

2

CONCEITOS BÁSICOS DE ROTODINÂMICA

2.1

Introdução

O estudo da rotodinâmica tem os seguintes objetivos:

1. Determinar as velocidades críticas. Velocidades nas quais a vibração é máxima e que podem ser calculadas para evitar que alguma fique próxima da velocidade de operação.
2. Determinar a resposta ao desbalanceamento. As turbomáquinas possuem componentes que possuem movimento relativo cujas folgas de operação são da ordem de décimos de milímetro. A amplitude das vibrações ao longo do rotor deverão ser menores que estas folgas.
3. Determinar a velocidade limite de estabilidade. Forças desestabilizadoras nos mancais e discos tendem a aparecer em altas velocidades. Modificações no projeto devem ser implementadas a fim de evitar esta condição.

O modelo mais simples para análise da vibração de um rotor é o sistema massa-mola. Se o rotor for relativamente rígido comparado com os mancais, a massa efetiva m é a massa total do rotor e a rigidez efetiva $k = 2k_b$ é a rigidez dos mancais. Se o rotor for relativamente flexível comparado com a rigidez dos mancais, a rigidez efetiva será determinada pela rigidez à flexão do eixo $k = 48EI/l^3$ (figura 2.1). Se considerarmos que a deflexão ocorrerá em duas direções ortogonais X e Y , o sistema terá dois graus de liberdade. Quando se leva em conta a influência da ação giroscópica, mais dois graus de liberdade devem ser considerados.

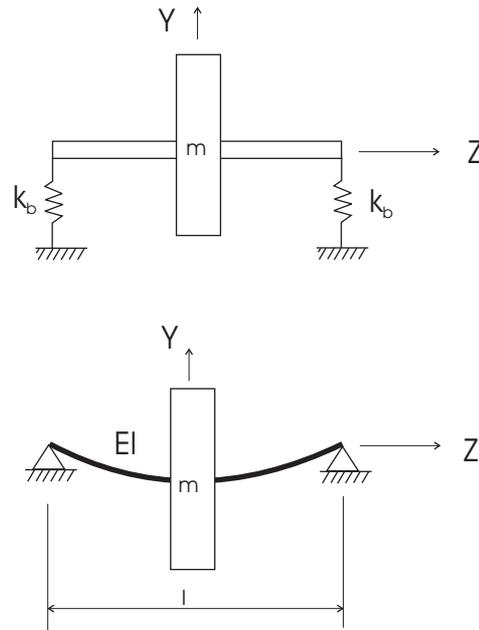


Figura 2.1: Rotor rígido e rotor flexível

2.2

O Rotor de Jeffcott

O rotor de Jeffcott é muito útil para se estabelecer conceitos e definições importantes. É um modelo simplificado que guarda muitas das características de um sistema mais complexo. Consiste de um eixo flexível sem massa com um disco central suportado por mancais idênticos. O eixo Z do sistema de coordenadas XYZ coincide com a linha de centro dos mancais. Devido a um desbalanceamento u , conhecido como excentricidade, o centro de massa G não coincide com o centro geométrico C do disco. Quando o rotor está em repouso, o ponto C coincide com o centro elástico O , pertencente à linha de centro dos mancais (figura 2.2).

Quando o rotor é acionado a uma velocidade Ω constante, a força devida ao desbalanceamento deslocará o ponto C de r em relação à linha de centro dos mancais.

