

7

ASPECTOS IMPORTANTES PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo serão abordados alguns aspectos críticos sobre as possibilidades e limitações envolvidas no desenvolvimento de algoritmos que visem a aplicação prática da teoria envolvendo a dinâmica do replicador.

O problema da sobrevivência de um agente em ambientes competitivos e sujeito às incertezas advém não somente da situação corrente e conseqüências sobre a tomada de decisão, mas principalmente das ações e reações de seus adversários.

Então para solução dos problemas pertinentes a um modelo de setor elétrico, são necessárias técnicas que englobem não somente soluções analíticas, mas que consigam modelar as regras e normas do setor. Por exemplo, a receita de um agente é dependente das normas, das portarias e regras de comercialização que não necessariamente podem ser equacionadas e contribuem assim, para o aparecimento de discontinuidades que elevam o nível de complexidade dos algoritmos de otimização, podendo até mesmo tornar inviável a procura de soluções para os problemas mais comuns deste setor, hoje altamente judicializado.

No diagrama da Figura 7-1 está ilustrado um exemplo de cálculo do *payoff* de um agente do setor, mostrando as etapas necessárias para se obter o retorno, ou penalidades a serem aplicadas ao agente.

A decisão do agente influencia direta ou indiretamente os resultados dos mecanismos de competição. Os resultados desta competição serão contabilizados externamente por um órgão centralizado e fornecidos aos agentes que calculam seus *payoffs* em função das dinâmicas internas de cada empresa, como impactos nos fluxos de caixa, parcelas gerenciáveis, ou não gerenciáveis, o que for considerado mais importante por cada agente.

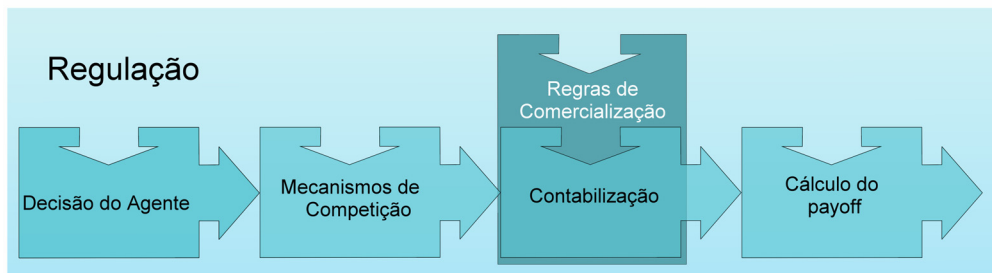


Figura 7-1 – Fluxograma para cálculo dos *payoffs*

A técnica a ser sugerida, portanto, deve considerar a ação de todos os agentes no jogo, tendo a capacidade de lidar com problemas formulados de modo discreto, por regras ou normas, ou contínuo quando for modelado por funções.

O algoritmo deve ser capaz de por si, simular a competição de modo a mostrar ao analista quais as consequências a que cada jogador está submetido numa certa situação e a um determinado conjunto de regras do jogo, ao reagir às estratégias concorrentes de modo a obter as melhores taxas de retorno possíveis dentro dos níveis de risco permitidos.

A ação de um agente que pretenda otimizar sua função utilidade pode ser lucrativa ou não dependendo das estratégias de seus concorrentes. Por exemplo, alguém que queira maximizar seus lucros subindo o preço do produto pode simplesmente ficar fora da concorrência porque o seu concorrente consegue vender a um preço mais baixo. Devemos então considerar as reações dos agentes concorrentes durante o processo de otimização.

A cada passo da convergência objetivando o equilíbrio, ocorrerão reações que desviam as órbitas da sua direção, levando-as a cada momento buscar caminhos que resultem num equilíbrio. Estamos numa situação similar àquela em que tentamos encontrar o ponto de máximo de uma superfície que muda a cada passo do processo de convergência.

Como foi visto, a teoria dos jogos evolutivos nos mostra como alcançar equilíbrios em estratégias puras em um jogo através da dinâmica do replicador. Esta dinâmica relativa a cada estratégia de cada jogador, contém em seu núcleo a matriz de *payoff* do jogo, que representa os resultados da competição das possíveis combinações de estratégias dos jogadores.

Por exemplo, para três jogadores, cada qual com três estratégias, teríamos um cubo de perfis como visto na Figura 7-2.

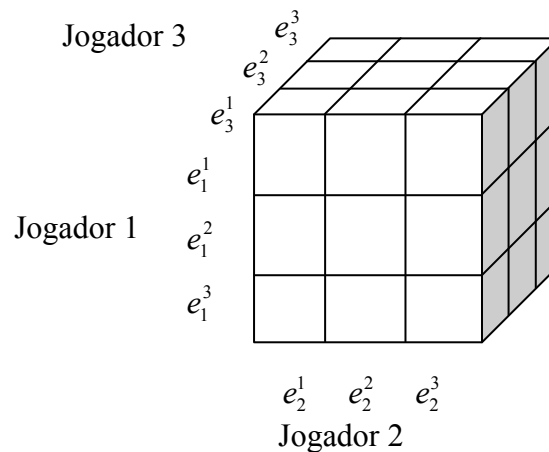


Figura 7-2 – Cubo de *payoffs* resultante de um jogo com 3 jogadores

Estamos lidando então, com um problema numa escala de grandeza do nível de informação de cerca de 3^3 , considerando-se os 3 jogadores, cada qual com 3 estratégias.

A dinâmica do replicador, em sua versão para estratégias discretas pode ser escrita como:

$$\dot{x}_i^k = [e_i^k M_i w_{i-1} - w_i M_i w_{i-1}] x_i^k$$

Onde:

$x_i^k \rightarrow$ é a proporção da estratégia k na população de estratégias do jogador i

$M_i \rightarrow$ matriz de *payoffs* do jogador i

$w_i \rightarrow$ estratégia mista do jogador i , que contém a distribuição das proporções de cada estratégia na população do jogador i , igual a $[x_i^1 \ x_i^2 \ \dots \ x_i^m]$.

$w_{i-1} \rightarrow$ parte do perfil formado pelas estratégias mistas dos outros jogadores que não o jogador i .

Estendendo a dinâmica do replicador para sua forma mais geral representando um jogo com n jogadores e cada jogador dispondo de m estratégias, temos:

$$\dot{x}_{i,k} = \left[w_n \left[\cdots \left[w_j \left[e_i^k M_{i(m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n)} \right]^T \right] \cdots \right]^T - w_n \left[\cdots \left[w_j \left[w_i M_{i(m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n)} \right]^T \right] \cdots \right]^T \right] x_{i,k}$$

O número total de dinâmicas do replicador, ou a dimensão do vetor campo será igual ao número de jogadores vezes o número de estratégias menos 1, ou seja $n*(m-1)$, desde que a proporção de uma estratégia na população pode ser representada por 1 menos a soma das demais proporções, isto é $1 - \sum_{k=1}^{m-1} x_{i,k}$.

Portanto a presença da matriz de *payoff* no *kernel* da dinâmica do replicador, remete-nos, a princípio, a um esforço maior que $n*(m-1)*m^n$ operações e, que num jogo como um leilão do setor elétrico, em que exemplificando possua aproximadamente 200 agentes, entre geradores que competem pela venda de uma energia que deverá atender a uma demanda definida pelas distribuidoras (caso não haja frustração causada pela retirada uma parcela da oferta por parte dos vendedores), com uma faixa de preços de \$ 60,00, discretizados em \$ 0,60, resultaria em $200*(100-1)*100^{200}$, operações aritméticas.

Assim maior problema que surge nesta simulação vem da maldição da dimensionalidade, ou seja, uma competição entre n agentes, cada qual com m estratégias, gerará uma matriz de *payoff* de dimensão $m_1 \times \cdots \times m_n$, com m^n elementos, não esparsa, não simétrica, ou que possua alguma propriedade que permita simplificá-la.

Fica claro neste ponto que não é viável utilizar matrizes de *payoff* deste porte em sua totalidade. Devemos manter em mente a necessidade de modelarmos o problema com matrizes de *payoffs* que viabilizem a abordagem da solução, mantendo a convergência da órbita da dinâmica do replicador para o equilíbrio mais atrator. Deve-se garantir que o equilíbrio mais atrator esteja presente na matriz de *payoff*.

A dinâmica é um processo de atração de um estado inicial qualquer por um equilíbrio assintoticamente estável e o número de tais equilíbrios estritos, definidos como perfis de melhor resposta não podem existir em duplicidade em uma mesma linha ou coluna da matriz de *payoff*, o que limita o número máximo de equilíbrios da matriz de *payoff* em m^{n-1} equilíbrios e conseqüentemente o número máximo possível de equilíbrios estritos será menor que o número total de elementos da matriz de *payoff*. Tal afirmação está enfatizada na Equação 7-1.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1^1 & e_2^1 & \dots & e_m^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_m^1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1m}, b_{1m}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \dots & (a_{2m}, b_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \dots & (a_{mm}, b_{mm}) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{Equação 7-1}$$

Se o perfil (a_{11}, b_{11}) for um equilíbrio estrito é porque a estratégia e_1^1 do primeiro jogador é melhor réplica para a estratégia e_2^1 do segundo jogador do que qualquer outra estratégia e_1^h para todo $h \neq 1$. Do mesmo modo e_2^1 é a melhor réplica(resposta) para e_1^1 do que qualquer outra estratégia do segundo jogador. Por isso tanto na linha 1 referente à primeira estratégia do primeiro jogador, como na primeira coluna do segundo jogador não haverá mais nenhum perfil em equilíbrio estrito e assim toda a matriz de *payoff* pode se resumir a m^{n-1} elementos atratores e geradores das órbitas que representam a concorrência.

