2
Fluxo de água através de meios porosos

2.1.
Equações governantes

Considere o volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ de material poroso, com faces paralelas aos planos xy, yz e zx, representado na figura 2.1, submetido a condições de fluxo de água, considerada não-viscosa e incompressível, sob regime laminar.

Se q_x é o fluxo por unidade de área na direção x, por unidade de tempo, então a vazão total que flui através da face BCC´B´ é $q_x \Delta_y \Delta_z$ e através da face ADD´A´ é $\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$, considerando uma taxa de variação do fluxo $\frac{\partial q_x}{\partial x}$ ao longo do comprimento Δx que separa a face posterior da face frontal do elemento de volume.

A vazão final na direção x no interior do elemento é expressa por

$$\Delta Q^x_{elemento} = Q^x_{ent} - Q^x_{saida} = q_x \Delta y \Delta z - (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (2.1)$$

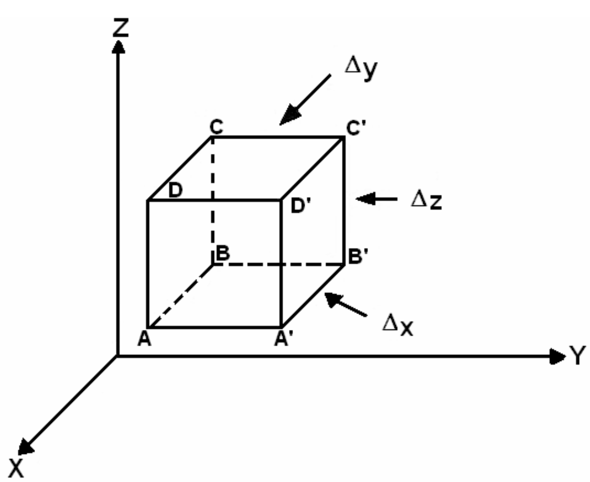


Figura 2.1 – Volume de material poroso submetido a fluxo de água no regime laminar (Marino e Luthin, 1982)

A equação (2.1) multiplicada pela massa específica ρ da água, representa a massa de água no interior do elemento devido ao fluxo na direção x,

$$\Delta M^{x}_{elemento} = -\frac{\partial \rho q_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.2}$$

Adotando-se o mesmo procedimento de análise para as componentes de fluxo nas direções ortogonais y e z, obtém-se respectivamente

$$\Delta M^{y}_{elemento} = -\frac{\partial \rho q_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.3}$$

$$\Delta M^{z}_{elemento} = -\frac{\partial \rho q_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.4}$$

A massa total de água no interior do elemento do meio poroso devido ao fluxo combinado nas direções x, y, z é portanto

$$\Delta M_{elemento} = -\left[\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z}\right]\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.5}$$

Por outro lado, a vazão através do elemento é, por definição, a variação do volume de água na unidade de tempo. Se considerarmos θ como o volume de água por unidade de volume do meio poroso (teor de umidade volumétrica), logo a taxa de variação da massa de água na unidade de tempo pode também ser expressa por

$$\Delta M_{elemento} = \frac{\partial \rho \theta}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.6}$$

As equações (2.5) e (2.6) implicam nas mesmas quantidades e podem ser igualadas, resultando em

$$-\left[\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z}\right] = \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} \tag{2.7}$$

Considerando fluxo laminar, é válida a lei de Darcy que estabelece a relação entre o fluxo por unidade de área e os gradientes hidráulicos nas direções x, y, z $(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial z})$ como

$$
\begin{aligned}
q_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\
q_y &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \qquad (2.8) \\
q_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z}
\end{aligned}
$$

onde $h = z + u/\gamma$ é a carga hidráulica, u/γ a carga de pressão, u a poropressão, z a carga de elevação e γ o peso específico da água.

A equação 2.7 pode então ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{\partial \rho\theta}{\partial t} \qquad (2.9)$$

obtendo-se a chamada equação de Richard para fluxo de água em meios porosos (equação 2.9). Considerando o fluido incompressível,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad (2.10)$$

No caso de fluxo em regime permanente onde as características do problema hidráulico não se alteram com o tempo, a equação pode ser simplificada para

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0 \qquad (2.11)$$

Para meios porosos isotrópicos onde $k_x = k_y = k_z = k$, a equação transforma-se na conhecida equação Laplace.

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.12)$$

2.2. Soluções da equação bidimensional de Laplace

Na engenharia geotécnica, um grande número de problemas de fluxo de água através de maciços de solo pode ser formulado e resolvido considerando-se apenas as condições hidráulicas e geotécnicas em uma única seção transversal, em geral a seção mais crítica do problema ou a seção de simetria, quando existente. Nestes casos, as características do movimento de água podem ser estudadas no plano (aqui considerado o plano xy) com a equação governante de fluxo

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.13)$$

permanente transformando-se em cuja solução pode ser obtida através de vários métodos e técnicas, as principais das quais são brevemente descritas a seguir.

2.2.1. Método analítico

No caso de problemas com geometria simples, materiais homogêneos e condições de contorno bem determinadas, soluções analíticas foram obtidas por vários pesquisadores, geralmente por meio da teoria dos potenciais, com grande parte delas reunida na grande obra de Muskat (1937). Para fluxo 2D, nesta coletânea encontram-se soluções para fluxo radial em poços, fluxo não-simétrico em poços, fluxo ao redor de cortinas impermeáveis, vazão e distribuição de poropressões na base de barragens considerando a existência ou não de cortina impermeável, bem como algumas soluções específicas para condições de fluxo 3D, como, por exemplo, poços parcialmente penetrantes.

Ainda que a maioria destas soluções não seja aplicada na prática da engenharia, onde as condições de fluxo são mais complexas, com heterogeneidade e anisotropia de materiais dificultando, e muitas vezes impedindo, uma solução matemática rigorosa, as soluções analíticas constituem-se em resultados extremamente úteis para fins de comparação e análise da confiabilidade de outros métodos aproximados de solução, como os atualmente populares métodos numéricos.

2.2.2
Modelos físicos

2.2.2.1.
Modelos de areia

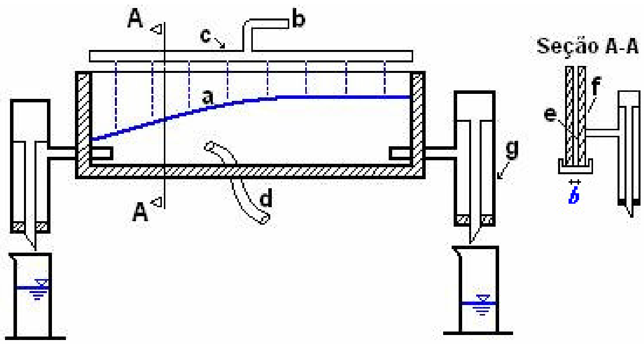
Um modelo de areia do maciço de solo ou obra de terra é construído em escala reduzida com coeficiente de permeabilidade – em valor absoluto e distribuição espacial – modificado adequadamente. Os modelos de areia têm sido construídos em caixas impermeáveis, com ao menos uma face transparente, e utilizados para modelar problemas de fluxo não-confinado ou confinado, neste último caso adicionando-se uma cobertura impermeável na caixa.

A identificação visual de níveis d´água é no entanto difícil, podendo estes ser mais facilmente observados através de piezômetros, na escala do modelo. Adicionando-se corantes em vários pontos na areia, como o bicromato de potássio, as linhas de fluxo podem ser facilmente visualizadas. Geralmente areia grossa colocada em pequenas quantidades sob a água e compactada consistentemente para remover o ar resultará em uma permeabilidade uniforme ao modelo

A ascenção capilar em um modelo de areia é desproporcionalmente maior do que a verificada em campo, sendo necessárias correções para problemas envolvendo investigações de fluxo não-confinado ou rebaixamento de poços.

A literatura registra várias aplicações de modelos de areia no estudo de problemas de fluxo, como barragens de terra, canais, movimento de águas subterrâneas, intrusão de água do mar em aqüíferos costeiros, espalhamento de água para reabastecimento de águas subterrâneas, fluxos de/para poços, etc. Porém, de acordo com Scott (1965), a dificuldade de adequadamente simular condições de contorno e materiais de diferentes permeabilidades tendem a limitar a utilização prática dos mesmos para aplicações relacionadas com o ensino do fluxo de água através de solos.

2.2.2.2.
Modelos de placas (Hele-Shaw)



a)linha freática; b) tubo para simular precipitação pluviométrica; c) tubo de distribuição d'água; d) tubo de descarga; e) fluido viscoso (água); f) placas transparentes; g) saída do excesso d'água.

Figura 2.2 – Modelo vertical de placas paralelas

Desde o trabalho pioneiro de Hele-Shaw e Hay (1901) vários estudos tiveram como propósito a análise das condições de fluxo de um fluido viscoso entre duas placas paralelas de perspex separadas da distância *b* (figura 2.2). A partir das equações de Navier-Stokes, que regem o movimento do fluido viscoso entre as placas impermeáveis, pode-se obter

$$q_x^m = -\frac{b^2\gamma}{12\mu}.\frac{\partial}{\partial x}(z+\frac{u}{\gamma}) \qquad q_z^m = -\frac{b^2\gamma}{12\mu}.\frac{\partial}{\partial z}(z+\frac{u}{\gamma}) \tag{2.14}$$

ou, considerando a lei de Darcy (1856) em termos de um coeficiente de permeabilidade médio $k_m = b^2\gamma/12\mu$

$$q_x^m = -k_m.\frac{\partial}{\partial x}(z+\frac{u}{\gamma}) \qquad q_z^m = k_m.\frac{\partial}{\partial z}(z+\frac{u}{\gamma}) \tag{2.15}$$

onde γ e μ indicam o peso específico e a viscosidade dinâmica do fluido, respectivamente. O valor deste coeficiente de permeabilidade médio pode ser variado tanto em função das características do fluido (γ, μ) quanto da largura *b* entre as placas.