Observando a figura 2.3 e aplicando as Leis de Newton, obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho}_x &= -kr_x \\ m\ddot{\rho}_y &= -kr_y \end{aligned} \quad (2-1)$$

Substituindo as relações 2-2

$$\begin{aligned} \rho_x &= r_x + u \cos \Omega t \\ \rho_y &= r_y + u \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-2)$$

em 2-1, obtém-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + kr_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + kr_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-3)$$

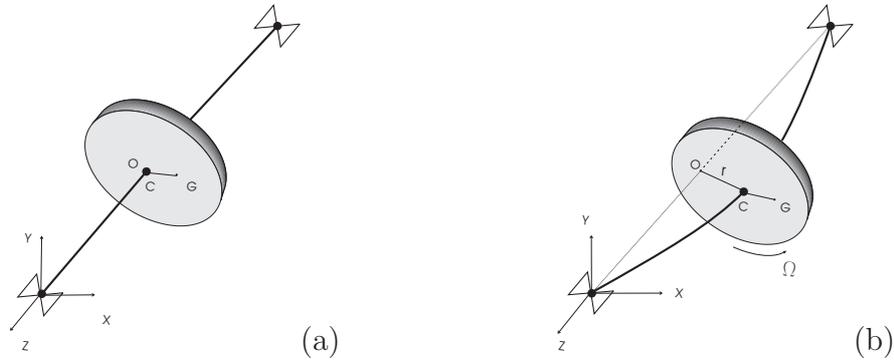


Figura 2.2: a) Rotor em repouso; b) Rotor girando com velocidade Ω .

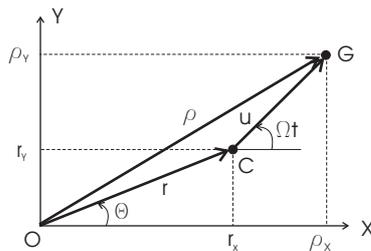


Figura 2.3: Rotor de Jeffcott em coordenadas cartesianas

As equações 2-3 mostram que os movimentos nas direções X e Y são desacopladas. Introduzindo a variável complexa $r = r_x + ir_y$ e fazendo $\omega = \sqrt{k/m}$, obtém-se

$$\ddot{r} + \omega^2 r = u\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad (2-4)$$

Uma solução particular de resposta em regime permanente, é dada, para $\Omega \neq \omega$, por

$$r = u \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} e^{i\Omega t} \quad (2-5)$$

Fazendo $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$, temos

$$r = u \frac{1}{1 - \eta^2} e^{i\Omega t} \quad (2-6)$$

A figura 2.4 ilustra o gráfico da resposta em função da razão de frequência. Para velocidades Ω menores que ω o deslocamento r está em fase

com a excentricidade u e, para velocidades maiores que ω , o deslocamento está 180° fora de fase. Na velocidade de ressonância $\Omega = \omega$ o deslocamento torna-se infinito quando se desconsidera o amortecimento, enquanto que para frequências elevadas, a amplificação dinâmica r/u tende a 1. A figura 2.5 ilustra estas condições.

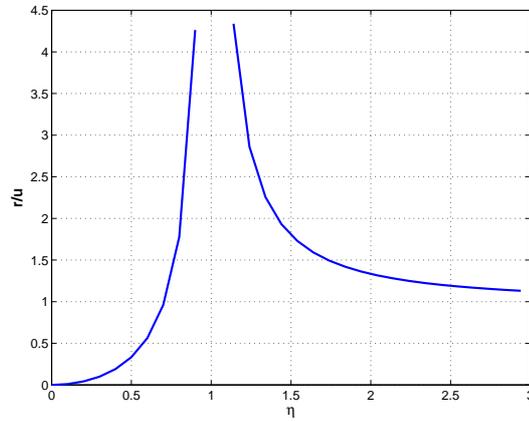


Figura 2.4: Resposta em função da razão de frequências

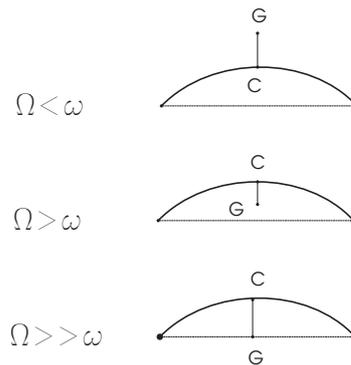


Figura 2.5: Posição relativa de C e G

Se $\Omega = \omega$, a solução particular da equação 2-4 é

$$r = \frac{mu\omega}{2} t e^{i(\Omega t - \pi/2)} \tag{2-7}$$

em que pode-se observar que a amplitude cresce linearmente com a velocidade ω .