Um modo de analisar as relações de dominância e aumentar a esparsidade de matriz de *payoff* manipuláveis, chama-se transformada afim e será descrita a seguir.

7.1 Transformada Afim

Matrizes de *payoff* que diferem somente por alguma transformação afim positiva são equivalentes. Se para cada jogador $i \in I$ existir algum número real positivo λ_i e um número real μ_i tal que $\pi_i'(s) = \lambda_i \pi_i(s) + \mu_i$ para todo $s \in S$, então todas as duas matrizes possuirão as mesmas correspondências de melhor réplica(resposta) e relações de dominância entre as estratégias. Em particular o conjunto $\mathcal{O}^{NE}$ de equilíbrios de Nash é invariante sob estas transformações nos *payoffs*.

Os conjuntos de melhores réplicas(respostas) e ordenações das dominâncias também não são afetadas pela adição de uma mesma constante a todos os *payoffs* de um dado jogador i que estão associados com qualquer perfil complementar s_{-i} dos outros jogadores. Para ser mais preciso, deixe $i \in I$, $\bar{s}_{-i} \in \times_{j \neq i} S_j$ e $\nu_i \in \mathfrak{R}$. Define-se agora $\pi_i' : S \rightarrow \mathfrak{R}$ por $\pi_i'(s) = \pi_i(s) + \nu_i$ se $s_{-i} = \bar{s}_{-i}$ e $\pi_i'(s) = \pi_i(s)$ em

caso contrário. Deixe ainda, $u'_i : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ ser a função de *payoff* da estratégia mista associada a π'_i , então,

$$u'_i(x_i, y_{-i}) - u'_i(z_i, y_{-i}) = u_i(x_i, y_{-i}) - u_i(z_i, y_{-i}) \quad \text{Equação 7-2}$$

para todos os perfis $y \in \Theta$ e estratégias x_i e $z_i \in \Delta_i$ do jogador i . Assim se o jogador i compara quaisquer duas de suas estratégias puras ou mistas ele obterá a mesma diferença entre *payoffs*, independente da constante v_i e das outras estratégias dos outros jogadores. A correspondência de melhor réplica pura ou mista daquele jogador, bem como a ordenação de suas dominâncias estritas ou fracas, não serão afetadas por qualquer variação v_i da sua função de *payoff* de estratégias puras π_i . Em particular o conjunto Θ^{NE} de equilíbrios de Nash é invariante.

Como exemplo recorreremos ao jogo de impedimento de entrada, onde um monopolista lida com a perspectiva de entrada de um concorrente em seu mercado.

As matrizes de *payoff* deste jogo são dadas por:

$$\begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ e } M_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow -4$$

A subtração de uma unidade de cada elemento da coluna um de M_1 mantém a mesma correspondência de melhor réplica do primeiro jogador. Do mesmo modo uma subtração de quatro unidades de cada elemento da segunda linha de M_2 mantém a correspondência de melhor réplica do segundo jogador intacta. Estas transformações resultam nas matrizes M'_1 e M'_2 ,

$$M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_2^{T'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Além destas transformações podemos dividir os elementos de $M_2^{T'}$ por dois sem afetar as melhores réplicas do segundo jogador de forma a obter a matriz $M_2^{T''}$.

$$M_2^{T''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de perfis resultante será $\begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{bmatrix}$

Observemos agora as órbitas geradas pelo par M_1 e M_2^T e pelo par M_1' e $M_2^{T''}$

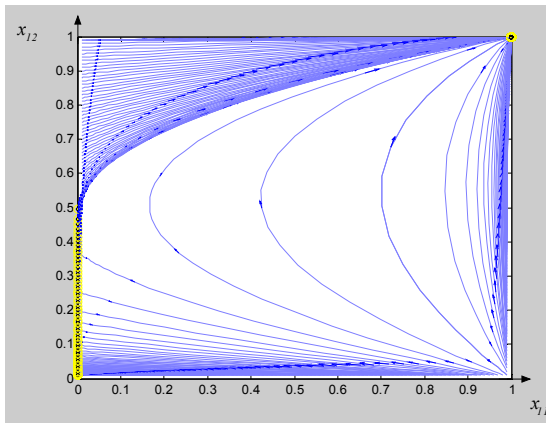


Figura 7-3 – M_1 e M_2

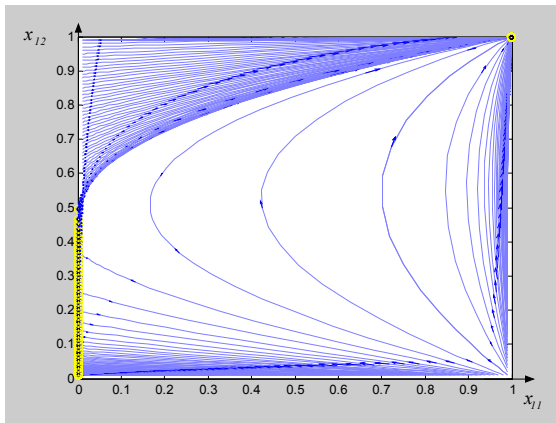


Figura 7-4 – M_1' e M_2''

As Figura 7-3 e Figura 7-4 mostram que a transformada Afim não altera as relações de dominância, mantendo as mesmas bacias de atração

Vemos então que com o número de elementos limitados pode-se gerar as mesmas órbitas que no jogo original.

A diferença entre a convergência de uma dinâmica com uma matriz de *payoff* e outra dinâmica com uma versão da mesma matriz de *payoff* multiplicada por um fator constante é a velocidade com que a população se move ao longo do espaço de estados.

Assim, como uma consequência prática da aplicação transformada Afim a uma matriz de *payoff*, tem-se passos maiores durante a convergência da órbita para um equilíbrio mais atrator.

Este fato está ilustrado na Figura 7-5.

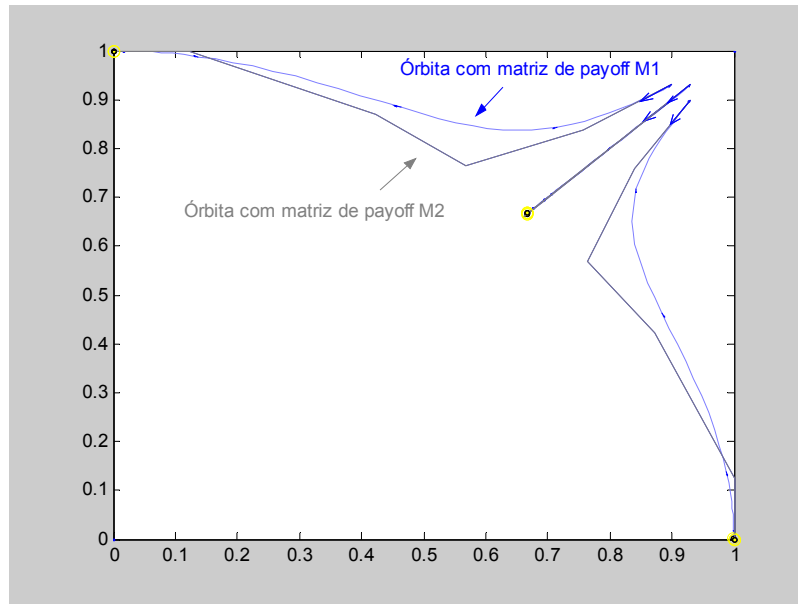


Figura 7-5 – Órbitas para *payoffs* M1 e M2

$$\text{Sendo } M_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } M_2 = 10M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A aplicação de tal transformada, apresenta o inconveniente do grande número de elementos em algumas matrizes de *payoff*, por isso o conceito da transformada Afim será utilizado aqui somente no embasamento do cálculo de passo da dinâmica do replicador detalhado ainda neste capítulo.

A análise de uma solução em equilíbrio, ou mesmo ótima em jogos evolutivos pode ser obtida através das características dos seus autovalores. No tópico a seguir será mostrado como pode ser realizada a simplificação no cálculo de tais autovalores.

7.2 Emprego de autovalores

O equilíbrio assintoticamente estável foi definido como aquele associado aos autovalores negativos. Partindo desta premissa, podemos transformar a questão do equilíbrio evolutivamente estável no seguinte problema de otimização.

$$\text{Min} \quad \sum_{\text{Perfil}} \lambda_{j,k}$$

$$\text{s.a.} \quad \lambda_{j,k} < 0$$

Onde $\lambda_{j,k}$ são os autovalores do jogador j utilizando a estratégia k .

