{\varepsilon}} & -\dfrac{\partial F_t}{f\varepsilon\partial\dot{\phi}} \end{bmatrix} \tag{3-56}$$

Substituindo 3-37 e 3-38 em 3-55 e 3-56, e avaliando as derivadas na condição de equilíbrio $\dot{\varepsilon} = \dot{\phi} = 0$ encontram-se as matrizes de rigidez e amortecimento em coordenadas polares

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{2\Omega\mu RB^3\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{f^3(1-\varepsilon^2)^3} & \dfrac{\pi\Omega\mu RB^3}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \\ \\ -\dfrac{\pi\Omega\mu RB^3(1+2\varepsilon^2)}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}} & \dfrac{\pi\Omega\mu RB^3}{4f^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \tag{3-57}$$

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi\mu RB^3(1+2\varepsilon^2)}{2f^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}} & -\dfrac{2\varepsilon\mu RB^3}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} \\ \\ -\dfrac{2\varepsilon\mu RB^3}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} & \dfrac{\mu RB^3\varepsilon}{f^3(1-\varepsilon^2)^2} \end{bmatrix} \tag{3-58}$$

Fazendo $\bar{k}_{ij} = \frac{f^3}{\mu\Omega RB^3}\, k$ e $\bar{c}_{ij} = \frac{f^3}{\mu RB^3}\, c\ (i,j = r\,,t)$ os coeficientes linearizados são adimensionalizados.

Estes coeficientes em coordenadas cartesianas são calculados com auxílio das transformações

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{xx} & \bar{k}_{xy} \\ \bar{k}_{yx} & \bar{k}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o & \cos\phi_o \\ -\cos\phi_o & \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{rr} & \bar{k}_{rt} \\ \bar{k}_{tr} & \bar{k}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o & -\cos\phi_o \\ \cos\phi_o & \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{xx} & \bar{c}_{xy} \\ \bar{c}_{yx} & \bar{c}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o & \cos\phi_o \\ -\cos\phi_o & \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_{rr} & \bar{c}_{rt} \\ \bar{c}_{tr} & \bar{c}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi_o & -\cos\phi_o \\ \cos\phi_o & \operatorname{sen}\phi_o \end{bmatrix} \tag{3-59}$$

onde ϕ_o é dado por 3-43

Substituindo 3-57 e 3-58 em 3-59, tem-se

$$\bar{k}_{xx} = Q^2\varepsilon \left[\frac{2\pi^2 + (16-\pi^2)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right]$$

$$\bar{k}_{xy} = \pi Q^2 \left[\frac{\pi^2 - \varepsilon^2(\pi^2 + 16\varepsilon^2)}{4(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\right]$$

$$\bar{k}_{yx} = -\pi Q^2 \left[\frac{(32 - 2\pi^2\pi^2)\varepsilon^4 + (32+\pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2}{4(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\right]$$

$$\bar{k}_{yy} = Q^2\varepsilon \left[\frac{\pi^2 + (32+\pi^2)\varepsilon^2 + (32 - 2\pi^2)\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^3}\right] \tag{3-60}$$

$$\bar{c}_{xx} = \pi Q^2 \left[\frac{\pi + (2\pi - 4)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\right]$$

$$\bar{c}_{xy} = -2Q^2\varepsilon \left[\frac{\pi + (2\pi^2 - 16)\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right]$$

$$\bar{c}_{yx} = \bar{c}_{xy}$$

$$\bar{c}_{yy} = \frac{\pi[48Q^2\varepsilon^4 + \pi(1-\varepsilon^2)]}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

onde $Q(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2(1-\varepsilon^2)+16\varepsilon^2)}}$

A figura 3.18 ilustra o gráfico destes coeficientes em função do Número de Sommerfeld.

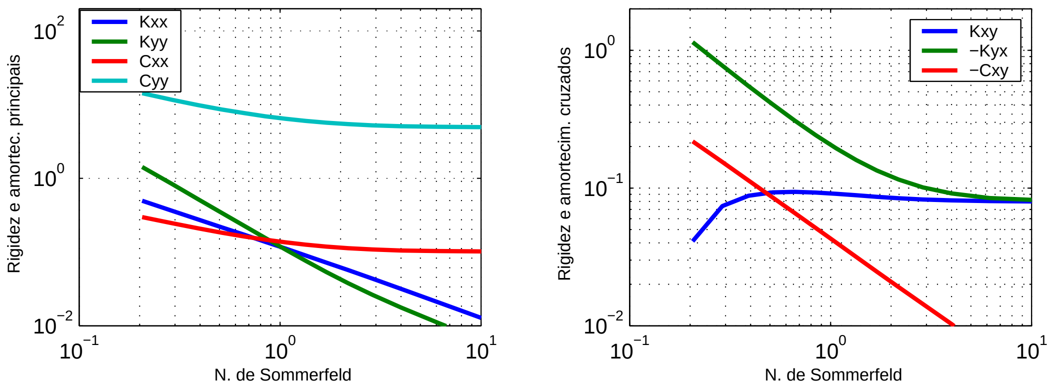

Figura 3.18: Rigidez e amortecimento adimensionalizados

3.5 Rotor montado em mancais hidrodinâmicos

A vantagem de um mancal hidrodinâmico do ponto de vista rotodinâmico é seu alto amortecimento relativo. Além disso, a rigidez do filme de óleo tem uma forte influência sobre as velocidades críticas e, consequentemente, estes parâmetros podem ser usados para aumentar ou reduzir a velocidade crítica para um dado rotor. Como a rigidez e amortecimento de um mancal são altamente sensíveis à folga do mancal, este parâmetro é um dos mais importantes para controlar a dinâmica do rotor.