A terceira equação de movimento do sistema é obtida aplicando-se a Lei de Euler, expressa pela equação 2-8 e determinará o torque \mathbf{M}_c necessário para manter constante a velocidade Ω .

$$\mathbf{M}_c = J_c \frac{d(\mathbf{H})}{dt} + m \mathbf{u} \times \mathbf{a}_c \tag{2-8}$$

onde

$\mathbf{H} = J_c \boldsymbol{\omega}$ - momento angular do disco em relação ao ponto C e J_c é o tensor de inércia.

\mathbf{a}_c - aceleração do ponto C

Esta equação deverá ser escrita em um sistema móvel solidário ao disco, de forma que o momento de inércia J seja constante. Os sistemas de referência SR estão definidos conforme figura 2.6.

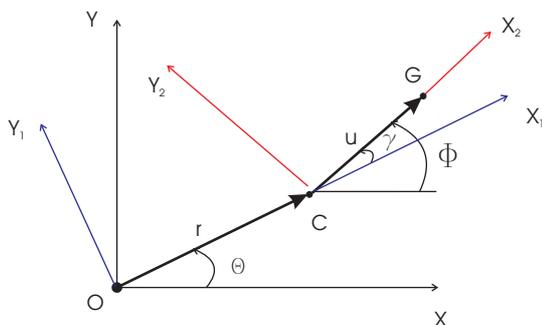


Figura 2.6: Sistemas de referência

Sistema inercial $SR I(XYZ)$ com origem em O

Sistema móvel $SR F(X_1Y_1Z_1)$ com origem em O acompanhando o movimento de C

Sistema $SR Q(X_2Y_2Z_2)$ com origem em C , solidário ao disco

A primeira rotação ocorre no $SR I$ em torno do eixo $Z \Rightarrow I \xrightarrow{\theta} F$

$${}^I\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^I\boldsymbol{\Omega}_F = {}^F\boldsymbol{\Omega}_F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

onde

${}^I\boldsymbol{\Omega}_F$ - velocidade angular do $SR F$

A segunda rotação ocorre no $SR F$ em torno do eixo Z_1 (coincidente com Z) $\Rightarrow F \xrightarrow{\gamma} Q$

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^F\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

A velocidade angular do sistema Q é composta por duas rotações consecutivas: ${}^I\boldsymbol{\Omega}_F$ e ${}^F\boldsymbol{\Omega}_Q$. Representada no sistema Q , será:

$${}^Q\boldsymbol{\Omega}_Q = {}^I\boldsymbol{\Omega}_F + {}^F\boldsymbol{\Omega}_Q = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

A aceleração angular do $SR F$ será

$$\mathbf{I}^F \dot{\boldsymbol{\Omega}}_F = \frac{d(\mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F)}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

A aceleração do ponto C no $SR F$ é

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{F} \mathbf{r} + \mathbf{I}^F \dot{\boldsymbol{\Omega}}_F \times \mathbf{F} \mathbf{r} + 2 \mathbf{I}^F \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{F} \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{F} \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (2-12)$$

onde,

$$\mathbf{F} \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} \mathbf{v}_{\text{rel}} = \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} \mathbf{a}_{\text{rel}} = \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Efetuando os produtos vetoriais e somando as parcelas de 2-12, obtém-se

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} -r \dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

Para escrever $\mathbf{F} \mathbf{a}_c$ no $SR Q$, onde será aplicada a lei de Euler, basta multiplicar pela matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{Q}^T \mathbf{F}$ 2-10. Assim,

$$\mathbf{Q} \mathbf{a}_c = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen} \gamma & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \gamma + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \text{sen} \gamma \\ (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \gamma - (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \text{sen} \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