Os equilíbrios evolutivos ou estados assintoticamente estáveis existentes são estados atratores com todos os autovalores negativos. Para se encontrar estes autovalores, calcula-se antes a matriz Jacobiana.

No caso dos n jogadores, cada qual com m estratégias, a matriz jacobiana será quadrada com dimensão $n(m-1) \times n(m-1)$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\dot{x}_1^1)}{\partial x_1^1} & \frac{\partial(\dot{x}_1^1)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial(\dot{x}_1^1)}{\partial x_n^{m-1}} \\ \frac{\partial(\dot{x}_1^2)}{\partial x_1^1} & \frac{\partial(\dot{x}_1^2)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial(\dot{x}_1^2)}{\partial x_n^{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(\dot{x}_n^{m-1})}{\partial x_1^1} & \frac{\partial(\dot{x}_n^{m-1})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial(\dot{x}_n^{m-1})}{\partial x_n^{m-1}} \end{bmatrix}$$

Os autovalores associados a um determinado perfil serão dados pela solução da equação característica $\text{Det}(J - \lambda I) = 0$.

Porém, mesmo que só alguns perfis do jogo sejam equilíbrios atratores, não basta somente suas presenças para definir as órbitas da dinâmica do replicador. É necessário que certas relações de dominância estejam presentes na matriz de *payoff* para descrevermos corretamente o jogo. Um perfil pode ser menos atrator, ou até mesmo nem ser um equilíbrio, mas sua presença na matriz de *payoff* pode modificar completamente o jogo como será mostrado através do seguinte exemplo.

Consideremos as seguintes matrizes de *payoff*.

$$M_1 = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ \begin{matrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 14 \\ 2 & 3 & 12 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad M_2^T = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ \begin{matrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 14 & 12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pelos autovalores relacionados com cada perfil, vemos que somente o perfil $\begin{bmatrix} e_1^1 & e_2^1 \end{bmatrix}$ é evolutivamente estável.

$$\lambda(M_1) = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ \begin{matrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (-6,-8) & (-2,-3) & (12,10) \\ (6,-2) & (2,-1) & (-12,-2) \\ (8,2) & (3,1) & (-10,2) \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\lambda(M_2^T) = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ \begin{matrix} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (-6,-8) & (6,-2) & (8,2) \\ (-2,-3) & (2,-1) & (3,1) \\ (12,10) & (-12,-2) & (-10,2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Caso sejam retirados os perfis $[e_1^2, e_2^3]$ e $[e_1^3, e_2^2]$ das matrizes de *payoff*, o perfil $[e_1^3, e_2^3]$ passa a ser o equilíbrio evolutivamente estável mais atrator, portanto anular um perfil sem critério é distorcer o jogo.

Essas considerações implicam num problema com um número gigantesco de operações, não somente pelos imensos polinômios gerados pelas dinâmicas, como pela complexidade de cálculo de uma Jacobiana, tornando o cálculo dos autovalores computacionalmente supra intensivo e exigindo melhorias que viabilizem os cálculos das órbitas.

Existe um detalhe que facilita enormemente a resolução do problema. Como os perfis em equilíbrio estável que nos interessam são equilíbrios em estratégias puras, ou seja, cada estratégia mista deste perfil é formada por 100% de uma única estratégia pura e 0% das outras, o perfil resultante do processo de convergência é formado por proporções de estratégias binárias.

Por exemplo, se num jogo de dois jogadores o jogador 1 joga sua segunda estratégia e o jogador 2 joga a sua primeira estratégia temos o seguinte perfil:

$$\text{Perfil} = \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = (e_1^2, e_2^1), \text{ onde}$$

$x_i^k \rightarrow$ é a proporção da estratégia pura k na população do jogador i .

Com esta característica o efeito da multiplicação de uma estratégia pura por uma matriz $M_{m \times m \times m \dots \times m}$ é reduzir uma das dimensões desta matriz de 1.

A matriz Jacobiana do problema possui três tipos de elementos:

1. Elementos da diagonal, onde $J(i,i) = \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}}$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} = \frac{[e_i^k M_i w_{-i} - w_i M_i w_{-i}] x_{i,k}}{\partial x_{i,k}}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} = [e_i^k M_i w_{-i} - w_i M_i w_{-i}] - \frac{\partial w_i}{\partial x_{i,k}} M_i w_{-i} x_{i,k}$$

$$\text{mas, } \frac{\partial w_i}{\partial x_{i,k}} = e_i^k - e_i^m$$

$$\text{pois } w_i = [x_i^1, \dots, x_i^k, \dots, 1 - x_i^1 - \dots - x_i^k - \dots - x_i^{m-1}]$$

$$\text{assim } \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} = [e_i^k M_i w_{-i} - w_i M_i w_{-i}] - (e_i^k - e_i^m) M_i w_{-i} x_{i,k}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} = [e_i^k - w_i - (e_i^k - e_i^m) x_{i,k}] M_i w_{-i}$$

Equação 7-3

Esta equação deve ser calculada para os vértices do poliedro de estratégias mistas.

$$\text{Para um dado vértice } V = \left\{ \begin{bmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^k \\ \vdots \\ v_1^{m-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_i^1 \\ \vdots \\ v_i^k \\ \vdots \\ v_i^{m-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^k \\ \vdots \\ v_n^{m-1} \end{bmatrix} \right\} \text{ temos:}$$

$$\text{Se } v_i^k = 1 \rightarrow w_i = e_i^k \rightarrow x_{i,k} = 1 \text{ e } x_{i,g} = 0 \forall g \neq k$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} \Big/_{w_i = e_i^k} = [e_i^k - e_i^k - 1(e_i^k - e_i^m)] M_i w_{-i} = (e_i^m - e_i^k) M_i w_{-i}$$

$$\text{Se } v_i^k = 0 \rightarrow x_{i,k} = 0 \text{ e } x_{i,g} = 1 \text{ para algum } g \neq k$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,k}} \Big/_{w_i = e_i^g} = [e_i^k - e_i^g - 0(e_i^k - e_i^m)] M_i w_{-i} = (e_i^g - e_i^k) M_i w_{-i}$$

2. Elementos fora da diagonal para um mesmo jogador

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,h}} = \frac{-\partial w_i}{\partial x_{i,h}} M_i w_{-i} x_{i,k} = (e_i^m - e_i^h) M_i w_{-i} x_{i,k} \quad \text{Equação 7-4}$$

Calculando para os vértices do poliedro de estratégias mistas temos.

Se $v_i^k = 1 \rightarrow x_{i,k} = 1$ e $x_{i,g} = 0 \forall g \neq k$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,h}} \Big/_{w_i = e_i^k} = \frac{-\partial w_i}{\partial x_{i,h}} M_i w_{-i} x_{i,k} = (e_i^m - e_i^h) M_i w_{-i}$$

Se $v_i^k = 0 \rightarrow x_{i,k} = 0$ e $x_{i,g} = 1$ para um $g \neq k$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{i,h}} \Big/_{w_i \neq e_i^k} = \frac{-\partial w_i}{\partial x_{i,h}} M_i w_{-i} x_i^k = -(e_i^h - e_i^m) M_i w_{-i} 0 = 0$$

3. Elementos fora da diagonal e de jogadores diferentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i^k}{\partial x_{j,h}} &= \left[(e_i^k - w_i) M_i x_{i,k} \frac{\partial w_j}{\partial x_{j,h}} w_{-i,-j} \right] = (e_i^k - w_i) M_i x_{i,k} w_{(-i,-j)} \frac{\partial w_j}{\partial x_{j,h}} \\ \frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{j,h}} &= (e_i^k - w_i) M_i x_{i,k} w_{(-i,-j)} (e_j^h - e_j^m) \end{aligned} \quad \text{Equação 7-5}$$

Calculando para os vértices do poliedro de estratégias mistas temos.

Se $v_i^k = 1 \rightarrow x_{i,k} = 1$ e $x_{i,g} = 0 \forall g \neq k$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{j,h}} = (e_i^k - w_i) M_i x_{i,k} w_{(-i,-j)} (e_j^h - e_j^m) = 0 \cdot M_i \cdot 1 \cdot w_{(-j,-i)} (e_j^h - e_j^m) = 0$$

Se $v_i^k = 0 \rightarrow x_{i,k} = 0$ e $x_{i,g} = 1$ para um $g \neq k$

$$\frac{\partial \dot{x}_{i,k}}{\partial x_{j,h}} = (e_i^k - w_i) M_i x_{i,k} w_{(-i,-j)} (e_j^h - e_j^m) = (e_i^k - e_i^g) \cdot M_i \cdot 0 \cdot w_{(-i,-j)} (e_j^h - e_j^m) = 0$$

A forma final da Jacobiana pode ser observada na Figura 7-6

$\frac{\partial \dot{x}_{1,1}}{\partial x_{1,1}}$	$\frac{\partial \dot{x}_{1,1}}{\partial x_{1,2}}$	$\mathbf{0}$
	$\frac{\partial \dot{x}_{1,2}}{\partial x_{1,2}}$	
$\ddots$		$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$		$\frac{\partial \dot{x}_{n,m-2}}{\partial x_{n,m-2}}$
		$\frac{\partial \dot{x}_{n,m-1}}{\partial x_{n,m-1}}$

Figura 7-6 – Matriz Jacobiana

Porém, como a finalidade é o cálculo dos autovalores para um determinado perfil, poderemos pular o cálculo da Jacobiana e economizar etapas.