Nesta seção analisaremos a estabilidade do sistema rotor-mancal com parâmetros concentrados, considerando dois casos: rotor rígido e flexível.

3.5.1 Rotor rígido

Consideremos o rotor rígido montado em mancais hidrodinâmicos conforme ilustrado na figura 3.19. A carga por mancal será w.

O mancal é modelado na literatura como mostrado na figura 3.20.

Do diagrama de corpo livre do disco nas direções X e Y, tem-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x &= F_x \\ m\ddot{r}_y &= F_y - w \end{aligned} \tag{3-61}$$

onde r_x e r_y são as coordenadas do centro de massa C do disco dadas por

$$r_x = r_{xo} + x \; ; \qquad r_y = r_{yo} + y \tag{3-62}$$

e x e y são pequenas oscilações do munhão e do disco em torno da posição de equilíbrio r_{xo} e r_{yo}, respectivamente.

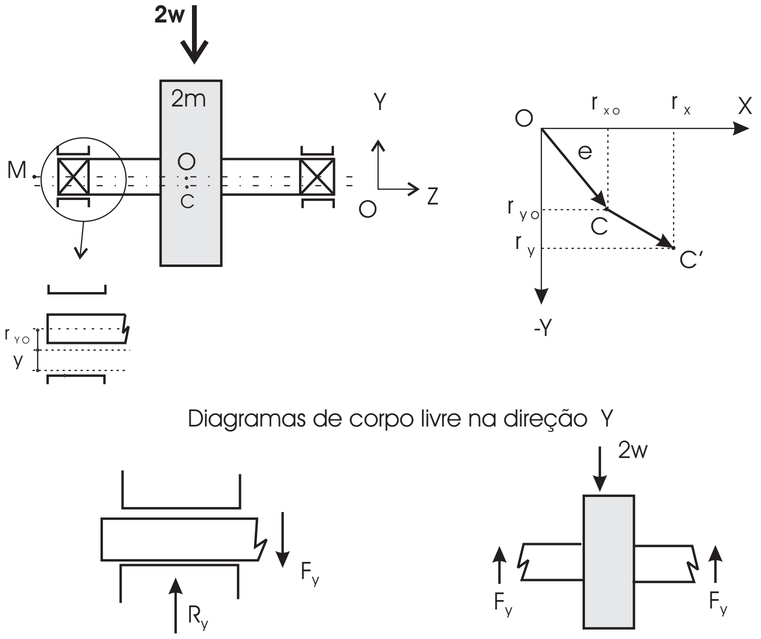

Figura 3.19: Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos

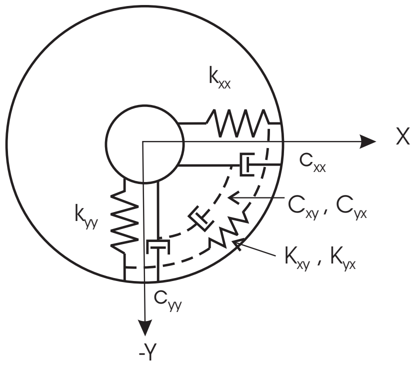

Figura 3.20: Rotor rígido em mancais hidrodinâmicos

Do diagrama de corpo livre do mancal nas direções X e Y tem-se

$$\begin{aligned} F_x = R_x = k_{xx}x + k_{xy}y + c_{xx}\dot{x} + c_{xy}\dot{y} \\ F_y = R_y = k_{yy}y + k_{yx}x + c_{yy}\dot{y} + c_{yx}\dot{x} \end{aligned} \tag{3-63}$$

Substituindo 3-62 e 3-63 em 3-61 tem-se as equações que descrevem o movimento livre nas direções horizontal e vertical na forma matricial

$$m\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{xx} & c_{xy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \end{Bmatrix} \tag{3-64}$$

Uma solução para a equação 3-64 pode ser encontrada nas formas

$$x = x_o e^{\lambda t}\ ; \qquad y = y_o e^{\lambda t} \tag{3-65}$$

Substituindo 3-65 em 3-64, chega-se ao polinômio característico de quarto grau, cujas raízes serão da forma $\lambda = \sigma + i\omega$, onde
σ - parte real ou fator de crescimento ou decrescimento exponencial
ω - parte imaginária, correspondente à frequência natural

A vibração do rotor rígido terá então, a forma

$$x = x_o e^{(\sigma+i\omega)t} \qquad y = y_o e^{(\sigma+i\omega)t} \tag{3-66}$$

O termo exponencial σ representa crescimento da vibração, se $\sigma > 0$, ou decaimento, se $\sigma < 0$.

Nosso particular interesse aqui é determinar o limite de estabilidade, ou seja, a velocidade para a qual $\sigma = 0$. À medida que se aumenta a velocidade, o efeito cruzado dos coeficientes de rigidez e amortecimento tornar-se-ão maiores e, pelo menos duas das raízes complexas conjugadas com fator de crescimento $\sigma < 0$ passarão a ter parte real $\sigma = 0$. Esta velocidade corresponderá à velocidade limite de estabilidade Ω_l. Se prosseguirmos com o aumento de velocidade, σ será positivo, configurando-se, então, uma situação de instabilidade.