O princípio do modelo de placas paralelas é baseado na substituição do conjunto de poros do solo por uma abertura contínua, de largura pequena b e que garanta condições de fluxo laminar. Apresenta as seguintes vantagens, de acordo com Homma (1983):

a) a linha de fluxo superior é imediatamente visível e assume sua forma correta, reproduzindo a linha freática em campo, não necessitando de correções posteriores;
b) por meio de piezômetros a distribuição das cargas hidráulicas pode ser facilmente obtida;
c) permite fluxo simultâneo de fluidos de diferentes pesos específicos;
d) estratificações de solo e drenos podem ser incorporados. No caso do meio poroso apresentar permeabilidades distintas, uma das técnicas é aderir um papel de certa espessura entre as placas, na zona de menor permeabilidade, reduzindo-se localmente a distância de separação entre as placas.

Se os dados de campo forem conhecidos (permeabilidade do solo, profundidade da camada rochosa impermeável, taxa de precipitação pluviométrica, etc.) por algum tipo de ensaios in-situ, as dimensões do modelo de placas paralelas podem ser obtidas através de considerações de efeitos de escala, incluindo a geometria do modelo, valores de cargas hidráulicas, vazões e mesmo o tempo em problemas de fluxo transiente. O leitor interessado em detalhes na obtenção destas escalas dever consultar Homma (1983).

2.2.2.3.
Modelos elétricos

Soluções de problemas de fluxo podem também ser obtidas através da analogia com problemas de condução de corrente elétrica, visto a similaridade entre a lei de Darcy (equações 2.8) e a lei de Ohms (equações 2.16).

$$
\begin{aligned}
I_x &= -\frac{1}{R_x}\frac{\partial V}{\partial x} \\
I_y &= -\frac{1}{R_y}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (2.16) \\
I_z &= -\frac{1}{R_z}\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}
$$

onde I_x , I_y , I_z representam intensidades de corrente elétrica por unidade de área, R_x , R_y , R_z resistividades elétricas e $-\partial V/\partial x$, $-\partial V/\partial y$, $-\partial V/\partial z$ os gradientes de voltagem nas direções x, y, z, respectivamente. Corrente alternada é geralmente empregada para minimizar efeitos de polarização.

Modelos elétricos são restritos a situações de fluxos permanentes e os tipos mais simples consideram aqüíferos isotrópicos e homogêneos. Condutores sólidos, líquidos e gelatinosos podem ser empregados.

Uma limitação dos modelos elétricos é a determinação da posição da linha freática que deve ser estabelecida através de um processo de tentativa-e-erro. Como a posição da linha freática não é conhecida antecipadamente, uma estimativa da sua posição deve ser feita no modelo e o condutor elétrico deve ser cortado (no caso de papel) ao longo deste contorno. Obtidos os resultados, considerando-se que todos os pontos da linha freática têm carga de pressão nula, então as linhas equipotenciais devem interceptar a linha freática em pontos onde os valores de carga de elevação sejam iguais às cargas totais ali medidas. Caso esta condição não se confirme, uma nova estimativa da posição da linha freática deve ser feita e o problema repetido por tentativas até a convergência da solução.

Modelos elétricos com condutores sólidos têm sido construídos com folhas finas de metal, papel carbono e grafite, entre outros. Normalmente para representação de fluxo bidimensional utilizam-se folhas monel, formada por liga de níquel e cobre. Uma diferença de potencial é obtida aplicando-se corrente elétrica em eletrodos nos contornos essenciais do problema. Poços são simulados fazendo-se pequenos furos e nele inserindo-se eletrodos, com lâminas de cobre servindo como limites externos ao perímetro do poço. As linhas equipotenciais são determinadas medindo-se a queda de potencial com um galvanômetro em vários pontos sobre as folhas monel, e os gradientes de voltagem são determinados através de duas sondas separadas de uma determinada distância.

Um modelo simples de condutor líquido consiste de um tanque raso de madeira cheio com um eletrólito de baixa condutividade, como uma solução diluída de sulfato de cobre (figura 2.3).

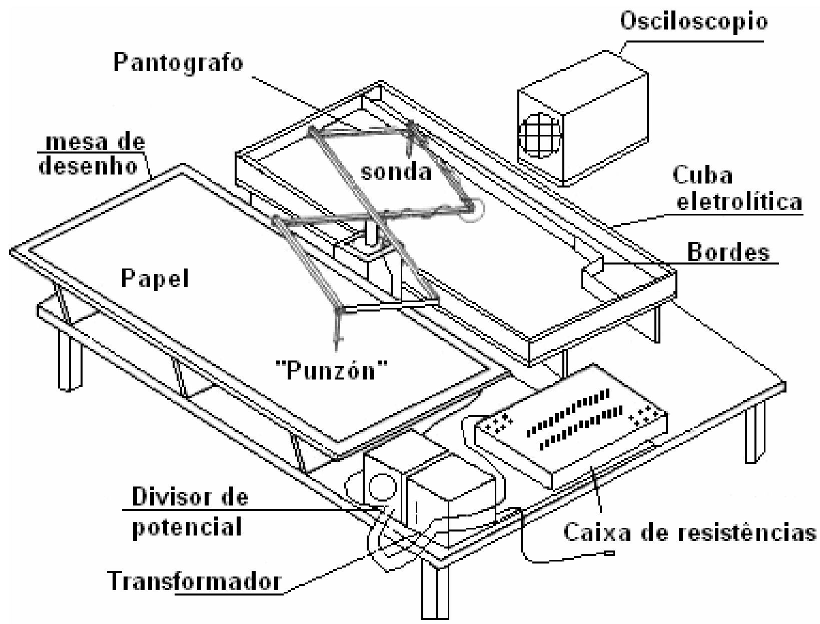


Figura 2.3 – Modelo de cuba eletrolítica

Conectando-se eletrodos nos contornos do problema, podem ser traçadas as linhas de queda de potencial constantes através de uma sonda ligada a um voltímetro e adaptada a um pantógrafo. Introduzindo-se um eletrodo de cobre no eletrólito, é possível representar-se um poço totalmente penetrante; com diversos eletrodos pode-se estudar o conjunto de poços em uma grande área, como por exemplo em campos de petróleo. Injeções e poços de extração de petróleo são simulados por eletrodos, ajustando-se as correntes em cada um dos mesmos por resistências adequadas, correspondentes às vazões nos poços.

Os modelos eletrolíticos também se adaptam à análise do comportamento do fluxo em barragens de terra e através da fundação de barragens de concreto. Podem também ser empregados para análise de situações 3D (aqüíferos de espessura variável) moldando-se com parafina a configuração do aqüífero no fundo da cuba que contém o eletrólito.

Modelos com condutores gelatinosos também podem ser usados, adicionando-se pequenas quantidades de cloreto de sódio ou sulfato de cobre a uma gelatina quente e despejando-a em um molde que representa a geometria do aqüífero ou da obra de terra, onde ela se solidifica. Podem ser simuladas zonas com diferentes permeabilidades, acrescentando-se na gelatina concentrações apropriadas de sal.

2.2.3. Método dos fragmentos

Um método analítico aproximado, diretamente aplicável a projetos, foi desenvolvido por Pavlovsky (1935, 1956) – *o método dos fragmentos*. A hipótese básica do método é que linhas equipotenciais, em partes críticas da região de fluxo, podem ser aproximadas por linhas retas verticais, dividindo a geometria do problema em fragmentos (como os 4 fragmentos da figura 2.4).

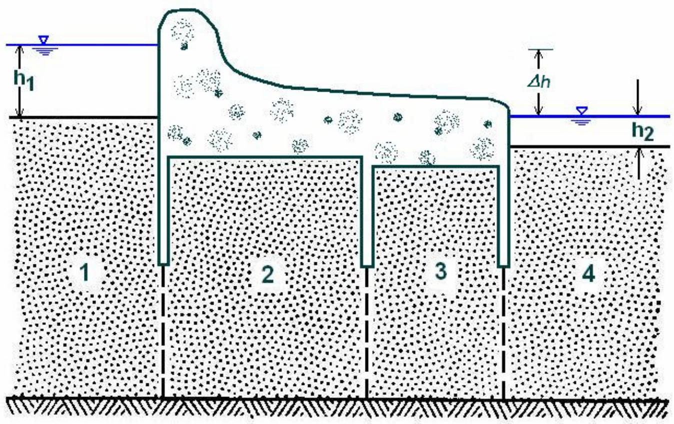


Figura 2.4 – Região de fluxo dividida em 4 fragmentos (Harr, 1977)

Considere que a vazão Q no fragmento i possa ser determinada por

$$Q = k\frac{\Delta h_i}{\phi_i} \qquad (2.17)$$

onde Δh_i é a perda de carga e ϕ_i um fator de forma do fragmento i.

Como a vazão deve ser a mesma através dos n fragmentos, então

$$Q = k\frac{\Delta h_1}{\phi_1} = k\frac{\Delta h_2}{\phi_2} = ...k\frac{\Delta h_i}{\phi_i} = ... = k\frac{\Delta h_n}{\phi_n} \qquad (2.18)$$

resultando portanto em

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = \frac{Q}{k}\sum_{i=1}^{n} \phi_i \qquad (2.19)$$

A vazão total Q pode ser expressa como

$$Q = k\frac{\Delta h}{\sum_{i=1}^{n} \phi_i} \qquad (2.20)$$

Similarmente, a perda de carga Δh_i no fragmento i vem de (2.18) e (2.19),

$$\Delta h_i = \Delta h \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^{n} \phi_j} \qquad (2.21)$$

Para implementar o método, é necessário um catálogo de fatores de forma, mostrados nas tabelas 2.1 e 2.2.

O método também pode ser utilizado em meios porosos anisotrópicos, neste caso considerando-se fragmentos formados em domínio geométrico transformado, resultado da substituição de variáveis, explicada no item sobre redes de fluxo.