A equação de Euler em relação ao ponto C escrita no $SR Q$, tendo

em vista que ${}^Q\mathbf{J}_c = cte$, é dada por

$$\mathbf{M}_c = {}^Q J_c \frac{d({}^Q\boldsymbol{\omega})}{dt} + m {}^Q\mathbf{u} \times {}^Q\mathbf{a}_c \quad (2-17)$$

onde ${}^Q\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do disco, que coincide com a velocidade angular do *SRQ*. Então,

$${}^Q\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}; \quad {}^Q\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-18)$$

Substituindo 2-16 e 2-18 em 2-17, obtém-se

$$\mathbf{M}_z = J_p \ddot{\phi} + mu[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos \gamma - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \gamma] \quad (2-19)$$

onde, J_p é o momento de inércia polar, $\gamma = \phi - \theta$ e $\ddot{\phi} = 0$ e $\dot{\phi} = \Omega t$, uma vez que o disco gira com velocidade constante.

Então,

$$\mathbf{M}_z = mu[(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cos(\Omega t - \theta) - (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin(\Omega t - \theta)] \quad (2-20)$$

2.2.1

A influência do Amortecimento e dos Mancais Flexíveis

Se considerarmos a existência de amortecimento externo fazendo $c_x = c_y = c$ (figura 2.7), as equações 2-3 de movimento do centro de massa G para o caso de rotação Ω constante tornam-se

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + c\dot{r}_x + k_x r_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + c\dot{r}_y + k_y r_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-21)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento externo.

Estas equações são desacopladas, podendo, portanto, ser resolvidas separadamente.

Introduzindo a variável complexa $r = r_x + ir_y$ e fazendo $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$, a solução em regime permanente será

$$r = \frac{u\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} e^{i\Omega t} \quad (2-22)$$

onde $\xi = c/(2m\omega)$ é a razão de amortecimento.

A figura 2.8 ilustra a resposta em função da razão de frequência η para diferentes razões de amortecimento.

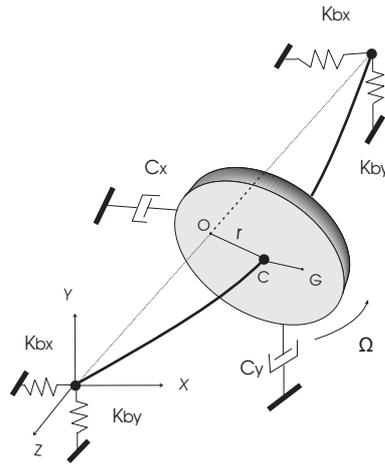


Figura 2.7: Rotor de Jeffcott em mancais flexíveis

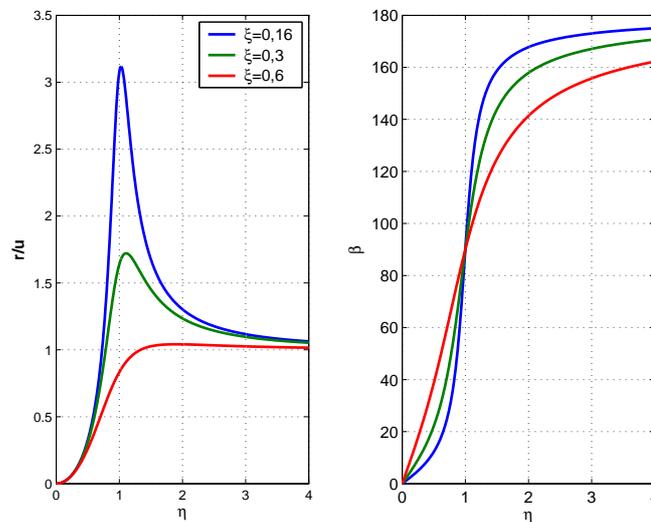


Figura 2.8: resposta em função da razão de frequências

Quando os mancais são flexíveis, a rigidez equivalente de cada mancal é k , combinação em série da rigidez k_e do eixo e k_b do mancal. Assim,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_e} + \frac{1}{2k_b}$$