Uma estratégia para se encontrar o mapa de estabilidade de um mancal é introduzir na equação 3-64 o termo da velocidade Ω. Para tanto, basta substituir as matrizes K e C por suas correspondentes adimensionalizadas. Assim, temos

$$C = \frac{w}{f\Omega}\, C'; \qquad K = \frac{w}{f}\, K' \tag{3-67}$$

A equação 3-64 fica, então

$$\frac{f}{g}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{Bmatrix} + \frac{1}{\Omega}\begin{bmatrix} c'_{xx} & c'_{xy} \\ c'_{xx} & c'_{xy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k'_{xx} & k'_{xy} \\ k'_{yx} & k'_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3-68}$$

Substituindo 3-65 em 3-68 e fazendo $\alpha = f/g$, encontramos o polinômio característico 3-69

$$\alpha^2\lambda^4 + \frac{\alpha A_4}{\Omega}\lambda^3 + \left(\alpha A_3 + \frac{A_2}{\Omega^2}\right)\lambda^2 + \frac{A_1}{\Omega}\lambda + A_o = 0 \tag{3-69}$$

onde

$$\begin{aligned} A_o &= k'_{xx}k'_{yy} - k'_{xy}k'_{yx} \\ A_1 &= c'_{xx}k'_{yy} + k'_{xx}c'_{yy} - (c'_{yx}k'_{xy} + c'_{xy}k'_{yx}) \\ A_2 &= c'_{yy}c'_{xx} - c'_{xy}c'_{yx} \\ A_3 &= k'_{xx} + k'_{yy} \\ A_4 &= c'_{xx} + c'_{yy} \end{aligned} \tag{3-70}$$

Fazendo $\lambda = i\omega_l$ e $\Omega = \Omega_l$ em 3-69, temos

$$\alpha^2\omega_l^4 - \left(\alpha A_3 + \frac{A_2}{\Omega_l^2}\right)\omega_l^2 + A_o + \left(\frac{A_1\omega_l - \alpha A_3\omega_l^3}{\Omega_l}\right) i = 0 \tag{3-71}$$

De 3-71 temos

$$\omega_l = \sqrt{\frac{A_1}{\alpha A_4}} \tag{3-72}$$

e

$$\Omega_l = \sqrt{\frac{A_1A_2A_4}{\alpha(A_1^2 - A_1A_3A_4 + A_oA_4^2)}} \tag{3-73}$$

onde Ω_l e ω_l são a velocidade limite de estabilidade e a frequência natural nesta velocidade, respectivamente.

Assim, de posse de 3-70 e 3-73 pode-se plotar o mapa de estabilidade como função do Número de Sommerfeld para o mancal objeto deste trabalho . Através deste mapa, pode-se determinar se o mancal é estável ou não para qualquer combinação de carga e velocidade, expressa pelo Número de Sommerfeld. Assim, conforme ilustrado na figura 3.21, se levantarmos uma linha vertical em $S = 7$, a interseção com a curva dá-se em $\bar{\Omega} = 3.9$, que corresponde à velocidade limite de 21.296 rpm para uma folga $f = 0,03\ mm$ e 18.443 rpm, para $f = 0,04\ mm$.Vale ressaltar que, caminhar na linha $S = 7$ de baixo para cima equivale a aumentar a carga do mancal, uma vez que estamos aumentando a velocidade mantendo S constante. Pode-se concluir do mapa que o aumento da folga tende a desestabilizar o mancal.

3.5.2
Rotor flexível

Consideremos o rotor de Jeffcott com um disco de massa $2m$ suportado por mancais hidrodinâmicos idênticos ilustrado na figura 3.22. Como o eixo é horizontal, os mancais suportam o peso $2w$ do rotor que determinará a posição estática de operação (x_M, y_M) a uma dada a velocidade Ω.