Tabela 2.1 – Fragmentos para fluxo confinado (Harr, 1962)

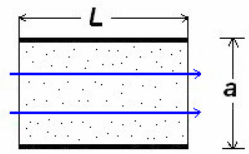
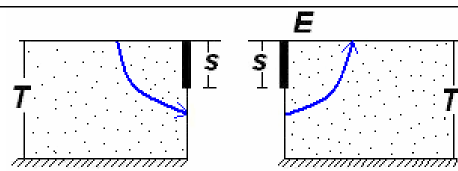
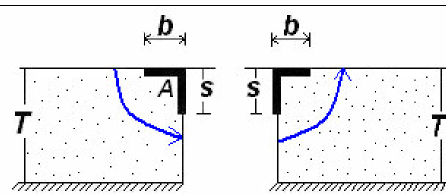
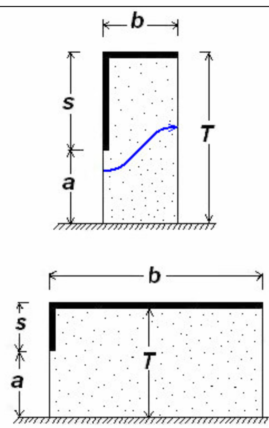
Tipo de Fragmento	Ilustração	Fator de Forma
I		$\phi = \frac{L}{a}$
II		$\phi = \frac{K}{K'}$ $m = \mathrm{sen}\frac{\pi s}{2T}$
III		$\phi = \frac{K}{K'}$ $m = \cos\frac{\pi s}{2T}\sqrt{\tanh^2\frac{\pi b}{2T} + \tan^2\frac{\pi s}{2T}}$
IV		$s \geq b$: $\phi = \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ $b \geq s$: $\phi = \ln\left(1 + \frac{s}{a}\right) + \frac{b - s}{T}$

Tabela 2.1 (cont.) – Fragmentos para fluxo confinado (Harr, 1962)

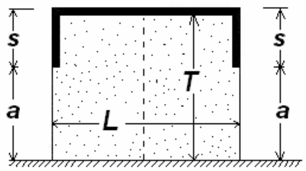
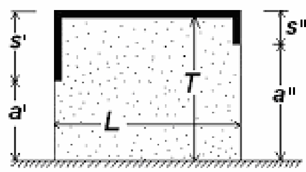
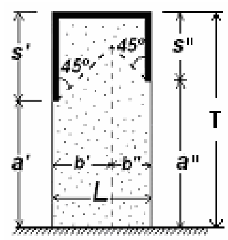
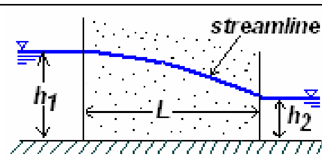
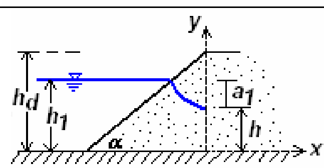
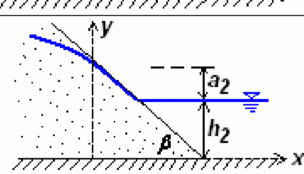
Tipo de Fragmento	Ilustração	Fator de Forma
V		$L \le 2s$: $\phi = 2.\ln\left(1+\frac{L}{2a}\right)$ $L \ge 2s$: $\phi = 2.\ln\left(1+\frac{s}{a}\right)+\frac{L-2s}{T}$
VI	 	$L > s'+s''$: $\phi = \ln\left[\left(1+\frac{s'}{a'}\right)\left(1+\frac{s''}{a''}\right)\right] + \frac{L-(s'+s'')}{T}$ $L = s'+s''$: $\phi = \ln\left[\left(1+\frac{s'}{a'}\right)\left(1+\frac{s''}{a''}\right)\right]$ $L < s'+s''$: $\phi = \ln\left[\left(1+\frac{b'}{a'}\right)\left(1+\frac{b''}{a''}\right)\right]$ onde : $b' = \frac{L+(s'-s'')}{2}$ $b' = \frac{L-(s'-s'')}{2}$

Tabela 2.1 (cont) – Fragmentos para fluxo não-confinado (Harr, 1977)

Tipo de Fragmento	Ilustração	Fator de forma
VII		$\phi = \frac{2L}{h_1+h_2}$ $Q = k\frac{h_1^2-h_2^2}{2L}$
VIII		$Q = k\frac{h_1-h}{\cos\alpha}.\ln\frac{hd}{hd-h}$
IX		$Q = k\frac{a_2}{\cot\beta}.\left(1+\ln\frac{a_2+h_2}{a_2}\right)$

onde $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^2 sen^2\phi}}$ é a integral completa elíptica de primeiro tipo com módulo m e $K^{'} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^{'2} sen^2\phi}}$ é a integral completa elíptica de primeiro tipo com módulo complementar $m^{'2} = 1 - m^2$ de tal forma que $K(m^{'}) = K^{'}(m)$. Valores de $K/K^{'}$ e $K^{'}/K$ estão sumarizados na tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Integrais completas elípticas de primeiro tipo (Harr, 1962)

m^2	K	K'	K/K'	K'/K	m'^2		m^2	K	K'	K/K'	K'/K	m'^2
0.000	0.571	∞	0.000	∞	1.000		0.21	1.665	2.235	0.745	1.34	0.79
0.001	1.571	4.841	0.325	3.08	0.999		0.22	1.670	2.214	0.754	1.33	0.78
0.002	1.572	4.495	0.349	2.86	0.998		0.23	1.675	2.194	0.763	1.31	0.77
0.003	1.572	4.293	0.366	2.73	0.997		0.24	1.680	2.175	0.773	1.29	0.76
0.004	1.572	4.150	0.379	2.64	0.996		0.25	1.686	2.157	0.782	1.28	0.75
0.005	1.573	4.039	0.389	2.57	0.995		0.26	1.691	2.139	0.791	1.26	0.74
0.006	1.573	3.949	0.398	2.51	0.994		0.27	1.697	2.122	0.800	1.25	0.73
0.007	1.574	3.872	0.406	2.46	0.993		0.28	1.702	2.106	0.808	1.24	0.72
0.008	1.574	3.806	0.413	2.42	0.992		0.29	1.708	2.090	0.817	1.22	0.71
0.009	1.574	3.748	0.420	2.38	0.991		0.30	1.714	2.075	0.826	1.21	0.70
0.01	1.575	3.696	0.426	2.35	0.99		0.31	1.720	2.061	0.834	1.20	0.69
0.02	1.579	3.354	0.471	2.12	0.98		0.32	1.726	2.047	0.843	1.19	0.68
0.03	1.583	3.156	0.502	1.99	0.97		0.33	1.732	2.033	0.852	1.17	0.67
0.04	1.587	3.016	0.526	1.90	0.96		0.34	1.738	2.020	0.860	1.16	0.66
0.05	1.591	2.908	0.547	1.83	0.95		0.35	1.744	2.008	0.869	1.15	0.65
0.06	1.595	2.821	0.565	1.77	0.94		0.36	1.751	1.995	0.877	1.14	0.64
0.07	1.599	2.747	0.582	1.72	0.93		0.37	1.757	1.983	0.886	1.13	0.63
0.08	1.604	2.684	0.598	1.67	0.92		0.38	1.764	1.972	0.895	1.12	0.62
0.09	1.608	2.628	0.612	1.63	0.91		0.39	1.771	1.961	0.903	1.11	0.61
0.10	1.612	2.578	0.625	1.60	0.90		0.40	1.778	1.950	0.911	1.10	0.60
0.11	1.617	2.533	0.638	1.57	0.89		0.41	1.785	1.939	0.920	1.09	0.59
0.12	1.621	2.493	0.650	1.54	0.88		0.42	1.792	1.929	0.929	1.08	0.58
0.13	1.626	2.455	0.662	1.51	0.87		0.43	1.799	1.918	0.938	1.07	0.57
0.14	1.631	2.421	0.674	1.48	0.86		0.44	1.806	1.909	0.946	1.06	0.56
0.15	1.635	2.389	0.684	1.46	0.85		0.45	1.814	1.899	0.955	1.05	0.55
0.16	1.640	2.359	0.695	1.44	0.84		0.46	1.822	1.890	0.964	1.04	0.54
0.17	1.645	2.331	0.706	1.42	0.83		0.47	1.829	1.880	0.973	1.03	0.53
0.18	1.650	2.305	0.716	1.40	0.82		0.48	1.837	1.871	0.982	1.02	0.52
0.19	1.655	2.281	0.726	1.38	0.81		0.49	1.846	1.863	0.991	1.01	0.51
0.20	1.660	2.257	0.735	1.36	0.80		0.50	1.854	1.854	1..000	1.00	0.50
m'^2	K'	K	K'/K	K/K'	m^2		m'^2	K'	K	K'/K	K/K'	m^2

2.2.4. Redes de fluxo

As redes de fluxo são constituídas por uma família de curvas de iguais valores de cargas hidráulicas, conhecidas como linhas equipotenciais, que se cruzam com outra família de curvas que representam as trajetórias macroscópicas do fluido através do maciço de solo, conhecidas como linhas de fluxo. Para um solo isotrópico, as redes de fluxo são a solução gráfica da equação governante de

Laplace, apresentando interseções ortogonais entre ambas as linhas de fluxo e equipotenciais, conforme ilustra a figura 2.5, formando figuras que são basicamente quadrados ou retângulos de mesma proporção entre comprimento e altura. As perdas de carga hidráulica entre equipotenciais sucessivas ΔH é uma constante da rede, bem como a parcela de vazão ΔQ entre duas linhas de fluxo consecutivas, que formam um canal de fluxo.

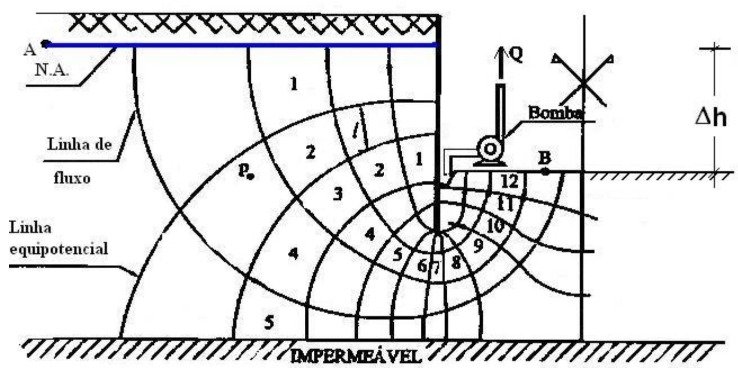


Figura 2.5 – Rede de fluxo no caso de bombeamento do lençol freático (Urbano, 1999)

A importância prática desta solução gráfica, é que permite a fácil determinação de 3 quantidades fundamentais dos problemas de percolação, ou seja, a vazão Q no maciço de solo, as cargas (de elevação, de pressão e hidráulicas) e o gradiente hidráulico em qualquer ponto do meio poroso.