Por indução, pode-se escrever a equação característica $\text{Det}(J-\lambda I)$ para um determinado perfil em estratégias puras $S=[s_1, s_2, \dots, s_n]$, como:

$$\prod_{i,h \neq k}^{N,m-1} [a_{h,-s} - a_s - \lambda_{i,k}]$$

Onde i é o i -ésimo jogador, k sua k -ésima estratégia e a_s é o *payoff* do jogador i para o perfil s formado pelas estratégias $[k, -s]$.

Desta equação é fácil deduzir que os autovalores podem ser calculados como:

$$\lambda_{i,k} = a_{h,-s} - a_s \quad \forall h \neq k$$

Se todos os autovalores são negativos significa que o *payoff* a_s do jogador i no perfil $S = [s_i, s_{-i}]$ será sempre maior do que todos os outros *payoffs* de i caso ele use outra estratégia pura diante do mesmo s_{-i} .

O perfil S será evolutivamente estável se cada estratégia de S for a única melhor réplica (resposta). Formalmente podemos escrever que

$$a_s > a_{h,-s} \quad e \quad h \neq s_i \quad \forall i \in I$$

Deste modo o problema de otimização se reduziria a:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_i^n \sum_k^{m-1} \lambda_{i,k} \\ & \text{s.a. } a_{k,-s} - a_{h,-s} > 0 \end{aligned}$$

Onde $(k,-s)$ e $(h,-s)$ são pontos em cima de uma dimensão perpendicular a $-s$, no espaço de *payoffs* e $a_{k,-s}$ é o maior *payoff* nesta reta.

Aqui as condições necessárias e suficientes, como as condições de *Karush-Kuhn-Tucker (KKT)* deverão ser satisfeitas quando se tratar de um problema de programação matemática não linear. Geralmente uma matriz de *payoff* não estabelece tais condições sendo ruidosa e cheia de descontinuidades e muitas vezes não podendo ser equacionada.

É neste ponto que a dinâmica do replicador mostra-se como uma interessante técnica de otimização em espaços ruidosos, onde as descontinuidades são entraves para as técnicas mais convencionais. A idéia da dinâmica do replicador para alcançar o estado ótimo vem do fato de que um equilíbrio é um estado de minimização de risco em detrimento do ótimo, ou seja, o estado ótimo do ponto de vista individual e egoísta pode trazer um *payoff* máximo ao agente, porém é míope em relações as estratégias alheias. Já o equilíbrio pode não trazer um *payoff* tão bom, mas é mais seguro, pois caso um agente concorrente saia do equilíbrio não lucrar nada com isto.

Os estados iniciais serão atraídos para estados atratores do jogo, que possuem propriedades especiais em seus autovalores, através de órbitas regidas por dinâmicas.

Formalmente podemos escrever que um equilíbrio assintoticamente estável mais atrator e^{+A} será um ótimo esperado, caso as matrizes de *payoff* dos jogadores advenham de um jogo simétrico, caso em que todos os *payoffs* de cada jogador em um perfil da matriz de payoff serão iguais.

Podemos então representar um jogo do ponto de vista de um jogador como se fosse um jogo de dois jogadores, estabelecendo uma forma de encontrarmos o ótimo definido pela seguinte expressão:

$$\{ \text{Estratégia de payoff esperado Ótimo} \in e^{+A} : M_i = \mathbb{M}^{(i)} \forall i \in I \}$$

O seguinte exemplo ilustra enunciado.

$$M_1 = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ e_1^1 & 1 & 1 & 10 \\ e_1^2 & 5 & 5 & 5 \\ e_1^3 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} e M_2 = \begin{matrix} & e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_2^1 & 1 & 5 & 1 \\ e_2^2 & 1 & 5 & 1 \\ e_2^3 & 10 & 5 & 1 \end{matrix} = M_1^T \text{ com } M_1 = M_2 = \mathbb{M}^{(i)}$$

Fica claro nestas matrizes que o equilíbrio (e_1^1, e_2^3) contém o *payoff* máximo igual a 10.

Vale salientar que a dinâmica do replicador lida com os valores esperados dos *payoffs* das estratégias dos jogadores e com os valores esperados dos *payoff* de cada jogador. Deste modo é muito importante que não confundamos ótimos pontuais com os ótimos a que nos referimos neste trabalho, que são os ótimos de valores esperados.

Por exemplo, admitamos um jogo de dois jogadores com as seguintes matrizes de *payoff*.

$$M_1 = \begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 & e_2^3 \\ e_1^1 & 1 & 1 & 10 \\ e_1^2 & 7 & 6 & 1 \\ e_1^3 & 6 & 8 & 1 \end{matrix} e M_2 = \begin{matrix} & e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_2^1 & 1 & 7 & 6 \\ e_2^2 & 1 & 6 & 8 \\ e_2^3 & 10 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Vemos que os equilíbrios em estratégias puras deste jogo são os perfis $[e_1^1, e_2^3]$, $[e_2^1, e_1^2]$ e $[e_1^3, e_2^2]$, e que no perfil $[e_1^1, e_2^3]$ ocorre o *payoff* máximo do jogador I. Porém as estratégias de maior *payoff* médio para cada um dos jogadores são a terceira estratégia para o jogador 1 e a segunda estratégia para o jogador 2, como vemos na tabela de *payoffs* médios abaixo.

Payoffs Esperados					
Jogador I			Jogador II		
Estratégia I	Estratégia II	Estratégia III	Estratégia I	Estratégia II	Estratégia III
4	4,6667	5	4,6667	5	4

Tabela 7-1 – Comparação dos *payoffs* esperados

Portanto combinando-se as estratégias de valores esperados máximos teremos um *payoff* de 8. Evidentemente que o máximo pontual poderá ser alcançado se o jogador estiver sozinho no mundo. Caso isto acontecesse a matriz de *payoff* do exemplo anterior seria simétrica, pois o jogador sempre obterá o mesmo *payoff* para uma mesma estratégia como ilustrado a seguir.

Para a estratégia 1 o *payoff* seria 10, para a segunda seria 6 e para a terceira seria 1. Deste modo teríamos um vetor de *payoffs*,

$$V = \begin{matrix} e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ [10 & 6 & 1] \end{matrix}, \text{ ou representado matricial e redundante teremos de forma}$$

$$M = \begin{matrix} & e_1^1 & e_1^2 & e_1^3 \\ e_1^1 & \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \\ e_1^2 & \\ e_1^3 & \end{matrix}$$

Para este jogo a dinâmica do replicador encontra um valor de *payoff* ótimo igual a 10 ao jogar a estratégia um.

A dinâmica do replicador, possui então duas fraquezas que a tornam de difícil aplicação computacional. A primeira é a matriz de *payoff* com m^n elementos e a segunda é que ela se baseia no *payoff* médio de cada estratégia podendo assim alcançar equilíbrio ineficientes como o do exemplo anterior. Ali o valor de *payoff* alcançado foi oito, mas o melhor seria o dez.

O problema das técnicas que lidam com o ótimo esperado e não com ótimo pontual é que, como vimos, podem alcançar soluções ineficientes. São técnicas que visam apontar, diante das incertezas, qual solução obterá os melhores resultados, na média. Estas soluções deveriam ser utilizadas durante o período previsto nos estudos de modo que na média obteríamos melhores resultados que qualquer outra solução. Porém, se utilizarmos uma única solução por todo um período, raramente teremos resultados realmente ótimos. O ótimo esperado não é confiável quando não se tem lastro para suportar os erros incorridos por ele. Por exemplo, temos que conseguir uma solução sobre a operação de uma usina hidrelétrica diante das incertezas hidrológicas. São traçados apenas dois cenários

possíveis de estratégias de geração, como mostrados na tabela abaixo contendo os ganhos a cada estágio.

	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Ganho Médio
Estratégia I	110	20	10	46,66
Estratégia II	100	-10	60	50

Tabela 7-2 – Payoffs de cada estratégia em cada estágio

Como podemos observar o maior ganho médio seria o da estratégia II se apostássemos nela para o período de três estágios, porém o maior ganho observado para o primeiro estágio seria o da estratégia I. Além do mais, ao apostar na Estratégia II, teríamos um prejuízo de -10 no segundo estágio que poderia ser impactante no caixa de uma empresa caso esta não tivesse capital suficiente para cobrir esta perda imediata. Por isso as técnicas que se utilizam dos *payoffs* médios ótimos podem não ser eficientes.

Então, temos que ter em mente o problema da dimensionalidade e o problema da convergência para equilíbrios ineficientes através da dinâmica do replicador. Vejamos como ela alcança o estado esperado ótimo.

O princípio de otimização por dinâmicas pode ser compreendido se imaginarmos um domínio para o qual cada ponto possui um valor que não pode ser representado analiticamente por meio de funções suaves e, mapeando-se cada um desses pontos em vértices de um hiperespaço, criando-se assim um espaço interno onde existirão órbitas regidas por alguma dinâmica.