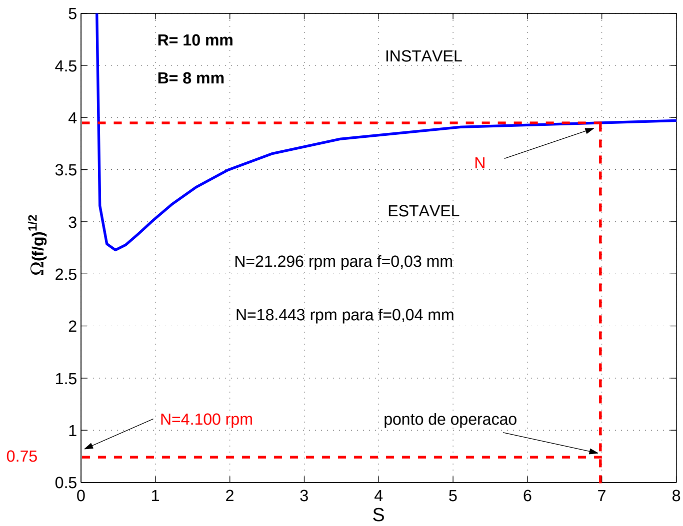

Figura 3.21: Mapa de estabilidade em função do Número de Sommerfeld

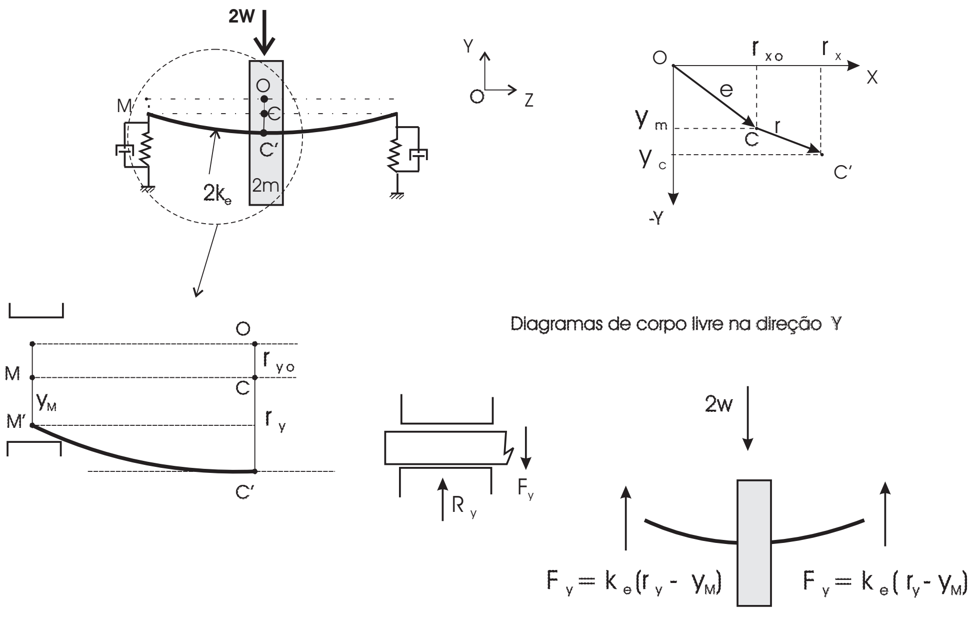

Figura 3.22: Rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico

Do diagrama de corpo livre do disco nas direções X e Y, tem-se

$$\begin{cases} m\ddot{r}_x = -k_e(r_x - x_M) \\ m\ddot{r}_y = -k_e(r_y - y_M) - w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{k_e}\ddot{r}_x + r_x - x_M = 0 \\ \frac{m}{k_e}\ddot{r}_y + r_y - y_M = -w \end{cases} \qquad (3\text{-}74)$$

que, na forma matricial e fazendo $p = m/k_e$, fica

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}75)$$

Do diagrama de corpo livre dos mancais, tem-se

$$\begin{aligned} F_x = R_x = k_{xx}x_M + k_{xy}y_M + c_{xx}\dot{x}_M + c_{xy}\dot{y}_M = k_e(r_x - x_M) \\ F_y = R_y = k_{yy}y_M + k_{yx}x_M + c_{yy}\dot{y}_M + c_{yx}\dot{x}_M = k_e(r_y - y_M) \end{aligned} \tag{3-76}$$

$$\begin{aligned} c_{xx}\dot{x}_M + c_{xy}\dot{y}_M + (k_{xx} + k_e)x_M + k_{xy}y_M - k_e r_x = 0 \\ c_{yy}\dot{y}_M + c_{yx}\dot{x}_M + k_{yx}x_M + (k_{yy} + k_e)y_M - k_e r_y = 0 \end{aligned} \tag{3-77}$$

Dividindo 3-77 por k_e e escrevendo na forma matricial, fica

$$\frac{1}{k_e}\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_{xx}}{k_e}+1 & \frac{k_{xy}}{k_e} \\ \frac{k_{yx}}{k_e} & \frac{k_{yy}}{k_e}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3-78}$$

Fazendo $K = \frac{mg}{f}K'$, $C = \frac{mg}{f\Omega}C'$ e $\delta = \frac{mg}{fk_e}$, obtém-se

$$\frac{\delta}{\Omega}\begin{bmatrix} c'_{xx} & c'_{xy} \\ c'_{yx} & c'_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta k'_{xx}+1 & \delta k'_{xy} \\ \delta k'_{yx} & \delta k'_{yy}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3-79}$$

As equações 3-75 e 3-79 podem ser reunidas na equação matricial

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{x}_M \\ \ddot{y}_M \end{Bmatrix} + \frac{\delta}{\Omega}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_{xx} & c'_{xy} \\ 0 & 0 & c'_{yx} & c'_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{Bmatrix} + \\ &+\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \delta k'_{xx}+1 & \delta k'_{xy} \\ 0 & -1 & \delta k'_{yx} & \delta k'_{yy}+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ x_M \\ y_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{3-80}$$

O polinômio característico da equação 3-80 é

$$\begin{aligned} &p^2\Omega^2 A_2 \lambda^{\,6} + p^2\frac{A_1 + \delta A_4}{\Omega}\,\lambda^{\,5} + p\left[p(A_o + \delta A_3 + \delta^2) + \frac{2A_2}{\Omega^2}\right]\lambda^{\,4} \\ &+p\frac{2A_1 + \delta A_4}{\Omega}\,\lambda^{\,3} + \left[p(2A_o + \delta A_3) + \frac{A_2}{\Omega^2}\right]\lambda^{\,2} + \frac{A_1}{\Omega}\,\lambda + A_o = 0 \end{aligned} \tag{3-81}$$

Para determinar a velocidade limite Ω_l de estabilidade, basta fazer $\lambda = i\,\omega_l$ em 3-81 para encontrar

$$\omega_l = \frac{A_1}{p(A_1 + \delta A_4)} \tag{3-82}$$

$$\Omega_l = A_4 \sqrt{\frac{\omega_l A_2}{A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_o A_4^2}} \tag{3-83}$$

A partir de 3-82 e 3-83 pode-se analisar a influência da flexibilidade do eixo no limite de estabilidade. Quanto menor a flexibilidade do eixo k_e, maior torna-se p, o que diminui ω_l em 3-82. Consequentemente, Ω_l em 3-83 diminui, donde se conclui que quanto mais flexível o eixo, mais propenso à instabilidade será o rotor. Este fato pode ser observado se compararmos o mapa de estabilidade para o rotor rígido na figura 3.21 com o gráfico na figura 3.23 referente ao mapa de estabilidade para o rotor flexível. A curva possui a mesma forma, mas é mais baixa.