A vazão é calculada por

$$Q = k\Delta h \frac{n_f}{n_d} = k\Delta h \int \tag{2.22}$$

onde $\int$ é o fator de forma da rede de fluxo definido como o quociente entre o número de canais de fluxo n_f e o número de quedas de equipotenciais n_d.

Para determinação da carga hidráulica h^P em um ponto qualquer P, diminui-se da carga hidráulica máxima h^{max} o número aproximado de quedas, inclusive fracionário, até este ponto, i.e.,

$$h^P = h^{\max} - n_d^P \Delta H \quad \text{onde} \quad \Delta H = \frac{\Delta h}{n_d} \tag{2.23}$$

Logo, a carga de pressão h_p^P pode ser determinada sabendo a posição do ponto P em relação ao nível de referência escolhido, o que define sua carga de elevação h_e^P

$$h_p^P = h^P - h_e^P \tag{2.24}$$

e a correspondente poropressão multiplicando o valor da carga de pressão pelo peso específico do fluido (no caso água) γ_w

$$u^P = h_p^P \gamma_w \tag{2.25}$$

O valor aproximado do gradiente de fluxo é aproximadamente calculado dividindo-se o valor da perda de carga entre equipotenciais sucessivas ΔH pelo comprimento médio do "quadrado" onde se situa o ponto P, medido em escala na rede ao longo da direção das linhas de fluxo. Caso se necessite de uma maior precisão do valor do gradiente hidráulico, pode-se refinar localmente a rede de fluxo subdividindo-se a região do ponto P em "quadrados" menores.

No caso de fluxo permanente em solos anisotrópicos, a rede deve ser desenhada em um domínio transformado, modificando-se a escala do desenho na direção da permeabilidade principal maior. Para solos estratificados ou compactados, esta direção é geralmente a horizontal, fazendo com que as abscissas x que descrevem a geometria do problema sejam transformadas para x_T de acordo com

$$x_T = x\sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \qquad \text{ou} \qquad x = x_t\sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \tag{2.26}$$

Desenhada a rede de fluxo no domínio transformado, onde a equação de Laplace é recuperada, a vazão Q pode ser determinada pela equação (2.22) considerando um coeficiente de permeabilidade isotrópico equivalente $\bar{k}$

$$\bar{k} = \sqrt{k_x k_y} \tag{2.27}$$

As cargas hidráulicas, medidas na direção vertical (y) podem ser obtidas diretamente no domínio transformado, enquanto que o gradiente hidráulico i no ponto P deve ter o comprimento médio do "quadrado" recalculado para o domínio real através da segunda das expressões da equação (2.26).

No caso de fluxo permanente através de dois solos isotrópicos de diferentes coeficientes de permeabilidade (figura 2.6), as linhas de fluxo na interseção entre estes solos sofrem uma deflexão que, de acordo com a Lei de Snell, pode ser matematicamente expressa por

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{k_1}{k_2} \tag{2.28}$$

onde, α_1 e α_2 são os ângulos que a linha de fluxo forma com a normal à interface nos solos de permeabilidade k_1 e k_2 , respectivamente.

Quanto às linhas equipotenciais, os “quadrados” desenhados no solo 1 se transformam no solo 2 em retângulos com razão comprimento / largura diretamente proporcional ao quociente k_2 / k_1. Se os solos 1 e/ou 2 forem anisotrópicos, a rede de fluxo deve ser desenhada no domínio transformado.

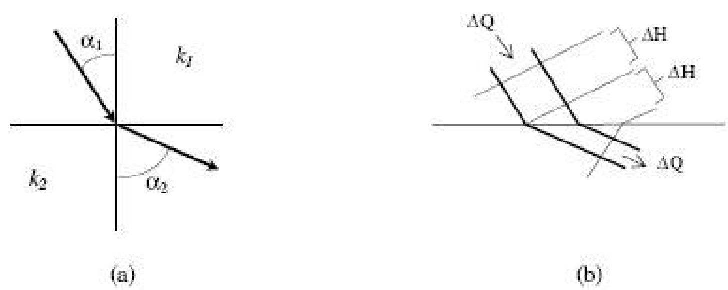


Figura 2.6 - Fluxo através da interface de solos com diferentes permeabilidades (Scott, 1968)

O emprego da rede de fluxo para solução de problemas de fluxo permanente foi muito utilizado na engenharia geotécnica, permanecendo como uma valiosa ferramenta de ensino mas que na prática está sendo gradualmente substituída pela aplicação de métodos numéricos, popularizados pela grande disponibilidade de microcomputadores e programas computacionais específicos, os quais oferecem resultados mais aproximados.

2.2.5. Método das diferenças finitas

Uma expressão aproximada da equação de Laplace (eq. 2.13) pode ser obtida através do método das diferenças finitas, considerando-se que a carga hidráulica é uma função da distância e que no “quadrado” de fluxo da figura 2.7 os valores aproximados de h nos pontos 1, 2, 3 e 4 podem ser obtidos pela expansão de Taylor nas vizinhanças do ponto 0.

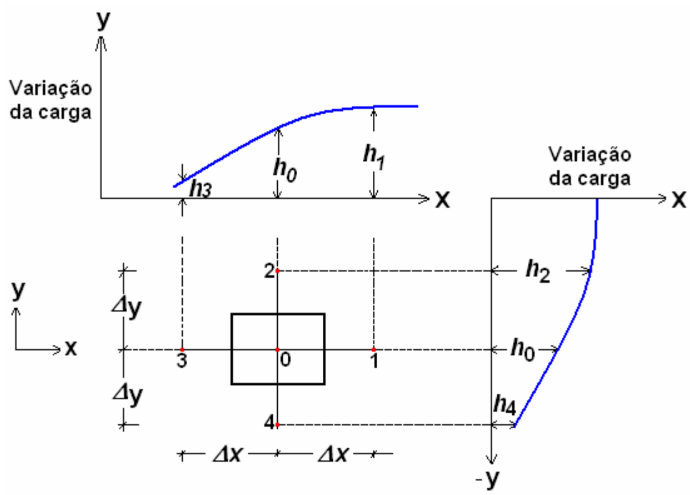


Figura 2.7 – Convenção para numeração no método das diferenças finitas (Scott, 1968)

$$h_1 = h_0 + \Delta x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_0 + \cdots \tag{2.29a}$$

$$h_3 = h_0 - \Delta x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_0 + \cdots \tag{2.29b}$$

Somando-se as equações (2.29a) e (2.29b) resulta

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{h_1 + h_3 - 2h_0}{(\Delta x)^2} - \frac{2(\Delta x)^2}{4!}\left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\right)_0 - \cdots \tag{2.30}$$

Logo, a segunda derivada da carga hidráulica com respeito à distância x pode ser aproximadamente escrita como

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{h_1 + h_3 - 2h_0}{(\Delta x)^2} \tag{2.31}$$

Com erro proporcional ao quadrado do tamanho da malha $(\Delta x)^2$ e da ordem

$$-\frac{(\Delta x)^2}{12}\left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\right)_0 - \cdots$$

Similarmente, a derivada segunda da carga hidráulica na direção y pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{h_2 + h_4 - 2h_0}{(\Delta y)^2} \tag{2.32}$$

Também com erro proporcional ao quadrado do tamanho da malha $(\Delta y)^2$ e da ordem $-\frac{(\Delta y)^2}{12}\left(\frac{\partial^4 h}{\partial y^4}\right)_0 - \cdots$

A equação de Laplace é finalmente aproximada por

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \approx \frac{h_1 + h_3 - 2h_0}{(\Delta x)^2} + \frac{h_2 + h_4 - 2h_0}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{2.33}$$

Simplificando para o caso de uma malha quadrada $\Delta x = \Delta y$ em

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_0 = 0 \tag{2.34}$$

No caso de solos anisotrópicos, a malha quadrada deve ser desenhada no domínio transformado por meio das regras de transformação expressas pelas equações (2.26) e (2.27).

Para fluxo através de solos de diferentes permeabilidades (figura 2.8), tem-se considerando apenas o coeficiente de permeabilidade da camada 1,

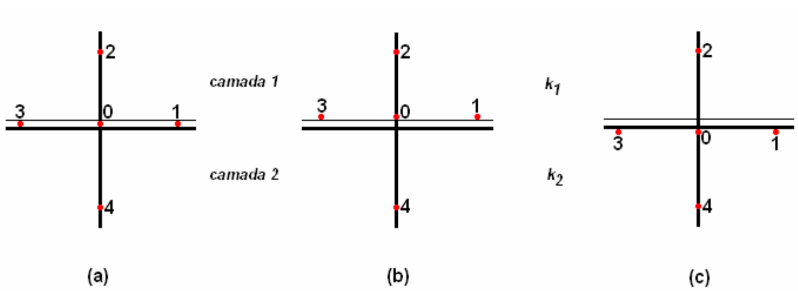


Figura 2.8 – Solos de diferentes permeabilidades pelo método das diferenças finitas (Scott, 1968)

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4' - 4h_0 = 0 \tag{2.35}$$

onde h_4' não é a correta posição do ponto 4 na camada 2 mas uma localização fictícia que satisfaz a equação (2.35).

Similarmente, obtém-se considerando o coeficiente de permeabilidade da camada 2, onde h_2' satisfaz a equação (2.36) mas não indica a real posição do ponto 2 na camada 1.

$$h_1 + h_2^{'} + h_3 + h_4 - 4h_0 = 0 \qquad (2.36)$$

Subtraindo-se (2.36) de (2.35) resulta

$$h_2 - h_2^{'} + h_4^{'} - h_4 = 0 \qquad (2.37)$$

Porém, a velocidade normal à interface deve ser igual em cada camada, em virtude da continuidade do fluxo,

$$k_1\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_1 = k_2\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_2 \qquad (2.38)$$

onde n é o vetor unitário que indica a direção normal à interface.