Na Figura 7-7 o ponto de máximo no domínio original encontra-se na posição representada pelo ponto vermelho(*). Após a transformação deste domínio num hiperespaço com o mapeamento dos pontos do espaço original em vértices deste hiperespaço, teremos vértices que serão atratores em maior ou menor grau. No interior deste hiperespaço, órbitas convergirão em direção ao ponto de máximo, que será o mais atrator e atrairá qualquer órbita que se inicie num ponto equidistante a todos os atratores do hiperespaço.

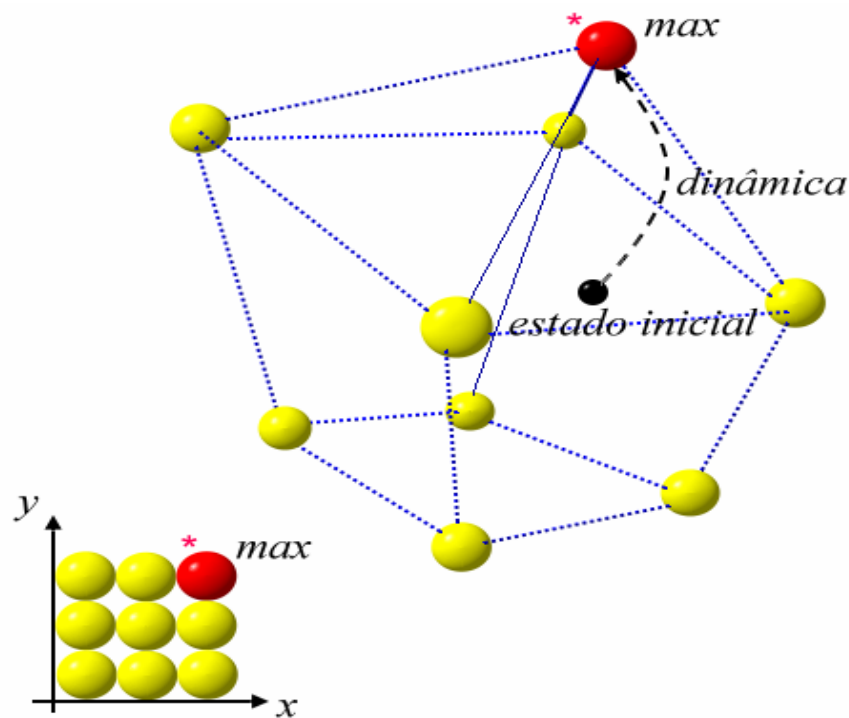


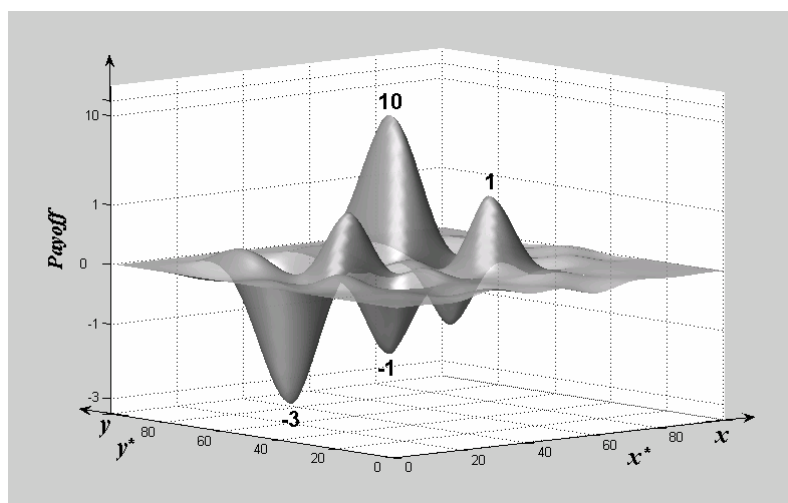
Figura 7-7 – Convergência da dinâmica para o ótimo

Podemos formalizar matematicamente nosso equilíbrio como:

$$e^{+A} \subset \Theta^{EEE} \subset \Theta^{NE}$$

O equilíbrio mais atrator e^{+A} é um subconjunto dos equilíbrios evolutivamente estáveis, que por sua vez é um subconjunto dos equilíbrios de Nash.

Como exemplo temos o seguinte domínio e seus respectivos valores.



Tanto as matrizes $A = B^T = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ quanto a matrizes pseudo afim

$A_1 = B_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ levam as órbitas para o ponto de máximo (x^*, y^*) , ou seja, o

perfil que maximiza o *payoff* do jogador. É fácil ver que, caso as matrizes de todos os jogadores forem iguais, equilíbrios e ótimos estarão num mesmo estado.

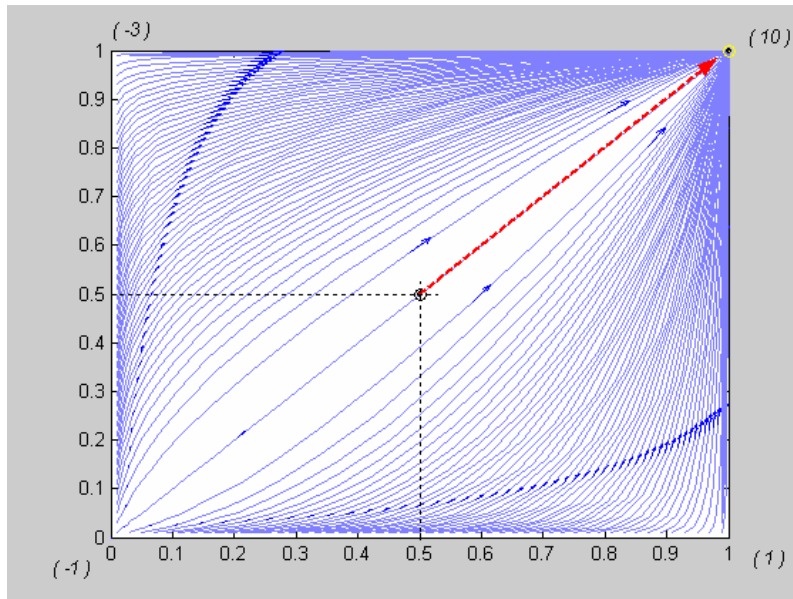


Figura 7-8 – Convergência com matrizes A e B

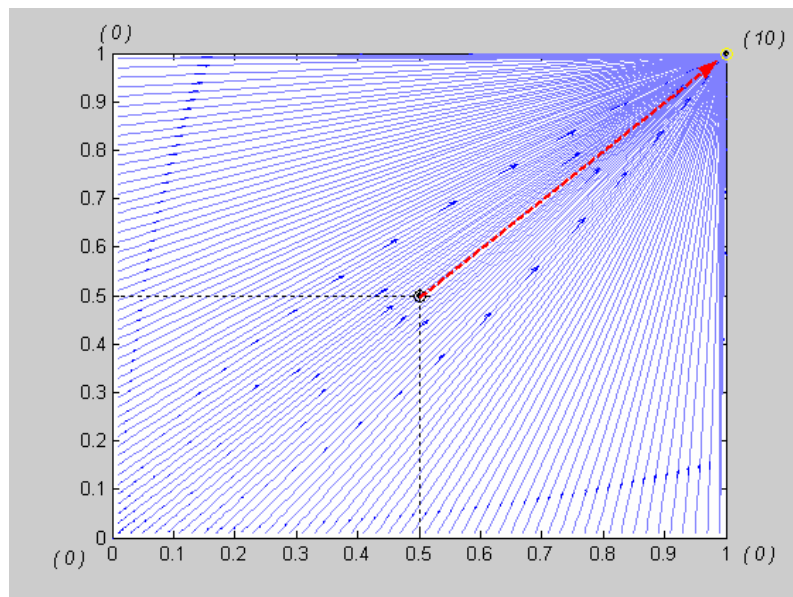


Figura 7-9 – Convergência com matrizes A_1 e B_1

A dinâmicas são interessantes então, pela possibilidade de otimização global, desde que as órbitas no intraespaço não são impedidas de seguir para a solução devido a pontos críticos como máximos e mínimos locais.

É importante lembrar que para isto será necessária a existência de equilíbrios atratores que sejam equilíbrios em estratégias puras. Como foi visto nem todo jogo possui equilíbrio em estratégias puras e nem todo equilíbrio em estratégias puras é evolutivamente estável. Busca-se, portanto, através dessa metodologia, um refinamento nos equilíbrios pelo qual obtém-se equilíbrios de Nash, restritos à condição de estabilidade evolutiva e maior poder de atração. Sendo assim, a dinâmica do replicador que se inicia no ponto central do hiperespaço, selecionará um único equilíbrio, subconjunto dos equilíbrios evolutivamente estáveis.

Este é o princípio sugerido neste trabalho que considera como estado inicial distribuições de proporções de estratégias como distribuições uniformes, de forma que o equilíbrio mais atrator possa ser preponderante sobre este estado inicial, garantindo-se a convergência da órbita para o estado em equilíbrio assintótico mais atrator.