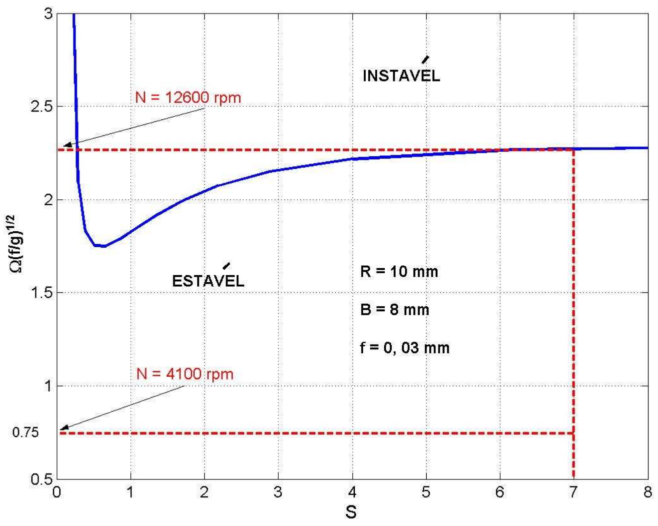

Figura 3.23: Mapa de estabilidade do rotor de Jeffcott em mancal hidrodinâmico

3.6 "Oil Whirl" e "oil whip"

A instabilidade em mancais hidrodinâmicos é conhecida na literatura como "***oil whirl***" e "***oil whip***" cujos conceitos têm sido objeto de confusão. Bently [5] descreveu a diferença entre os dois conceitos.

A figura 3.24 mostra o espectro em cascata de vibração de um rotor experimental durante a partida. Quando a velocidade atinge a velocidade limite de estabilidade ("***threshold speed***"), 2470 rpm, o rotor entra na zona de instabilidade e apresenta uma vibração subsíncrona proporcional à sua velocidade, descrevendo uma órbita de sentido direto. Em torno

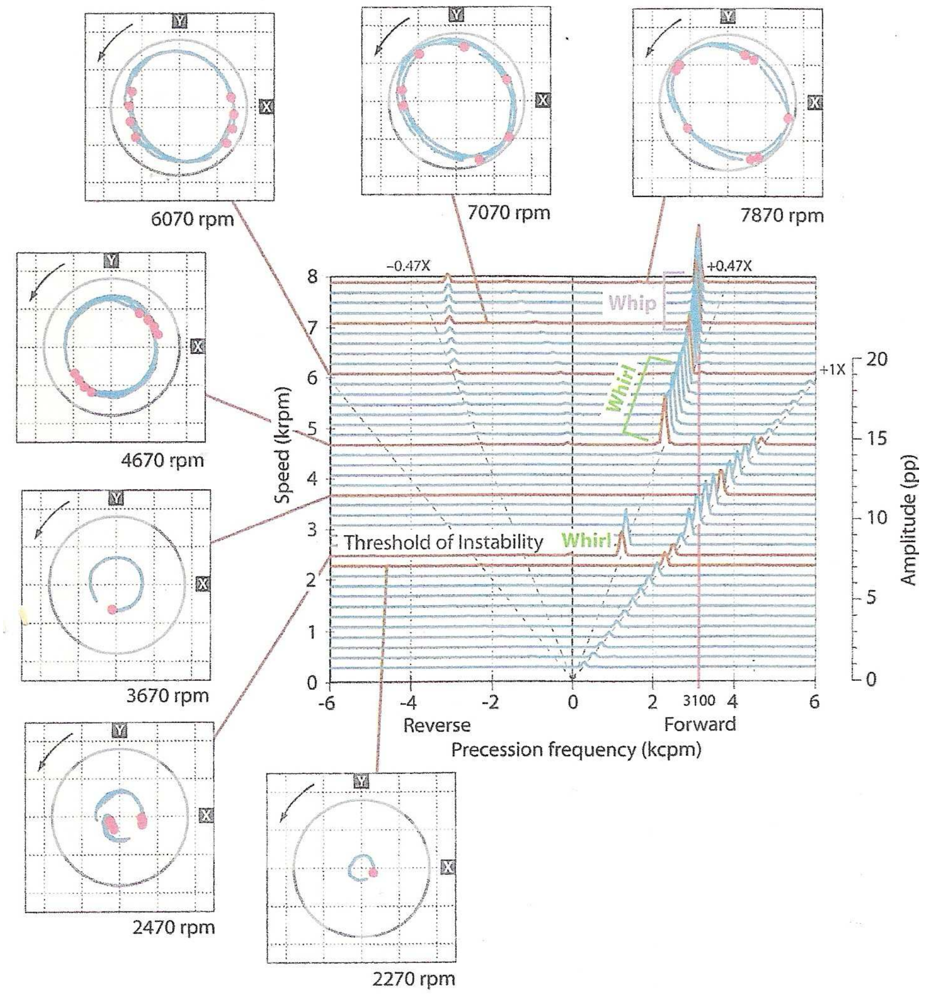

Figura 3.24: Espectro em cascata de vibração de um rotor experimental

da velocidade crítica, 2.900 rpm, a instabilidade desaparece devido à alta amplitude de vibração, mas reaparece em 4670 rpm quando a amplitude da vibração diminui. A frequência subsíncrona continua a seguir a velocidade do rotor e então ocorre a transição para uma frequência constante em torno de 3100 rpm. A instabilidade é chamada "***whirl***" quando a frequência é proporcional à velocidade do rotor, e "***whip***" quando se mantém constante numa frequência particular correspondente à ressonância.

No início do "***whirl***", o rotor começa a precessionar na frequência natural determinada pelas propriedades de rigidez definidas por uma baixa excentricidade, pois se existe uma instabilidade iminente, o centro do munhão está relativamente mais próximo do centro do mancal do que da parede. Até este ponto, a rigidez do mancal é bem inferior à do eixo, governando a dinâmica do sistema e a vibração será de eixo rígido.