Aproximando-se as primeiras derivadas da equação (2.38) por diferenças finitas, resulta

$$k_1 \frac{h_4^{'} - h_2}{2\Delta y} = k_2 \frac{h_4 - h_2^{'}}{2\Delta y} \qquad (2.39)$$

Considerando as equações (2.37) e (2.39) é possível determinar uma expressão para $h_2^{'}$ que, substituída na equação (2.36), produz finalmente

$$h_1 + \frac{2k_1}{k_1 + k_2} h_2 + h_3 + \frac{2k_2}{k_1 + k_2} h_4 - 4h_0 = 0 \qquad (2.40)$$

As equações (2.34) – ou (2.40) para camadas de solos heterogêneos – fornecem uma equação para cada ponto da malha de diferenças finitas, formando um sistema de equações que, em conjunto com as condições de contorno essenciais do problema (i.e., em termos de carga hidráulica), permitem o cálculo através de um computador o cálculo aproximado das cargas hidráulicas, bem como valores de carga de pressão (equação 2.24) e velocidades de fluxo.

A figura 2.9a mostra uma representação gráfica da equação (2.34) para um ponto no interior do domínio, enquanto as figuras 2.9b e 2.9c se referem aos casos de contorno inferior impermeável e de fluxo ao redor de cortina impermeável, respectivamente.

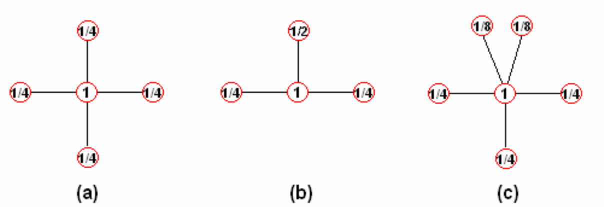


Figura 2.9 – Representação gráfica para os casos: (a) nó interior, (b) contorno impermeável, (c) cortina impermeável (Harr, 1977)

2.2.6.
Método da caminhada aleatória (método de Monte Carlo)

Considere uma partícula de água no ponto 0 da figura 2.10a. em fluxo permanente 2D através de um maciço de solo homogêneo e isotrópico.

Admitindo o movimento aleatório, a probabilidade da partícula atingir o ponto i = 1, 2, 3 ou 4 é a mesma, i.e., p_i = ¼. Conseqüentemente, se a probabilidade da partícula encontrar-se no ponto i é p_i, então a probabilidade combinada de no próximo movimento da caminhada aleatória retornar ao ponto 0 é expressa por equação semelhante ao cálculo aproximado da carga hidráulica h_0 através da equação (2.34).

$$p_0 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \tag{2.41}$$

A combinação de duas teorias – a teoria probabilística de processos aleatórios e a teoria de potenciais – permite então o estudo de estados de equilíbrio, como o fluxo estacionário de fluidos através de materiais porosos.

Considere a barragem de concreto da figura 2.10, sobre uma camada de solo homogêneo e isotrópico. Os contornos BC e AGFED são impermeáveis e a carga hidráulica à montante é h_1 e à jusante h_2. Uma malha quadrada é desenhada no solo de fundação e a caminhada da partícula d'água inicia-se aleatoriamente do ponto P, movendo-se nas direções dos pontos 1, 2, 3 ou 4 da figura 2.10b conforme o número aleatório $1 \leq n \leq 4$ gerado em um computador. O movimento é refletido para o interior do domínio cada vez que contornos impermeáveis são atingidos.

Finalmente, a partícula deve atingir o contorno de carga hidráulica máxima ou o contorno de carga hidráulica mínima. Em qualquer dos casos, associa-se o valor da carga hidráulica determinado nesta caminhada como h = h_1 ou h = h_2 .

A partir do ponto P, suponha que N_1 caminhadas atingiram o contorno de montante (h_1) e N_2 caminhadas terminaram no contorno de jusante (h_2). Logo, o valor esperado da carga hidráulica em P pode ser determinado por

$$h^P = \frac{N_1 h_1 + N_2 h_2}{N_1 + N_2} \tag{2.42}$$

A caminhada aleatória é também conhecida como método de Monte Carlo, onde resultados aleatórios são previstos em associação com equações recorrentes como as eqs. (2.34) ou (2.41).

A precisão da estimativa aumenta com o número de caminhadas e com o acréscimo ou refinamento da malha de pontos (figura 2.10). A convergência da solução é lenta, inversamente proporcional à raiz quadrada do número de caminhadas, o que torna a caminhada aleatória aplicável na prática somente com uso de computadores. A caminhada aleatória também não é utilizada para problemas de fluxo não-confinado.

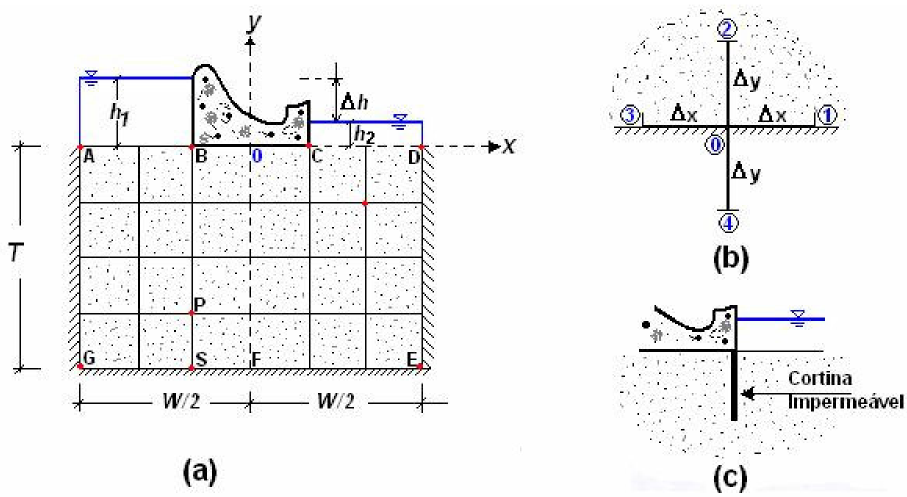


Figura 2.10 - Método da caminhada aleatória (a) e condições de contorno impermeáveis (b, c)

2.2.7. Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é atualmente a técnica mais popular e versátil para análise de problemas de fluxo permanente ou transiente, bi ou tridimensionais. Incorpora a existência de vários materiais com diferentes coeficientes de permeabilidade, impõe condições de contorno complexas, acopla o problema hidráulico com o problema de análise de tensões, considera a situação de fluxo não-saturado onde a condutividade hidráulica é dependente de valores de sucção.

Aplicações do método para problemas de fluxo não-confinado não apresentam maiores dificuldades, e para o caso de fluxo não-confinado, como nos exemplos numéricos tratados nesta dissertação, há dois procedimentos geralmente empregados na literatura: a) análise com malha variável; b) análise com malha fixa.

Na primeira abordagem (malha variável), uma técnica iterativa é empregada, resolvendo-se um problema de fluxo permanente considerando-se uma provável posição inicial da linha de freática. À semelhança do traçado de redes de fluxo, a localização da linha freática é alterada a cada nova interação, até que as condições dos nós da linha freática (carga de pressão nula) sejam satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

Na segunda abordagem, empregada nos *softwares* utilizados neste trabalho (Seep/W 2004, Seep3D v.1.15), o problema de fluxo não-confinado é reformulado pela introdução de uma função de condutividade hidráulica não-linear (relação entre coeficiente de permeabilidade e poropressão), conforme proposta inicial na literatura sugerida por Bathe e Khoshgoftaar (1979). O problema da não-linearidade geométrica é substituído por um problema de não-linearidade do material, permitindo a análise de fluxo não-confinado nas condições saturada e não-saturada. Adicionalmente, o esquema de solução, sob ponto de vista computacional, é baseado nas mesmas técnicas de solução dos problemas não-lineares utilizados em problemas de análise de tensão (Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado, comprimento do arco).

Inicialmente, as cargas hidráulicas em toda a malha de elementos finitos são consideradas iguais à carga hidráulica máxima do problema (sugestão de Bathe e Khoshgoftaar, 1979) ou uma análise preliminar é executada admitindo-se um caso de fluxo confinado.

As cargas de pressão nos pontos de integração são então obtidas (interpolação das cargas hidráulicas nodais para os pontos de integração com a subtração das respectivas cargas de elevação), permitindo a determinação da permeabilidade do material de acordo com a função de condutividade hidráulica não linear ilustrada na figura 2.11.

A matriz de fluxo global pode então ser construída

$$[K]^{(i-1)} = \sum_{m=1}^{n} \int_{V^{(m)}} \left[B^{(m)}\right]^T \left[C^{(m)(i-1)}\right]\left[B^{(m)}\right] dV^{(m)} \tag{2.43}$$

onde $[K]^{(i-1)}$ é a matriz de fluxo global na iteração (i-1) considerando os n elementos da malha, $\left[\mathrm{B}^{(m)}\right]$ é a matriz que relaciona gradientes com cargas hidráulicas nodais no elemento m, $\left[C^{(m)(i-1)}\right]$ é a matriz das permeabilidades principais na iteração (i-1).