Este processo pode ser observado na Figura 7-10.

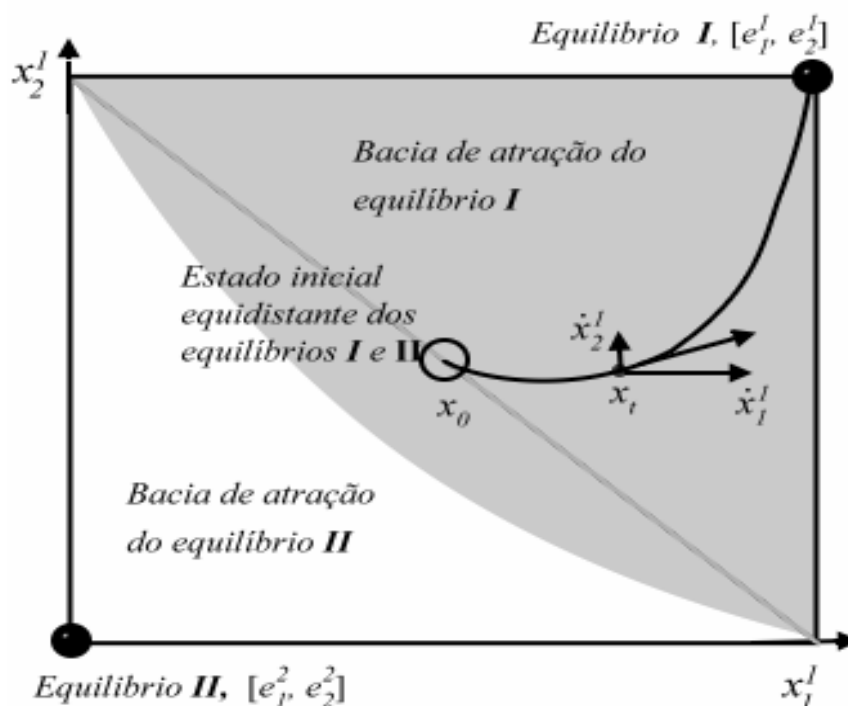


Figura 7-10 – Representação gráfica da órbita que parte de um estado central e converge para o equilíbrio mais atrator

Se observarmos, o vetor $\dot{x}$ da Figura 7-10 nos dá a direção tangente à órbita no ponto x , direção esta, contaminada pela ação de outros perfis presentes. Se filtrarmos estas influências, a órbita seguirá diretamente para o equilíbrio mais atrator, enquanto se considerarmos todos os elementos da matriz de *payoff*, a órbita convergirá com distorção até alcançar o equilíbrio mais atrator. Tal efeito pode ser visualizado nas Figura 7-8 e Figura 7-9.

Para que ocorra convergência para o estado mais atrator, é necessário que o estado inicial esteja equidistante de todos os equilíbrios atratores de forma que a força do mais atrator prepondere dentre a dos outros equilíbrios, englobando o estado inicial com sua bacia de atração. Podemos concluir então que a distribuição inicial pode ser uniforme igual a $1/m$ entre 1 e m para o caso discreto e $\frac{1}{Val_{máx} - Val_{min}}$ entre $Val_{máx}$ e Val_{min} para o caso contínuo, como pode ser visualizado na Figura 7-11

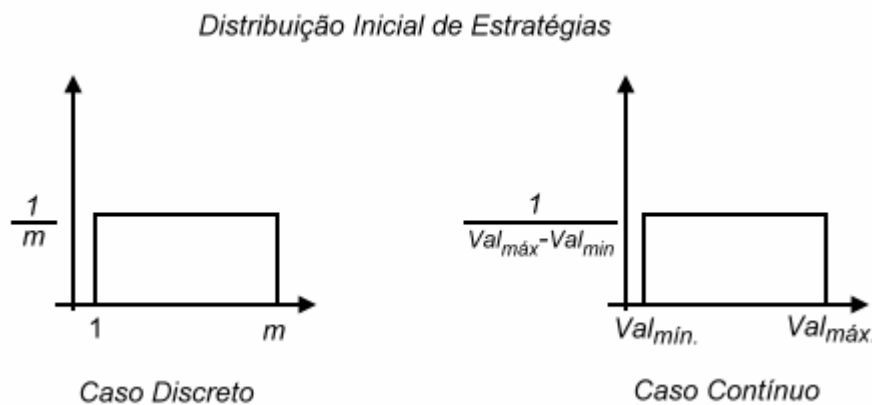


Figura 7-11 – Distribuições de proporções iniciais uniformes

Sendo $g(x) = k^0 = 1/m$, a dinâmica do replicador para o estado inicial x^0 é;

$$x_{i,k}^{(t+1)} = \left[1 + e_i^k M_i k_{-i}^0 - k_i^0 M_i k_{-i}^0 \right] x_{i,k}^t$$

Onde,

$$e_i^k M_i k_{-i}^0 = E\{\pi_i^k\}$$

Equação 7-6

$$k_i^0 M_i k_{-i}^0 = E\{\pi_i\}$$

Equação 7-7

O valor esperado $E\{\pi_i^k\} = \mu(e_i^k, w_{-i})$ é o *payoff* esperado da estratégia k do jogador i e $E\{\pi_i\} = \mu(w_i, w_{-i})$ é o *payoff* esperado do jogador i .

Poderíamos pensar em lidar ainda com a dinâmica do replicador com espaço contínuo de estratégias, o que resolve o problema da dimensionalidade caso a matriz de *payoff* possa ser representada por funções contínuas e suaves. Em casos com um grande número de descontinuidades, a representação de tais funções torna-se computacionalmente inviável.

A dinâmica do replicador contínua está representada pela Equação 7-8.

$$g_i^{t+1}(y) = \left\{ 1 + \int_1^i \dots \int_1^n \alpha(p_i - y) \mathcal{M}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) g_1^t(p_1) \dots g_{i-1}^t(p_{i-1}) g_{i+1}^t(p_{i+1}) \dots g_n^t(p_n) - \int_1^i \dots \int_1^n g_1^t(p_1) \mathcal{M}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) g_1^t(p_1) \dots g_{i-1}^t(p_{i-1}) g_{i+1}^t(p_{i+1}) \dots g_n^t(p_n) \right\} g_i^t(y) \quad \text{Equação 7-8}$$

Com $\mathcal{M}_i$ sendo a função contínua de *payoff* e $g_i^t(y)$ a função distribuição de estratégias do jogador i no tempo t .

Porém, neste caso a função de distribuição de estratégias de cada jogador também é contínua e a cada iteração da dinâmica teremos uma nova função de difícil representação.

Para que possamos lidar com distribuições de estratégias contínuas é necessário que possamos representá-las de modo que de uma iteração para outra, somente os parâmetros dessa função sejam modificados. Caso numa iteração a função de distribuição deva ser representada por uma função gaussiana e na outra iteração por uma função cosseno levantada, necessitaríamos de um portentoso processamento simbólico para encontrar $g_i^{t+1}(x)$. Sugestões poderiam ser representações polinomiais ou série de Fourier, onde de uma iteração para a próxima as distribuições teriam a mesma representação matemática só mudando os coeficientes destas representações. O problema é o processamento necessário para encontrar os coeficientes destas representações, pois teríamos que encontrar os coeficientes de Fourier da função representada pela Equação 7-8.

No caso de matrizes de *payoff* discretas as funções de distribuição de proporções das estratégias podem ser representadas por um trem de deltas de Dirac como visto na Equação 7-9.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{Np} a_i \delta(x - p_i) \quad \text{Equação 7-9}$$

Onde:

- $\delta(x - p_i)$ é a função delta de Dirac diferente de zero nos pontos p_i
- p_i é a posição de um pico i na função distribuição de estratégias.
- a_i é o valor da distribuição no ponto p_i

No caso discreto, os picos $a_i \delta(x - p_i)$ da distribuição garantem a representação fiel das funções de distribuição e no caso contínuo a função de distribuição será uma aproximação discretizada da função de distribuição contínua original e convergirá para equilíbrio locais.

Espera-se por exemplo que qualquer função de distribuição ruidosa ou não, possa ser representada pela Equação 7-9 reproduzindo imperativamente todos os indivíduos. Deste modo, a cada iteração da dinâmica do replicador, serão necessárias somente, as atualizações dos parâmetros a_i , e p_i , e o equacionamento da dinâmica do replicador será sempre o mesmo em todas as iterações variando apenas seus parâmetros.

Pode-se demonstrar que durante a evolução ou órbita da dinâmica do replicador, a distribuição de estratégias de um jogador tenderá a um delta de Dirac, desde que como vimos, os equilíbrios finais serão binários com uma única estratégia pura de cada jogador sobrevivente em 100% da população no equilíbrio evolutivo estável. Portanto a Equação 7-9, à medida em que a órbita converge em direção ao equilíbrio mais atrator, tenderá para $\delta(x - p^*)$, onde p^* é a posição da estratégia com *payoff* ótimo.

$$g^t(x)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \delta(x - p^*)$$

Na convergência $p^* = \int xg(x)dx$, ou seja, o ponto de ótimo será igual ao valor esperado desde que o valor esperado de uma variável aleatória para uma função de distribuição $\delta(x - p^*)$ será igual a $E\{x\} = \int x\delta(x - p^*)dx = p^*$

Portando o valor esperado do estado x convergirá de uma média inicial até a posição de ótimo p^* .