$$k = \frac{2k_b k_e}{2k_b + k_e}$$

Quando o rotor está montado em mancais cujas rigidezes são iguais nas direções X e Y , o sistema é chamado de isotrópico. Em geral, as rigidezes equivalentes (k_x e k_y) não são as mesmas devido às propriedades assimétricas dos mancais, embora o rotor seja axissimétrico. Tal sistema é chamado de

anisotrópico. As equações de movimento são

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_x + c_x\dot{r}_x + k_x r_x &= mu\Omega^2 \cos \Omega t \\ m\ddot{r}_y + c_y\dot{r}_y + k_y r_y &= mu\Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-23)$$

Estas equações são desacopladas, podendo, portanto, ser resolvidas separadamente.

A solução em regime permanente é

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{u\eta_x^2}{\sqrt{(1-\eta_x^2)^2 + (2\xi_x\eta_x)^2}} \cos(\Omega t - \beta_x) \\ r_y &= \frac{u\eta_y^2}{\sqrt{(1-\eta_y^2)^2 + (2\xi_y\eta_y)^2}} \sin(\Omega t - \beta_y) \end{aligned} \quad (2-24)$$

onde

$$\beta_x = \arctan\left(\frac{2\xi_x\eta_x}{1-\eta_x^2}\right); \quad \beta_y = \arctan\left(\frac{2\xi_y\eta_y}{1-\eta_y^2}\right) \quad (2-25)$$

A partir destas equações, observa-se que aparecem duas frequências naturais referentes às direções X e Y conforme ilustrado na figura 2.9.

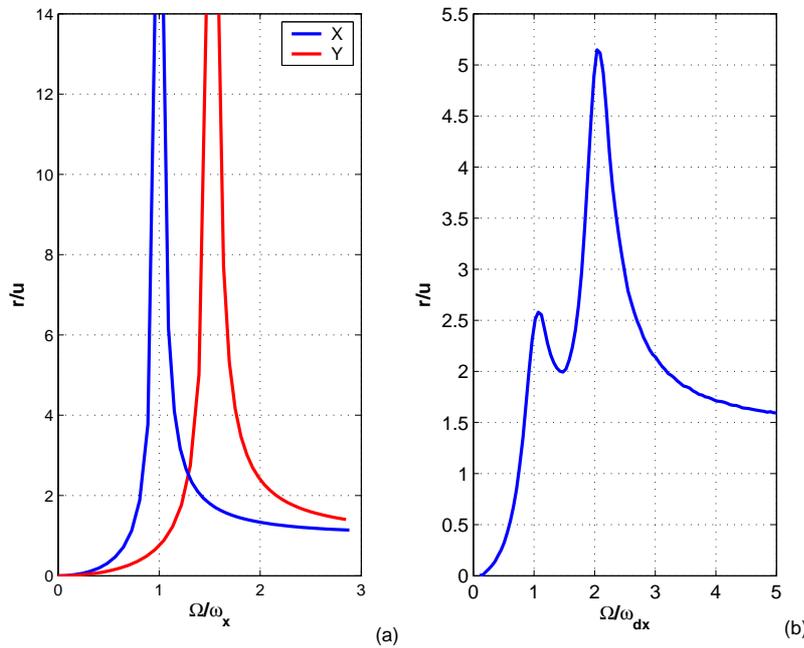


Figura 2.9: a) Resposta sem amortecimento; b) Resposta amortecida

A solução particular de 2-23 pode ser escrita, também, na forma

$$\begin{aligned} r_x &= A_x \cos \Omega t + B_x \sin \Omega t \\ r_y &= A_y \cos \Omega t + B_y \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-26)$$

onde as constantes A_x , B_x , A_y e B_y são obtidas substituindo-se 2-26 em 2-23

$$A_x = \frac{mu\Omega^2(k_x - m\Omega^2)}{(k_x - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_x)^2}; \quad B_x = \frac{\Omega c_x(mu\Omega^2)}{(k_x - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_x)^2}$$

$$A_y = (-\Omega c_y) \frac{mu\Omega^2}{(k_y - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_y)^2}; \quad B_y = \frac{mu\Omega^2(k_y - m\Omega^2)}{(k_y - m\Omega^2)^2 + (\Omega C_y)^2} \quad (2-27)$$