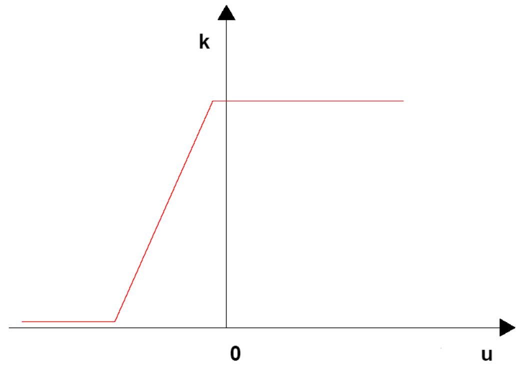


Figura 2.11 – Representação esquemática da função de condutividade hidráulica (Gioda e Desireri, 1988)

O cálculo do acréscimo de carga hidráulica em todos os nós da malha é obtido por meio da equação do método dos elementos finitos

$$[K]^{(i-1)}\{\Delta r\}^{i} = \{R\} - \{F\}^{(i-1)} \tag{2.44a}$$

onde $\{\Delta r\}^{i}$ é o vetor global das cargas hidráulicas nodais, $\{R\}$é o vetor das cargas hidráulicas nodais prescritas nos contornos e $\{\mathrm{F}^{(i-1)}\}$ o vetor das cargas hidráulicas balanceadas na iteração (i-1) expresso por,

$$\{\mathrm{F}^{(i-1)}\} = \sum_{m=1}^{n} \int_{V^{(m)}} [\mathrm{B}^{(m)}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{C}^{(m)(i-1)}] [\mathrm{B}^{(m)}] \{\mathrm{r}^{(i-1)}\} \mathrm{dV}^{(m)} \tag{2.44b}$$

O vetor das cargas hidráulicas nodais acumuladas pode então ser atualizado.

$$\{r\}^{i} = \{r\}^{i-1} + \{\Delta r\}^{i} \tag{2.45}$$

Uma nova iteração deve ser realizada caso o critério de convergência abaixo não seja satisfeito dentro de terminada tolerância especificada pelo usuário

$$\left\| \{\Delta r^{(i)}\} \right\|_2 \Big/ \left\| \{r^{(i)}\} \right\|_2 << 1 \tag{2.46}$$

Na prática, freqüentemente emprega-se o método de Newton-Raphson Modificado, no qual a matriz de fluxo global não necessita ser atualizada a cada nova iteração, podendo ser triangularizada para resolver o sistema de equações com menor esforço computacional.

Uma questão que precisa ser discutida é como considerar a função de condutividade hidráulica para o caso envolvendo presença de solos não-saturados. No caso da interface tradicional saturada / seca a utilização de uma função de condutividade hidráulica de grande inclinação pode criar problemas de convergência e, de fato, programas comerciais como o Seep/W não convergem quando a função se aproxima de uma linha teórica vertical como a ilustrada na figura 2.12.

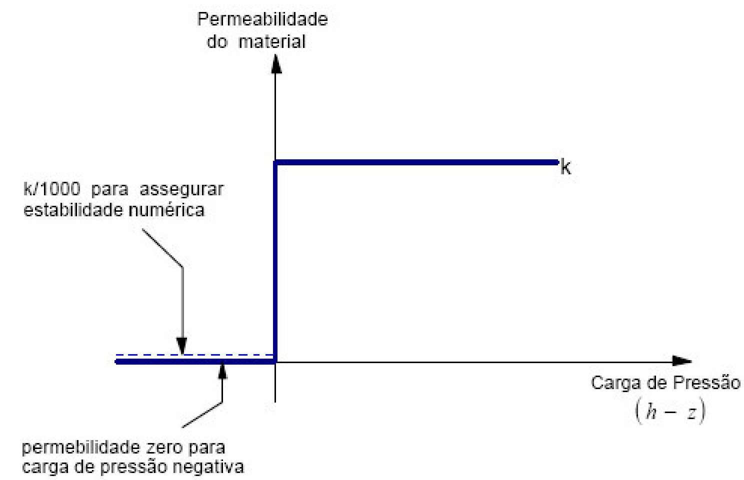


Figura 2.12 – Variação abrupta do coeficiente de permeabilidade com a carga de pressão para representação da interface solo seco – solo saturado (Bathe e Khoshgoftaar, 1979)

Nesta situação, outros programas computacionais como o Plaxis v.8 emprega um coeficiente de redução da permeabilidade k^r para a região não saturada, como sugerido por Desai (1976), Li e Desai (1976), Bakker (1989), conforme os gráficos da figura 2.13.

Na zona de transição a função de condutividade hidráulica é descrita pela relação:

$$k^r = 10^{-\frac{4h_p}{h_p^k}} \qquad \text{para} \qquad 10^{-4} \le k^r \le 1 \tag{2.47a}$$

ou

$$\log_{10} k^r = -4\frac{h_p}{h_p^k} \tag{2.47b}$$

onde h_p é a carga de pressão e h_p^k seu correspondente valor quando o coeficiente de redução k^r atinge o valor mínimo de 10^{-4}. No programa Plaxis v.8, $h_p^k = 0{,}7m$ para todo o tipo de solo.

Admitindo-se que esta estratégia é suficiente para evitar problemas de convergência na análise não-linear do problema de fluxo não-confinado em solo seco – solo saturado, na região de sucção é considerado um decréscimo exponencial do coeficiente de permeabilidade saturado k (equação 2.47a) até o valor limite $10^{-4}k$ correspondente a uma carga de pressão $\frac{h_p}{h_p^k} = \frac{h_p}{0,7} = 1$, ou

$h_p = 0,7m$ ou pressão de sucção $u = 7kPa$.

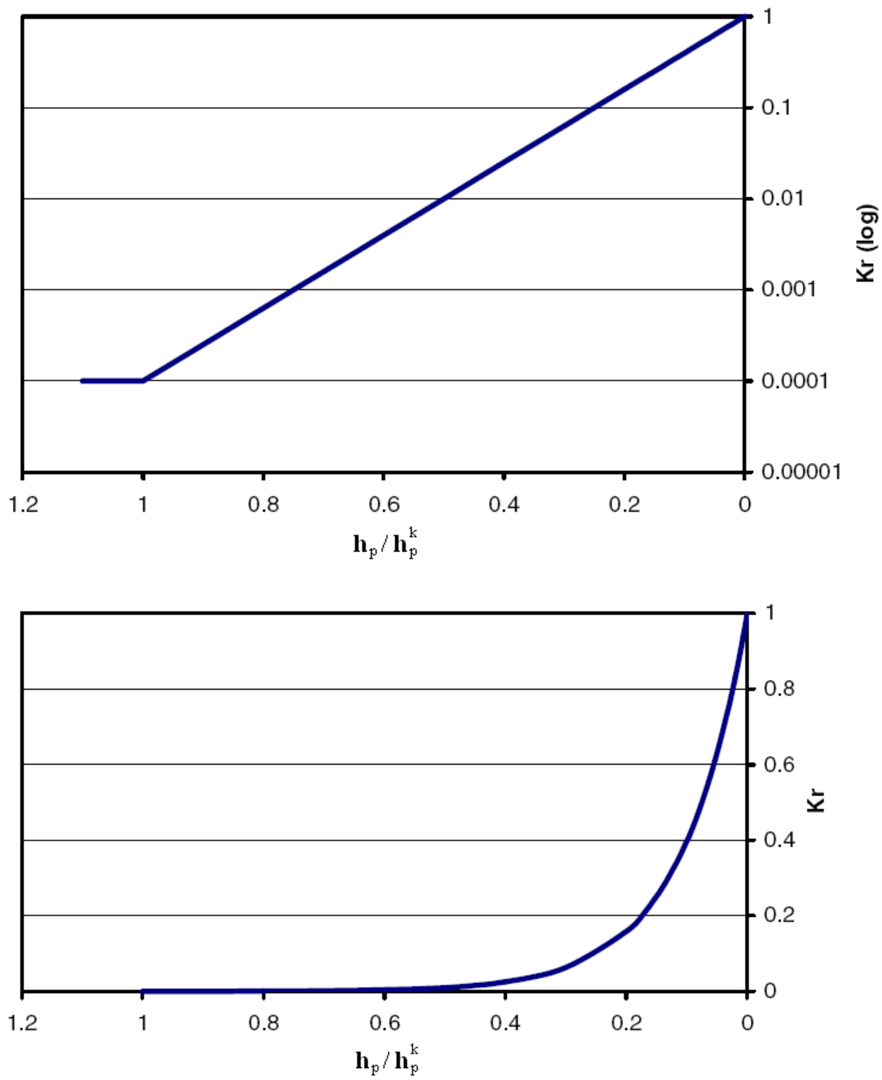


Figura 2.13 – Variação do coeficiente de redução de permeabilidade k^r com a razão entre cargas de sucção - escalas logarítmica e aritmética (Plaxis v.8)

Na prática, a função de condutividade hidráulica para o caso envolvendo solos não saturados é modelada com base na curva de sução e granulométrica, ténicas que foram desenvolvidos por Fredlund e Xing (1984), Genuchten (1980) e outros; tudo isto com o propósito de evitar problemas de convergência, aproveitando as propriedades de cada material, aproximadando-se claramente ao problema real.

2.3.
Solução numérica da equação tridimensional de Richard

A versatilidade do método de elementos finitos na solução de problemas de fluxo não se resume apenas ao caso de fluxo permanente 2D, como na maioria dos modelos citados anteriormente, podendo ser aplicado para casos de fluxo tridimensional e transiente em meios porosos.

O estado de tensões para solos saturados ou não-saturados pode ser descrito por duas variáveis de estado (Fredlund e Morgenstern, 1977): $(\sigma - u_a)$ e $(u_a - u_w)$ onde σ é a tensão total, u_a a pressão do ar no poro e u_w a pressão de água. No caso de tensões totais constantes (i.e, sem carregamentos ou descarregamentos) e a pressão do ar é mantida constante e igual à pressão atmosférica, então a variável $(\sigma - u_a)$ não tem efeito sobre a variações do teor de umidade volumétrico, que são causadas basicamente por mudanças na variável $(u_a - u_w)$, ou seja, por variações somente da poropressão já que a pressão do ar é mantida constante. Esta é a situação, por exemplo, de percolação através de barragens de terra ou rebaixamento do lençol freático, casos examinados nos capítulos de exemplo.

Logo, a variação do teor de umidade volumétrico pode ser relacionada com a variação da poropressão através de

$$\partial\theta = m_w u_w \tag{2.48}$$

onde m_w é a inclinação da curva que representa a função do teor de umidade volumétrico (figura 2.15).