Quando o rotor começa a entrar na zona de instabilidade, descreve uma espiral afastando-se do seu ponto estável de operação. O diâmetro da órbita, aproximadamente circular, aumenta. Se a rigidez mantivesse o seu valor constante conforme o modelo linear adotado, a órbita aumentaria indefidamente. Entretanto, a rigidez do mancal aumenta com o aumento da excentricidade. Consequentemente, a frequência natural e a velocidade limite aumentam. Assim, as não linearidades o sistema induzem ao ciclo limite. Isto acontece a 2470 rpm. A figura 3.25 ilustra a transição da órbita entre a velocidade limite e o ciclo limite visto da tela de um osciloscópio em experimentos realizados por Muszynska [15].

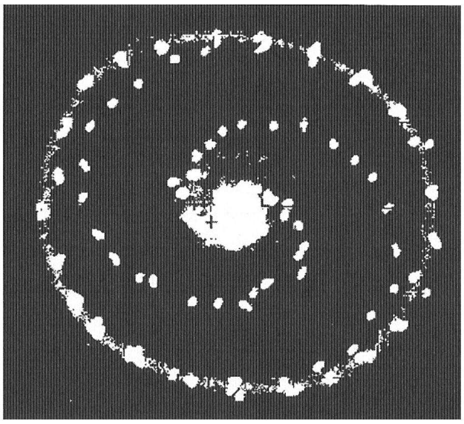

Figura 3.25: Ciclo limite da órbita do eixo

Continuando o aumento de velocidade, a excentricidade atinge seu limite quando o eixo se aproxima da superfície do mancal cuja rigidez supera à do eixo, governando a dinâmica do sistema. Nesta região, a frequência de precessão é constante e corresponde à frequência de ressonância, ditada basicamente pela elasticidade do eixo. Durante o "***whip***", a vibração está limitada à folga do mancal, mas o modo de flexão pode produzir vibrações de altas amplitudes entre os mancais, resultando em roçamentos e ciclos severos de tensão que podem ser muito destrutivos.

Como foi visto na seção 3.4, as propriedades de rigidez e amortecimento dos mancais dependem da carga estática que neles atuam. Assim, tal carga deve ser cuidadosamente considerada no projeto rotodinâmico.

O peso do rotor é a carga mais evidente e pode ser facilmente calculada. No entanto, quando se trata de caixas de engrenagem e turbinas a vapor, estas cargas não são tão óbvias e o seu cálculo não tão imediato.

No caso das caixas de engrenagem, o torque é transmitido de um eixo para o outro através de forças radiais e tangenciais agindo entre os dentes, cuja resultante será uma força radial suportada pelos mancais. Estas forças são diretamente proporcionais ao torque. À plena potência, o esforço radial será máximo, reduzindo a tendência à instabilidade. Em baixas potências, que ocorre principalmente durante o processo de partida da máquina, os esforços radiais são baixos, favorecendo a instabilidade.

Nas turbinas a vapor, a carga estática corresponde ao empuxo do vapor nas palhetas, transmitido radialmente aos mancais. À plena potência, este empuxo é máximo. Em baixas cargas a admissão é parcial, resultando num empuxo menor, além da mudança da direção da resultante, o que vai influenciar nas propriedades dos mancais.

Portanto, o projeto rotodinâmico deve levar em conta a carga estática em baixas potências.

Um exemplo prático de projeto de mancal que não considerou a operação do multiplicador de velocidade em baixa potênca ocorreu em um compressor da plataforma P-19 da Petrobras [3], após repontenciamento para aumento de capacidade. A relação de transmissão do multiplicador de velocidade foi aumentada de 1:1,39 para 1:1,54. Durante o processo de partida, a vibração atingiu 180 μm a 3.000 rpm, levando a máquina ao desarme, conforme mostrado na figura 3.26.

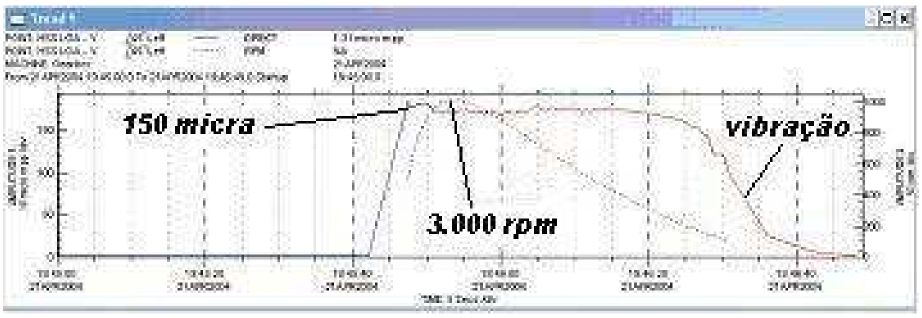

Figura 3.26: Gráfico da velocidade e vibração

O espectro em cascata de vibração mostrado na figura 3.27 evidencia um caso clássico de "***oil whirl***". Para permitir a partida da máquina foi necessário implementar um retardo no sistema de proteção por alta vibração e assim ficará até que sejam projetados mancais mais adequados.

3.7 Tipos de Mancais Radiais

Os mancais cilíndricos estão sujeitos a instabilidade quando em altas rotações ou baixas cargas. Como foi visto, o aumento da excentricidade ε tende a estabilizar o mancal. Diversos mancais foram desenvolvidos com o objetivo de resolver o problema com base nesta característica "precarregando" seus segmentos, tais como os multilobulares (elíptico, "***offset***", trilobular, etc.) e os de sapatas oscilantes, conforme ilustra a figura 3.28.