Referindo-se à figura 2.3, r_x e r_y são as coordenadas do ponto C que executará um movimento elíptico, chamado de precessão (“*whirling*”), cujo ângulo é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \quad (2-28)$$

Em regime permanente, a velocidade de precessão é igual à velocidade de rotação do disco. Se o sentido de rotação for o mesmo, diz-se que a precessão é direta. Caso contrário, a precessão é retrógrada.

Derivando 4-11 em relação ao tempo, obtém-se a velocidade de precessão

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + (r_y/r_x)^2} \left(\frac{r_y}{r_x}\right)'$$

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega(A_x B_y - A_y B_x)}{r_x^2 + r_y^2} \quad (2-29)$$

De 2-29 conclui-se que o sinal de $\dot{\theta}$ depende unicamente do termo

$$s = A_x B_y - A_y B_x \quad (2-30)$$

pois os demais são quadráticos.

Substituindo 2-27 em 2-30, obtém-se

$$s = (\omega_x^2 - \Omega^2)(\omega_y^2 - \Omega^2) + (4\Omega^2 \xi_x \xi_y \omega_x \omega_y) \quad (2-31)$$

Se

$s > 0$, a precessão é direta

$s < 0$, a precessão é retrógrada

$s = 0$, a precessão é um segmento pois $\dot{\theta} = 0$ linha

De 4-17, conclui-se que a precessão é direta quando a velocidade Ω estiver abaixo da primeira ressonância ω_x ou acima da segunda ressonância

ω_y . Entre as duas ressonâncias, a precessão poderá ser direta ou retrógrada, a depender da magnitude do amortecimento.

Pode-se plotar as duas precessões no plano XY , como ilustrado na figura 2.10

Se o amortecimento ξ for zero, à solução 2-26 deverá acrescentada a solução transiente, que será harmônica, porém de frequência $\omega_n \neq \Omega$. Logo, a órbita não será uma elipse.

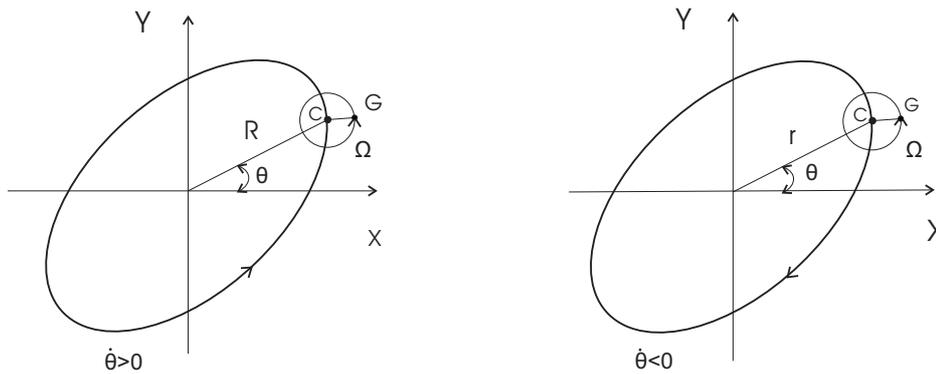


Figura 2.10: precessões direta e retrógrada

2.2.2

A Influência da Ação Giroscópica

Se o disco da figura 2.2 é colocado no centro, entre os apoios, ele precessionará em seu próprio plano se não existir uma excitação que induza outro movimento, como um desbalanceamento dinâmico. Se, ao contrário, for deslocado do centro e, especialmente, se estiver em balanço, a oscilação não dar-se-á em seu plano e induzirá momentos giroscópicos que alteram a velocidade crítica do rotor.