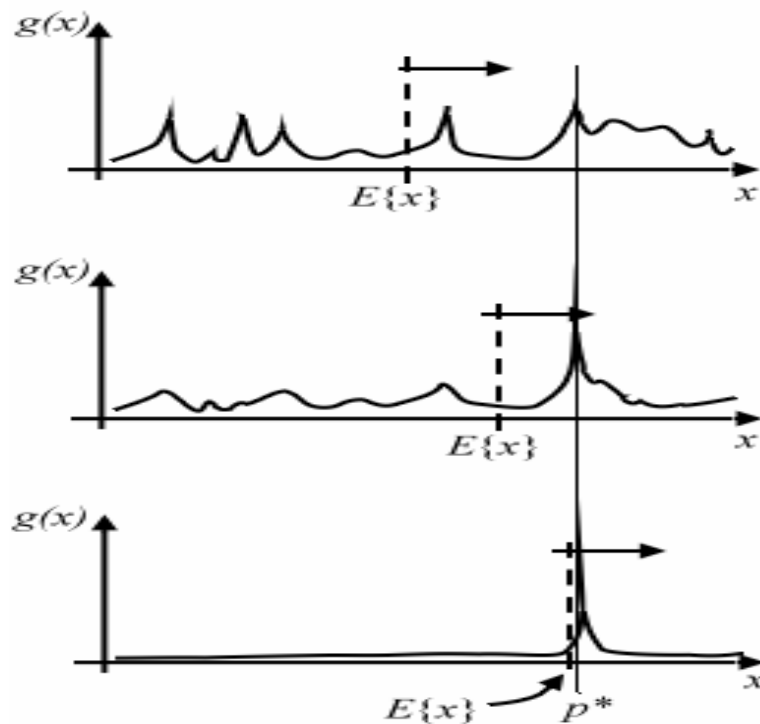


Figura 7-12 – Transformação da distribuição durante a convergência ao equilíbrio

Uma característica da Equação 7-9 é que ela endereça somente os perfis especificados da matriz de *payoff* para o cálculo da distribuição no tempo $t+1$.

Podemos facilmente ver que a partir de uma propriedade do Delta de Dirac, $\int \delta(x - k)f(x) = f(k)$, podemos endereçar um determinado valor da função $f(x)/_{x=k}$. Do mesmo modo, a função $g_i(x) = \sum a_i^k \delta(x - p_i^k)$ possui a propriedade de endereçar elementos específicos da matriz de *payoff* M como exemplificado na Figura 7-13.

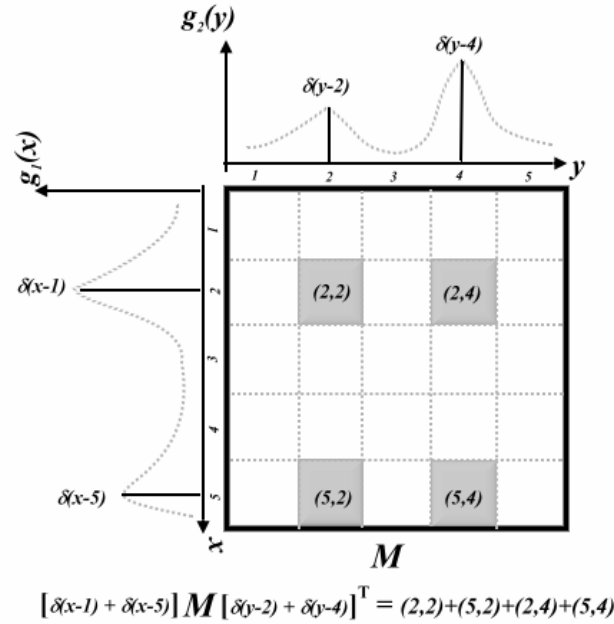


Figura 7-13 – Amostragem da matriz de payoffs pela aplicação dos deltas

Substituindo-se a Equação 7-9 na dinâmica do replicador teremos:

$$x_{i,k}^{t+1} = \left\{ 1 + e_i^k M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t(y-h) - \sum_{i,l} \delta_i^t(x-l) M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t(y-h) \right\} x_{i,x}^t \quad \text{Equação 7-10}$$

Desta equação, nota-se que para todas as estratégias de um jogador i , o termo entre as chaves,

$$\sum_{i,l} \delta_i^t(x-l) M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t(y-h) = \bar{\kappa} \quad \text{Equação 7-11}$$

É igual e portanto, o termo diferencial numa mesma população é:

$$e_i^k M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t(y-h) \quad \text{Equação 7-12}$$

Como a área sob a função distribuição $g_i^t(x)$ é sempre igual a um, a soma dos incrementos será $\sum_k \dot{x}_i^k = 0$. As estratégias k com *payoff* médio acima do *payoff* médio do jogador i terão uma taxa de crescimento positiva enquanto as estratégias com *payoff* médio abaixo do *payoff* médio do jogador decrescerão em proporção na população. Assim temos que;

$$\sum_k x_{i,k}^{t+1} = \sum_k x_{i,k}^t + \sum_k \dot{x}_{i,k}^t = 1$$

$$\text{e, } \sum_k \dot{x}_{i,k}^t = \sum_k \left(e_i^k M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t (y-h) - \bar{\kappa}_i \right) x_{i,k}^t = \sum_k (\dot{x}_{i,k}^{t(-)} - \bar{\kappa}_i) x_{i,k}^t = 0$$

$$\sum_k \dot{x}_{i,k}^{t(-)} x_{i,k}^t - \bar{\kappa}_i \sum_k x_{i,k}^t = \sum_k \dot{x}_{i,k}^{t(-)} x_{i,k}^t - \bar{\kappa}_i = 0$$

Onde $\bar{\kappa}_i$ é a Equação 7-11, comum a todas as estratégias do jogador i . Deste modo, necessitamos encontrar somente os termos da Equação 7-10, representados pela Equação 7-12 igual a $\sum_k \dot{x}_{i,k}^{t(-)} x_{i,k}^t$ e finalizar o cálculo de $\dot{x}_{i,k}^t$ subtraindo-se de cada $\dot{x}_{i,k}^{t(-)} x_{i,k}^t$, $\bar{\kappa}_i = \sum_k \dot{x}_{i,k}^{t(-)} x_{i,k}^t$ que é o *payoff* médio do jogador i .

A dinâmica do replicador pode ser simplificada, de modo a reduzir o número de operações que na sua forma padrão processaria no mínimo, para cada estratégia k das m estratégias de cada jogador, $(m^n + 2(m^{n-1} + \dots + m) + 1)$ operações de multiplicação, em cada iteração da dinâmica do replicador no cálculo de cada um dos $\dot{x}_{i,k}^t$.

Ao invés de considerar toda a matriz de *payoff* os trens de deltas endereçam um número conveniente de elementos.

$$x_{i,k}^{t+1} = \left\{ 1 + e_i^k M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t (y-h) - \sum_{i,l} \delta_i^t (x-l) M_i \sum_{-i,h} \delta_{-i}^t (y-h) \right\} x_{i,k}^t \quad \text{Equação 7-10}$$

Para ilustrar a aplicação da redução do trem de deltas para um único delta, apresentamos um exemplo de três jogadores, cada qual com cem estratégias.

Teríamos então que as populações de cada jogador seriam representadas por:

$A_i \delta(n - p_i)$, com $N_p^{n-1} = 1$ para os jogadores 1 e 2, e m para o terceiro jogador.

Deste modo, para um determinado jogador, percorreríamos apenas uma coluna, do cubo de estratégias como mostrado na Figura 7-14 e o número de operações para cada estratégia seria reduzido para uma operação de multiplicação relativa à Equação 7-12, desde que somente um elemento da matriz de *payoff* estaria endereçado para cada estratégia..

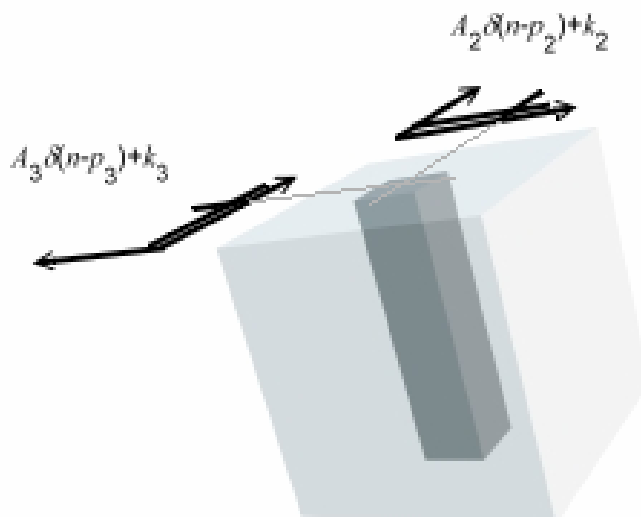


Figura 7-14 – Cubo de perfis de estratégias de 3 jogadores. Percorre-se apenas uma coluna para cada jogador

Obviamente que uma busca neste nível reduzido poderia não ser tão efetiva quando uma busca em toda a matriz de *payoff*. Um motivo para considerarmos este tipo de busca é que mesmo usando-se toda a matriz de *payoff* podemos não atingir o equilíbrio mais eficiente precisando desconsiderar as linhas e colunas associadas ao equilíbrio encontrado e partir para uma nova busca.