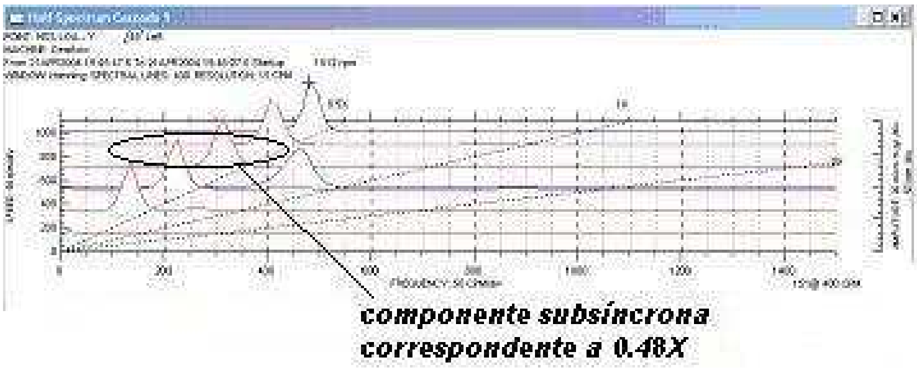

Figura 3.27: Espectro de vibração durante a partida

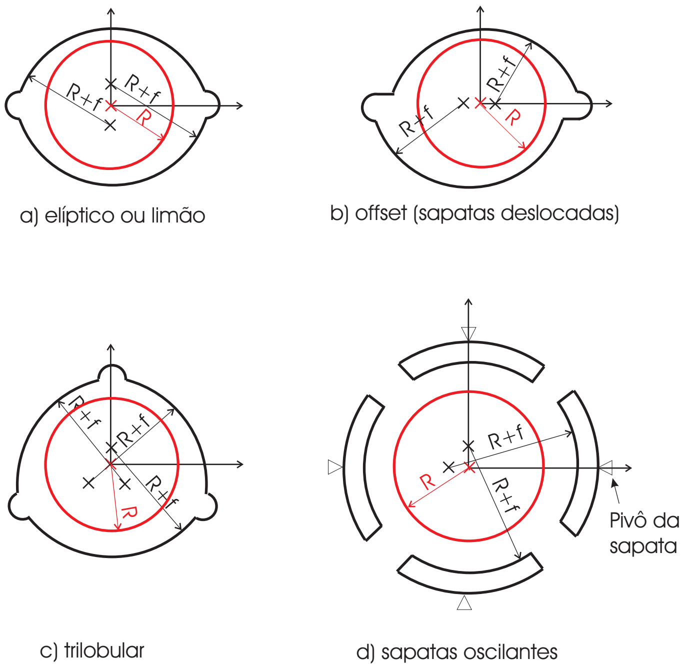

Figura 3.28: Tipos de mancal

São construídos de tal forma que os centros de curvatura de cada sapata não estão no mesmo ponto. Cada sapata é deslocada do centro do mancal de forma a tornar o filme lubrificante mais convergente ou divergente.

Um parâmetro importante para definir estes mancais é a precarga m, definida pela relação da distância do centro de curvatura da sapata e o centro do mancal e a folga do mancal. Para melhor compreensão do conceito, consideremos um munhão de raio R cujo centro coincida com o centro do mancal de raio. O maior eixo que pode ser colocado no mancal tem raio $R + f_b$, conforme ilustrado na figura 3.29, exemplificando precarga $m = 0$ e

$m = 1$. Então, a precarga será dada por

$$m = \frac{f - f_b}{f} \tag{3-84}$$

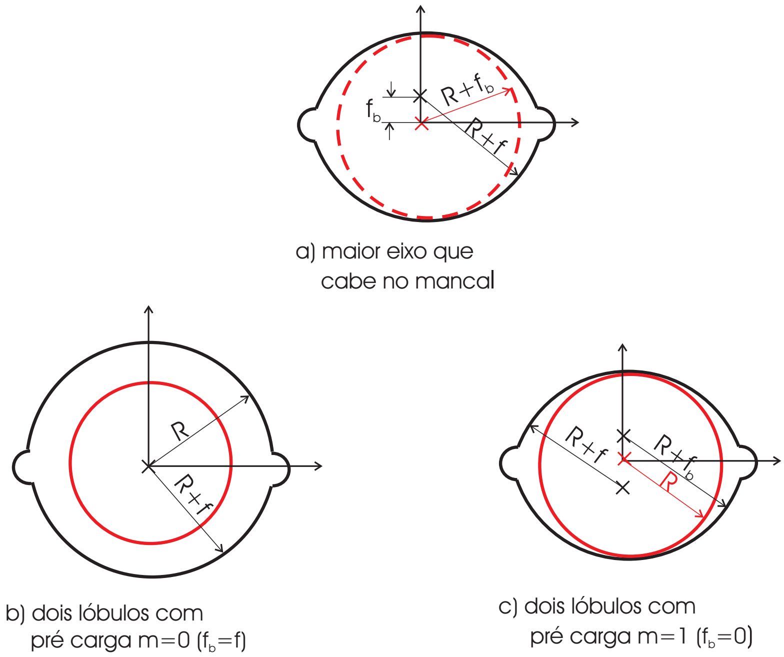

Figura 3.29: Conceito de precarga de um mancal

Os mancais de sapatas oscilantes ("***tilting pad***") são largamente empregados na indústria. Cada sapata é pivotada, de modo que não há nenhuma reação de momento. A sapata oscila de modo que seu centro de curvatura move-se de um ângulo δ para criar um filme fortemente convergente. O pivô é posicionado no centro da sapata ou ligeiramente deslocado no sentido da borda de fuga. A razão entre a distância d do pivô à borda de ataque e o comprimento da sapata L é conhecido como fator de "***offset***"(figura 3.30).