As equações de movimento do disco serão descritas com auxílio de sistemas móveis de referência SR conforme ilustrado na figura 2.11.

Sistema inercial $SR I(XYZ)$

Sistema móvel $SR F(X_1Y_1Z_1)$

Sistema móvel $SR Q(X_2Y_2Z_2)$

Sistema móvel $SR S(X_3Y_3Z_3)$

A primeira rotação ocorre no sistema inercial I em torno do eixo $X \Rightarrow I \xrightarrow{\alpha} F$ e a matriz de transformação de coordenadas será

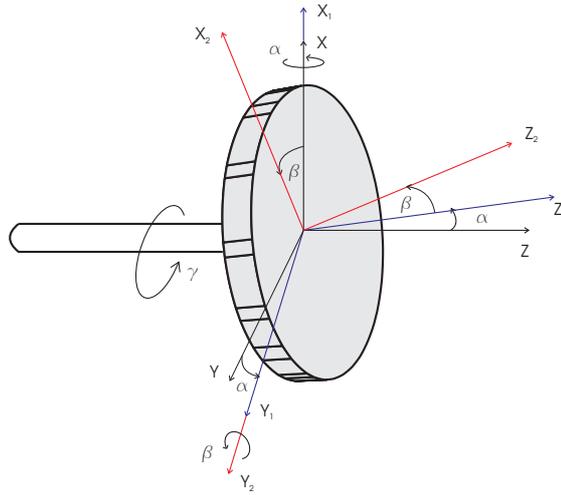


Figura 2.11: Sistemas de referência para um disco em balanço

$$\mathbf{I}\mathbf{T}^{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A segunda rotação ocorre no sistema móvel F em torno do eixo $Y_1 \Rightarrow F \xrightarrow{\beta} Q$ e a matriz de transformação de coordenadas será

$$\mathbf{F}\mathbf{T}^{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A terceira rotação ocorre no sistema móvel Q em torno do eixo $Y_2 \Rightarrow Q \xrightarrow{\gamma} S$ e a matriz de transformação de coordenadas será

$$\mathbf{F}\mathbf{T}^{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix}$$

A velocidade angular absoluta do SRQ será

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}\mathbf{T}^{\mathbf{F}}\mathbf{F}\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \text{sen} \beta \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

A velocidade angular do disco será, então

$${}^Q\omega = {}^Q\Omega_Q + {}^Q\Omega_S = {}^Q\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

A aceleração angular do disco será

$${}^Q\dot{\omega} = \frac{d({}^Q\Omega)}{dt} + {}^Q\Omega_Q \times {}^Q\omega$$

$${}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ \ddot{\beta} - \dot{\alpha}\dot{\gamma} \cos \beta \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \end{Bmatrix} \quad (2-34)$$

Lembrando que os ângulos α e β são muito pequenos, 2-33 e 2-34 podem ser simplificadas na forma das equações 2-35.

$${}^Q\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \beta\dot{\alpha} \end{Bmatrix}; \quad {}^Q\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} - \beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ \ddot{\beta} - \dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (2-35)$$

Aplicando a Lei de Euler

$$\mathbf{M}_c = J_c \dot{\omega} + {}^Q\Omega_Q \times (J_c {}^Q\omega) \quad (2-36)$$

obtem-se

$$\begin{cases} M_x = J(\ddot{\alpha} + \dot{\beta}\dot{\gamma} - \beta\dot{\alpha}\dot{\beta}) + (J_p - I)\dot{\beta}(\dot{\gamma} + \beta\dot{\alpha}) \\ M_y = J(\ddot{\beta} - \dot{\alpha}\dot{\gamma}) - (J_p - I)\dot{\alpha}(\dot{\gamma} + \beta\dot{\alpha}) \\ M_z = I_p(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}\dot{\beta}) \end{cases} \quad (2-37)$$

onde J e J_p são os momentos de inércia transversal e polar, respectivamente.