O valor da poropressão pode ser expresso em termos da carga hidráulica h e da carga de elevação z

$$u_w = \gamma_w (h - z) \tag{2.49}$$

e a equação de Richard (eq. 2. 10) ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = m_w \ \gamma_w \ \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.50}$$

As equações do método dos elementos finitos podem ser obtidas pela aplicação do método de Galerkin como

$$\int_V \left([B]^T [C][B] dV\right)\{H\} + \int_V \left(m_w \gamma_w [N]^T [N] dV\right)\{\dot{H}\} = \int_A \left(q[N]^T [N] dA\right) \tag{2.51}$$

ou

$$[K]\{H\} + [M]\{\dot{H}\} = \{Q\} \tag{2.52}$$

onde

$$[K] = \int_V \left([B]^T [C][B] dV\right) \quad - \quad \text{matriz de fluxo} \tag{2.52a}$$

$$[M] = \int_V \left(m_w \gamma_w [N]^T [N] dV\right) \quad - \quad \text{matriz de massa} \tag{2.52b}$$

$$\{Q\} = \int_A \left(q[N]^T [N] dA\right) \quad - \quad \text{vetor dos fluxos nodais} \tag{2.52c}$$

com

H = carga hidráulica nodal

$\dot{H} = \partial H / \partial t$ = derivada no tempo da carga hidráulica nodal

[B] = matriz dos gradientes de fluxo

[C] = matriz das condutividades hidráulicas

[N] = matriz das funções de interpolação

q = fluxo prescrito no contorno por unidade de área

A solução pelo método dos elementos finitos de um problema de fluxo transiente (eq. 2.51) envolve a derivada no tempo da variável primária H. A integração no tempo pode ser realizada através do método das diferenças finitas, resultando em (Segerlind, 1984):

$$(\omega \Delta t[K] + [M])\{H\}_1 = \Delta t\left((1-\omega)\{Q\}_0 + \omega\{Q\}_1\right) + \{[M] - (1-\omega)\Delta t[K]\}\{H\}_0 \tag{2.53}$$

onde

Δt = incremento de tempo

ω = fator entre 0 e 1, selecionando o algoritmo de integração no tempo

$\{H\}_1$ = carga hidráulica nodal no final do incremento de tempo

$\{H\}_0$ = carga hidráulica nodal no início do incremento de tempo

$\{Q\}_1$ = fluxo nodal no final do incremento de tempo

$\{Q\}_0$ = fluxo nodal no início do incremento de tempo

Para o caso do método das diferenças finitas descendentes (incondicionalmente estável) o valor selecionado é $\omega = 1$, simplificando a equação (2.53) para

$$(\Delta t[K] + [M])\{H\}_1 = \Delta t\{Q\}_1 + [M]\{H\}_0 \qquad (2.54)$$

O valor de m_w necessário para a construção de [M] é obtido em cada ponto de integração de Gauss com base na curva de teor de umidade volumétrico (figura 2.15). O valor utilizado não corresponde ao da tangente à curva mas sim ao valor secante obtido com auxílio das poropressões computadas no início e no final do incremento de tempo.

2.4. Fluxo em meios não-saturados

Os programas computacionais utilizados nesta dissertação (Seep/W 2004, Seep3D v.1.15) são também capazes de executar análises em meios não-saturados bem como análises transientes, permitindo acompanhar no tempo o rebaixamento de lençol freático ou o avanço da frente de saturação em barragens de terra com o enchimento do reservatório.

Em realidade, na natureza a maioria dos processos de fluxo ocorre em meios não-saturados. Em um solo inicialmente seco, por exemplo, sujeito à infiltração de água pela sua superfície, o gradiente hidráulico é mais alto junto à frente de umedecimento, com uma parcela preponderante do gradiente devido a efeitos de sucção. Em geral, os altos valores de gradientes desenvolvidos compensam os baixos valores dos coeficientes de permeabilidade de solos não-saturados, possibilitando assim a ocorrência de fluxo nestes materiais.

O coeficiente de permeabilidade varia portanto com o grau de saturação do meio, decrescendo com a presença de ar nos vazios. Com a diminuição do grau de saturação, os vazios maiores, responsáveis em grande parte pela condutividade hidráulica do meio poroso, são os primeiros a serem drenados, interrompendo o canal de fluxo, com o volume de água neles remanescente se concentrando sob forma de meniscos no contato com as partículas. A maior parte do fluxo se transfere para os vazios menores, diminuindo assim o coeficiente de permeabilidade do meio em até 100 mil vezes em relação ao seu valor na condição saturada. Para baixos teores de umidade ou altas sucções o coeficiente de permeabilidade pode ser tão pequeno que podem ser necessários gradientes hidráulicos elevados ou intervalos de tempo muito grandes para que seja possível detectar a ocorrência de fluxo no meio.

A lei de Darcy foi originalmente obtida para solos saturados, mas pesquisas posteriores demonstraram que pode ser aplicada para problemas de fluxo em meios não-saturados (Childs & Collins-george, 1950), observando-se que para estes casos a condutividade hidráulica não é mais um valor constante mas varia com mudanças do teor de umidade volumétrico e de poropressão.

A solução do problema de fluxo através de meios não-saturados é, portanto, mais complexa do que para meios saturados em virtude desta interdependência entre os valores do coeficiente de permeabilidade e da carga de pressão, descrita pela função de condutividade hidráulica (figura 2.14). No caso de fluxo transiente, é ainda necessário conhecer-se a variação do teor de umidade volumétrico com a poropressão, relação esta expressa pela função do teor de umidade volumétrico ou função característica de sucção, conforme figura 2.15.

Uma análise geral de processos de fluxo através de meios porosos portanto requer o conhecimento de ambas as funções com base na realização direta de ensaios de laboratório ou por meio indireto através de correlações. A função do teor de umidade volumétrico pode ser aproximada com base na curva de distribuição granulométrica e a função de condutividade hidráulica pode ser obtida utilizando-se a função do teor de umidade volumétrico e o coeficiente de permeabilidade na condição saturada.

2.4.1. Determinação indireta da função de condutividade hidráulica

A determinação direta da função de condutividade hidráulica pode ser, em princípio, estabelecida diretamente através da execução de ensaios de laboratório, obtendo-se os valores dos coeficientes de permeabilidade da amostra de solo sob vários níveis de sucção controlada. As técnicas de ensaio estão documentadas na literatura mas há dificuldades nesta determinação experimental, geralmente associadas com fenômenos de difusão do ar e devido às pequenas quantidades de fluxo medidas (Brooks e Corey, 1996).

Alternativamente, a função de condutividade pode ser obtida indiretamente por meio de uma função do teor de umidade volumétrica determinada em laboratório (célula de pressão) ou modeladas através de várias propostas publicadas na literatura, como a ténica do papel filtro.

O teor de umidade volumétrico (θ) é definido pela equação 2.55 como o volume de água (V_w) presente no interior do meio poroso em relação ao seu volume total. É dependente dos valores da poropressão, conforme ilustra a curva característica de sucção da figura 2.15. Quando o grau de saturação for 100%, o teor de umidade volumétrico é equivalente à definição da porosidade do solo, razão entre o volume de vazios e seu volume total (fig. 2.16). A inclinação da curva característica de sucção (m_w) representa a taxa de variação da quantidade de água armazenada em resposta à variação da poropressão da água existente nos vazios.

$$\theta = V_w / V \tag{2.55}$$

A função do teor de umidade volumétrico para solos coesivos tem configuração relativamente horizontal enquanto que para solos granulares pode apresentar-se bastante inclinada, evidenciando que além dos valores de poropressão a curva característica de sucção depende também das propriedades do solo (figura 2.17).

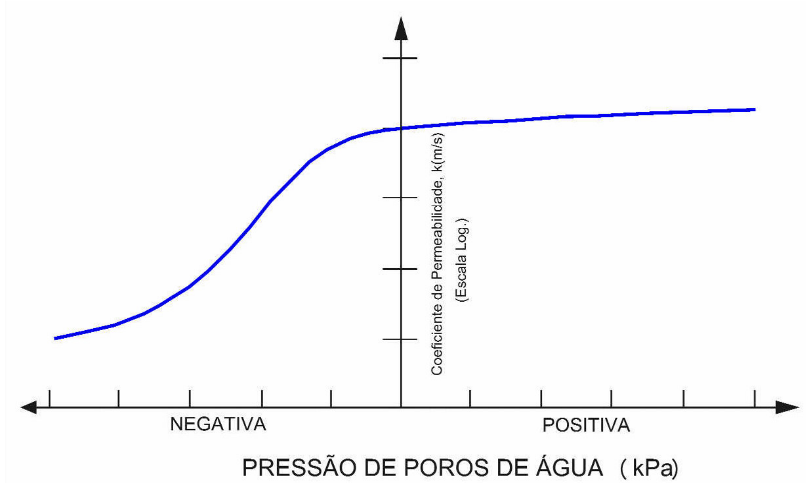


Figura 2.14 – Função de condutividade hidráulica (Fredlund e Rahardio, 1993)

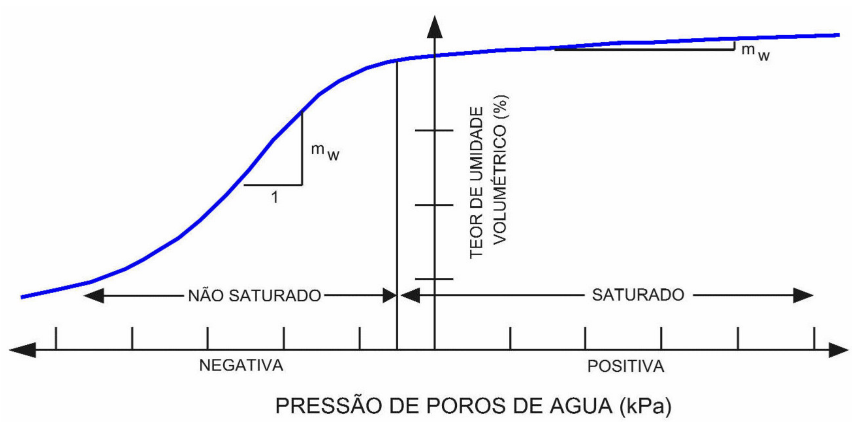


Figura 2.15 – Função do teor de umidade volumétrico (Fredlund e Rahardio, 1993)

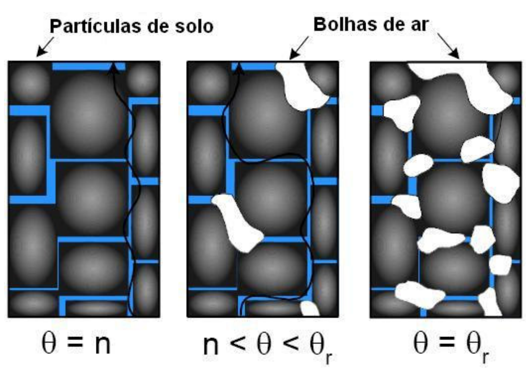


Figura 2.16 – Esquematização da trajetória de fluxo desde a saturação até atingir o teor de umidade residual. (Krahn, 2004)