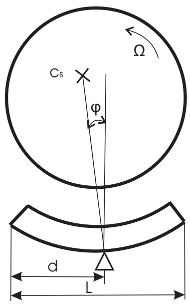

Figura 3.30: Oscilação da sapata e "offset" de um mancal

A precarga é dada pela equação 3-84 e ilustrada na figura 3.30, onde $f = R_s - R$.

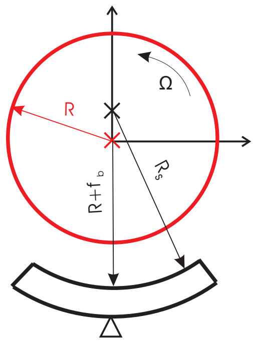

Figura 3.31: Precarga de um mancal de sapatas oscilantes

A figura 3.32 mostrada em Childs [7] compara o mapa de estabilidade de diversos tipos de mancal e pode-se notar que o tipo mais estável é o tipo "***pressure-dam***" ilustrado na figura 3.33.

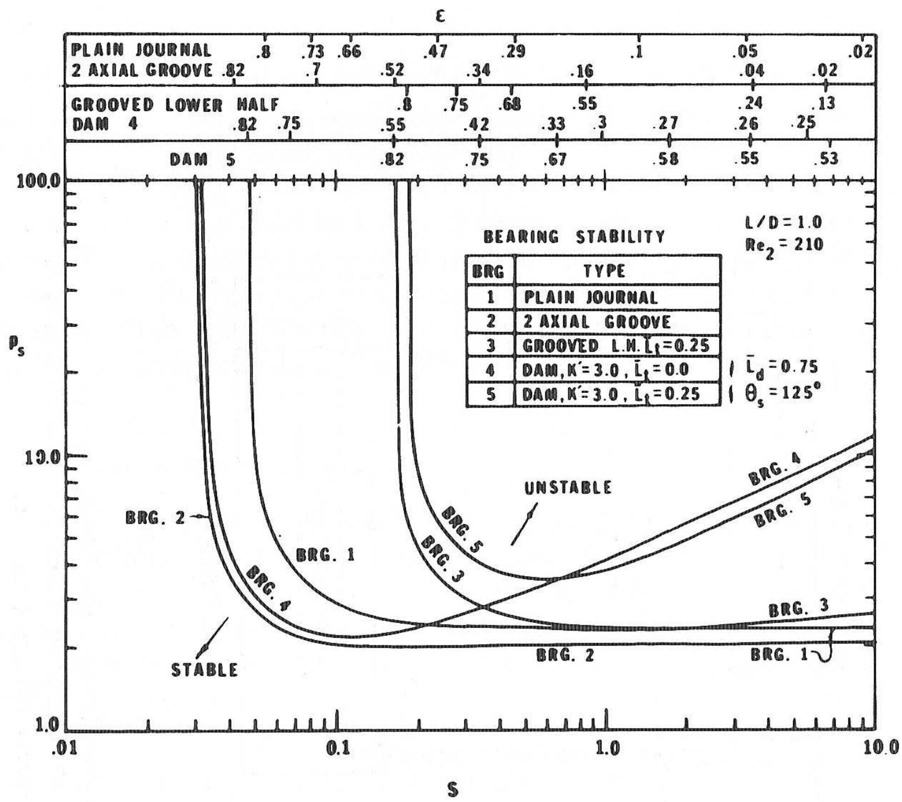

Figura 3.32: Mapa de estabilidade para diferentes projetos de mancal

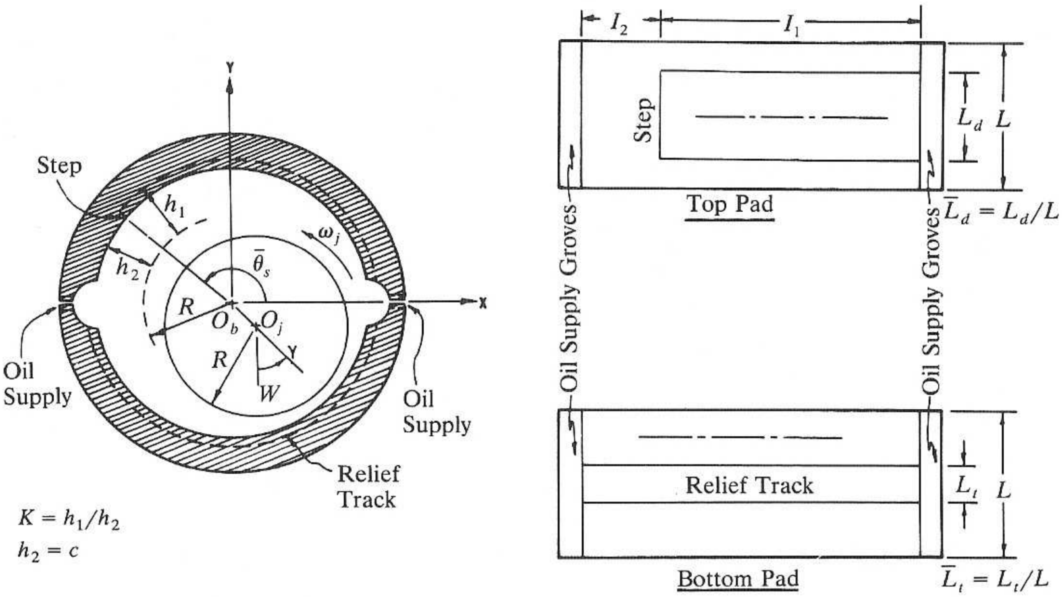

Figura 3.33: Mancal pressure-dam