Considerando $\ddot{\gamma} = 0$, fazendo $\dot{\gamma} = \Omega$ e desprezando os termos de

segunda ordem com a linearização, temos

$$\begin{cases} M_x = J\ddot{\alpha} + J_p\Omega\dot{\beta} \\ M_y = J\ddot{\beta} - J_p\Omega\dot{\alpha} \\ M_z = 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Se o centro do disco tiver deflexões em X e Y , temos

$$\begin{cases} m\ddot{r}_x + k_x r_x - k_{x\beta}\beta = 0 \\ m\ddot{r}_y + k_y r_y - k_{y\alpha}\alpha = 0 \\ J\ddot{\beta} - J_p\Omega\dot{\alpha} + k_{\beta\beta}\beta - k_{\beta x}r_x = 0 \\ J\ddot{\alpha} + J_p\Omega\dot{\beta} + k_{\alpha\alpha}\alpha + k_{\alpha y}r_y = 0 \end{cases} \quad (2-39)$$

Considerando o eixo isotrópico, tem-se os coeficientes de influência

$$\begin{aligned} k_{xx} = k_{yy} = k_{rr}, \quad k_{\alpha\alpha} = k_{\beta\beta} = k_{\psi\psi} \\ k_{x\beta} = k_{\phi x} = k_{\alpha y} = k_{y\alpha} = k_{r\psi} \end{aligned} \quad (2-40)$$

Para um disco em balanço, tem-se da Mecânica dos Sólidos que

$$k_{rr} = 12EI/l^3, \quad k_{\psi\psi} = 4EI/l, \quad k_{r\psi} = 6EI/l^2 \quad (2-41)$$

onde I é o momento de inércia de área.

Introduzindo as variáveis complexas $r = r_x + ir_y$ e $\psi = \alpha + i\beta$, as equações 4-42 tornam-se

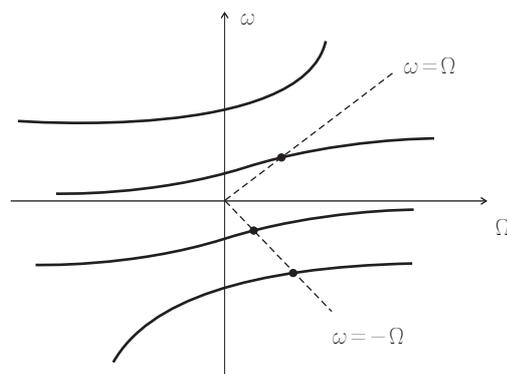
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -iJ_p\Omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{rr} & k_{r\psi} \\ k_{r\psi} & k_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-42)$$

Assumindo a solução do tipo $r = r_o e^{i\omega t}$ e $\psi = \psi_o e^{i\omega t}$ e substituindo em 2-42, chega-se à equação característica para o cálculo das frequências

$$mJ\omega_n^4 - mJ_p\Omega\omega_n^3 - (mk_{\psi\psi} + Jk_{rr})\omega_n^2 + k_{rr}J_p\Omega\omega_n + (k_{rr}k_{\psi\psi} - k_{r\psi}^2) = 0 \quad (2-43)$$

da qual conclui-se que a frequência natural depende da velocidade Ω do rotor. A figura 2.12 mostra as curvas das frequências naturais.

Se traçarmos duas retas $\Omega = \omega$ e $\Omega = -\omega$, elas interceptarão estas curvas em pontos que são conhecidos como velocidades críticas do rotor. Este gráfico é conhecido como Diagrama de Campbell. A interseção da linha $\Omega = \omega$ define uma velocidade crítica precessional direta, enquanto que a interseção com a linha $\Omega = -\omega$, duas velocidades críticas precessionais retrógradas.

Figura 2.12: Frequências naturais em função da velocidade Ω