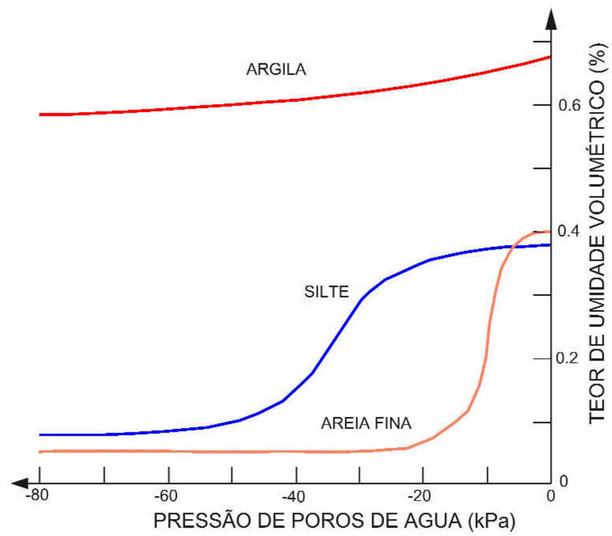


Figura 2.17 – Funções do teor de umidade volumétrico para areia fina, silte e argila (Ho, 1979)

2.4.1.1. Método de Fredlund, Xing e Huang (1994)

Este método permite calcular o coeficiente de permeabilidade k correspondente ao teor de umidade volumétrico θ através da integração (ou soma) da função do teor de umidade volumétrico proposta por Fredlund e Xing (1994) no intervalo de sucção entre 0 a 10^6 kPa. Este método produz, em princípio, melhores resultados para solos arenosos do que para coesivos e encontra-se implementado nos programas computacionais Seep/W 2004.

$$k(\psi) = k_s \frac{\sum_{i=j}^{N} \frac{\theta(e^{yi}) - \theta(\psi)}{e^{yi}} \theta'(e^{yi})}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\theta(e^{yi}) - \theta_s}{e^{yi}} \theta'(e^{yi})} \qquad (2.56)$$

onde:

$k(\psi)$ = coeficiente de permeabilidade na sucção ψ(m/s);

k_s = coeficiente de permeabilidade na condição saturada (m/s);

θ = teor de umidade volumétrico

θ_s = teor de umidade volumétrico na condição saturada

N = número de intervalos de integração ao longo da curva característica de sucção;

e = constante 2,71828

y_i = logaritmo da sucção no meio do intervalo [i, i+1];

i = número do intervalo de integração

j = intervalo de integração correspondente à sucção ψ;

ψ = sucção correspondente a j^{th} intervalo

θ´= derivada da função

$$\theta = C(\psi)\frac{\theta_s}{\left\{\ln\left[e + (\psi / a)^n\right]\right\}^m} \tag{2.57}$$

onde

a, = parâmetro da função de teor de umidade volumétrico relacionado com o valor de entrada de ar (figura 2.18);

n = parâmetro da função de teor de umidade volumétrico que controla a inclinação no ponto de inflexão da curva;

m = parâmetro da função de teor de umidade volumétrico relacionado com o teor de umidade volumétrico residual;

C(ψ) = função de correção definida como

$$C(\psi) = 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{\psi}{C_r}\right)}{\ln\left(1 + 1000000 / C_r\right)} \tag{2.58}$$

onde

Cr = constante relacionada com a sucção mátrica no teor de umidade volumétrico residual. Um valor típico é aproximadamente 1500 kPa.

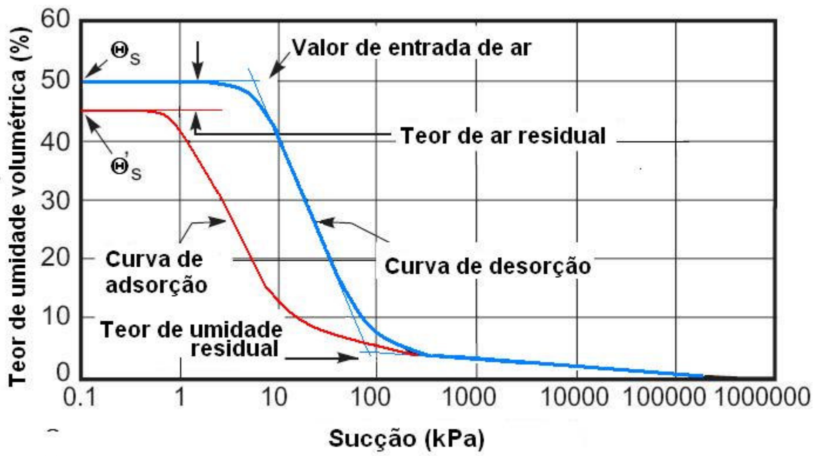


Figura 2.18 – Curva de adsorção e dessorção para um solo de silte (Fredlund, Xing e Huang, 1994)

2.4.1.2. Método de van Genuchten (1980)

Van Genuchten, propôs a seguinte equação analítica para determinação do coeficiente de permeabilidade não saturado k_ψ de um solo em função da sucção mátrica ψ:

$$k_\psi = k_s . \frac{\left[1-\left(a\psi^{(n-1)}\right)*\left(1+(a\psi)^n\right)^{-m}\right]^2}{\left[(1+a\psi)^n\right]^{\frac{m}{2}}} \tag{2.59}$$

onde:

k_s = coeficiente de permeabilidade na condição saturada;

a,n,m = parâmetros para ajuste da curva com (m = 1-1/n), n >1

Da equação (2.59) observa-se que a função de condutividade hidráulica pode ser estabelecida conhecendo-se o coeficiente de permeabilidade na condição saturada e dois parâmetros de ajuste da curva (*a, n* ou *a,m*). De acordo com van Genuchten (1980) estes parâmetros podem ser estimados da função de teor de umidade volumétrica considerando-se um ponto P eqüidistante do teor de umidade volumétrico nas condições saturada e residual.

Se θ_p for o teor de umidade volumétrico neste ponto e ψ_p o correspondente valor da sucção mátrica, então a inclinação S_p da tangente à função neste ponto pode ser calculada como:

$$S_p = \frac{1}{(\theta_s - \theta_r)} \cdot \left[\frac{d\theta_p}{d(\log \psi_p)} \right] \tag{2.60}$$

Van Genuchten (op.cit.) sugeriu o seguinte procedimento para estimativa dos parâmetros *a* e *m* após a avaliação de S_p pela equação (2.60):

$$m = 1 - \exp(-0.8 S_p) \text{ para } 0 < S_p < 1 \tag{2.61a}$$

$$m = 1 - \frac{0.5755}{S_p} + \frac{0.1}{S_p^2} + \frac{0.025}{S_p^3} \text{ para } S_p > 1 \tag{2.61b}$$

$$a = \frac{1}{\psi_P} \left(2^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^{(1-m)} \tag{2.61c}$$

Alternativamente, e principalmente nos casos em que o teor de umidade volumétrico residual não é claramente identificado, o método dos mínimos quadrados considerando-se ajustes não-lineares (van Genutchen, 1978) pode ser empregado para determinação simultânea dos parâmetros *a*, *m* e θ_r.

2.4.2. Determinação indireta da função do teor de umidade volumétrico

Ainda que não seja particularmente difícil a obtenção da função do teor de umidade volumétrico através de ensaios de laboratório, vários métodos indiretos foram propostos na literatura. A seguir, são brevemente mencionados apenas dois dos mais conhecidos.

2.4.2.1. Método de Fredlund e Xing (1994)

O método consiste de uma solução analítica que pode ser usada para obtenção da função de teor de umidade volumétrico θ_ψ caso sejam conhecidos os valores de um conjunto de parâmetros de ajuste da curva (*a, n, m*).

$$\theta_\psi = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left\{ \ln\left[e + \left(\frac{\psi}{a} \right)^n \right] \right\}^m} \tag{2.62}$$

Ou, se a função é previstas no intervalo completo $0 < \theta_w < 10^6$ kPa,

$$\theta_\psi = \frac{\theta_s}{\left\{ \ln\left[e + \left(\frac{\psi}{a} \right)^n \right] \right\}^m} \tag{2.63}$$

onde:

θ_r = teor de umidade volumétrico residual

θ_s = teor de umidade volumétrico saturado

O parâmetro *a*, que tem unidades de kPa, é o ponto de inflexão da função de teor de umidade volumétrico, sendo ligeiramente maior do que o valor de entrada de ar. O parâmetro *n* controla a inclinação da função de teor de umidade volumétrico e o parâmetro *m* o teor de umidade residual.

$$a = \psi_i \tag{2.64}$$

$$m = 3.67 \ln\left(\frac{\theta_s}{\theta_i} \right) \tag{2.65}$$

$$n = \frac{1.31^{m+1}}{m\theta_s} 3.72 s \psi_i \tag{2.66}$$

onde:

ψ_i = sucção correspondente ao teor de umidade volumétrico θ_i onde ocorre o ponto de inflexão da curva característica de sucção;

s = inclinação da tangente à função de teor de umidade volumétrico no ponto de inflexão da curva.

$$s = \frac{\theta_i}{\psi_p - \psi_i} \tag{2.67}$$

onde ψ_p é o intercepto da tangente com o eixo das sucções.

2.4.2.2.
Método de van Genuchten (1980)

Van Genutchen (1980) sugeriu a seguinte equação analítica para obtenção da função de teor de umidade volumétrica:

$$\theta_{\psi} = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\psi}{a}\right)^n\right]^m} \tag{2.68}$$

onde:

a, n, m são parâmetros de ajuste da curva.

O parâmetro a pode ser expresso como uma função de outros dois parâmetros b, c conforme:

$$a = \frac{\psi_{50}}{\left(2^{1/c} - 1\right)^{1/b}} \tag{2.69}$$

considerando

$$\psi_{50} = \frac{\theta_s + \theta_r}{2} \tag{2.70}$$