O exemplo a seguir consiste numa matriz de *payoff* construída a partir de dois vetores aleatórios interpolados com distribuição uniforme.

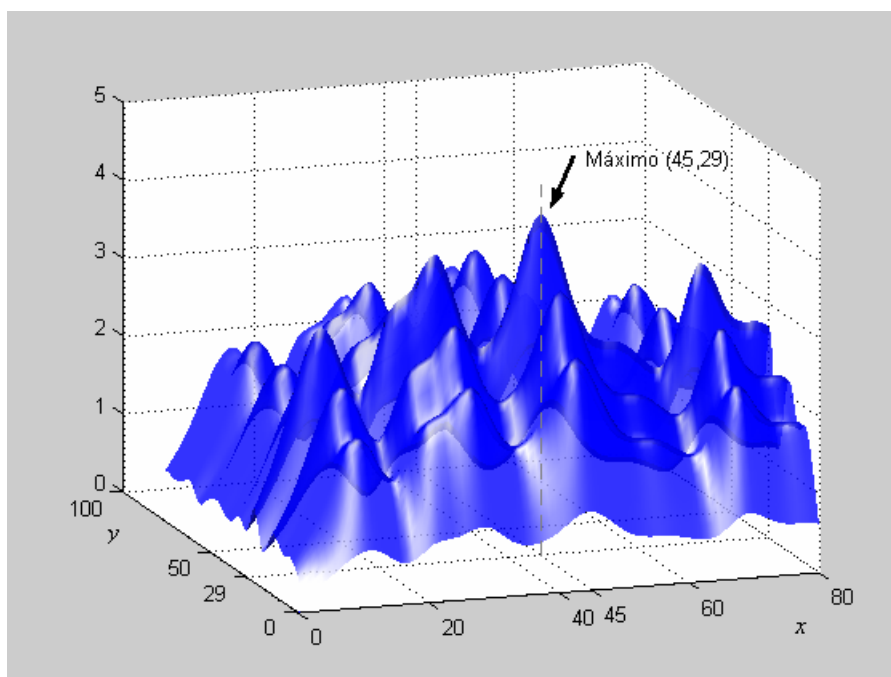


Figura 7-15 – Superfície com ponto de máximo em (45,29)

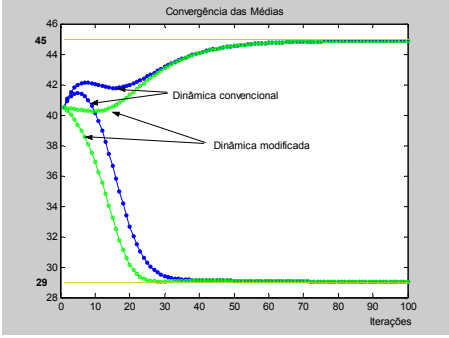
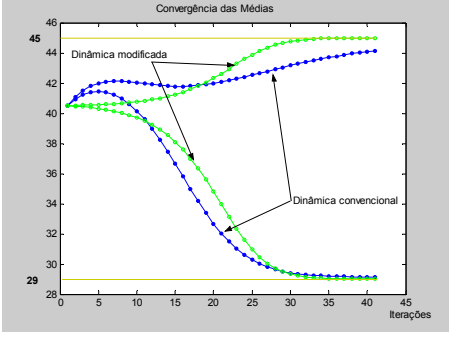
Nº de δ	Posição de Máximo	Convergência da média
10	(45,29)	
1	(45,29)	

Tabela 7-3 – Convergência do valor esperado

Neste exemplo, as estratégias, com os maiores *payoffs* esperados coincidiram com os *payoffs* pontuais máximos, caracterizando-se a presença de equilíbrios estritos formados por estratégias dominantes existentes no jogo onde $\mu(x,z) > \mu(y,z) \quad \forall y \text{ e } z$ e para a estratégia dominante x . Outra característica que permitiu a representação das distribuições por um único delta é que as proporções das estratégias 45 do jogador I e 29 do jogador II não oscilaram durante a convergência sendo sempre as maiores proporções na população deste o início do processo. Este fato garantiu a permanência da órbita numa mesma bacia de atração.

Apesar da utilização da matriz completa levar a convergência da dinâmica do replicador convencional ao equilíbrio + atrator, não garante a convergência para o equilíbrio mais eficiente. É válido então, pesquisarmos os equilíbrios somente em uma linha x coluna de cada vez percorrendo todos os equilíbrios mais atratores até encontrarmos o equilíbrio mais eficiente e percorrendo a matriz de *payoff* apenas uma vez.

O efeito de modificarmos a função de deltas na tentativa de compactar as distribuições, levando alguns a_i a zero é a de provocar mutações que podem desviar as convergências para outros equilíbrios menos atratores.

Mesmo ao selecionarmos as estratégias com maiores proporções iniciais a convergência para o equilíbrio mais atrator não estará garantida. Os picos da distribuição podem à primeira vista parecer fornecer a direção para o equilíbrio mais atrator, pois será num destes picos que estará representada a proporção da estratégia mais apta naquele momento e que conseqüentemente possui a maior proporção dentro da população.

Porém estes máximos das funções distribuição podem mudar de uma estratégia para outra entre iterações. Nas Figura 7-16 e Figura 7-17 podemos observar esta afirmação onde no início do processo de convergência a estratégia 2 do jogador 2 possuía a maior proporção e no final da convergência a estratégia 1 do jogador 2 é a estratégia estável. Então se escolhermos no início do processo de convergência que a estratégia 2 do jogador 2 deva ser selecionada para sobreviver na população por ser a que possui uma maior proporção inicial, enquanto a proporção da estratégias 1 do jogador 2 é anulada, a órbita jamais convergirá para o equilíbrio mais atrator que é o perfil (e_1^1, e_2^1) .

Com isto a estratégia com maior proporção na população numa iteração poderá não ser a estratégia em maior proporção em outra iteração da dinâmica. Se partirmos deste princípio, a solução é representar completamente as funções de distribuição de modo que preserve seus picos e toda a informação que guie a órbita fielmente em sua trajetória, garantindo assim que a informação da aptidão de cada indivíduo na população não seja perdida e que todas as estratégia permaneçam na população com chances de crescer dependendo da posição do perfil misto no espaço de estados.

A Figura 7-19 mostra a matriz de *payoff* ruidosa de um exemplo com um máximo determinado pela dinâmica do replicador convencional e uma dinâmica do replicador com funções de distribuição da forma da Equação 7-9 reduzida, onde o máximo conhecido está na posição (87,75). O resultado obtido com a dinâmica do replicador proposta pela Equação 7-9, para um total de $N_p = 100, 50, 20, 10, 5, 2$ e 1 deltas de Dirac estão na Tabela 7-4.

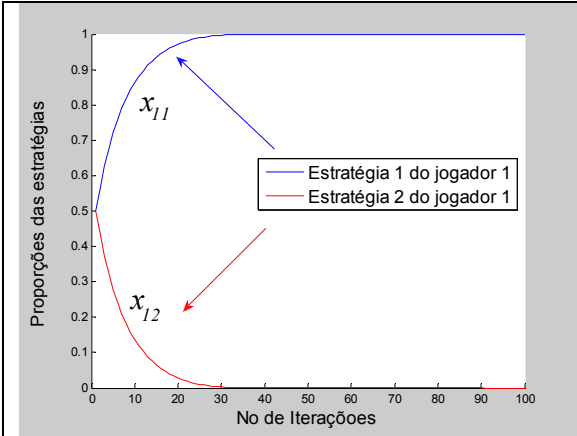


Figura 7-16 – Proporções da estratégias do jogador 1

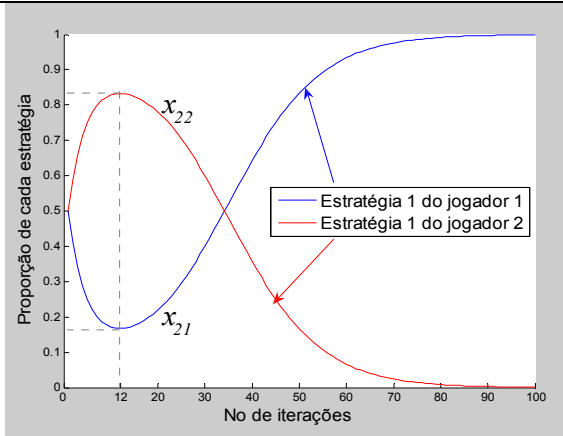


Figura 7-17 – Proporções das estratégias do jogador 2

$$\begin{bmatrix} (10,2) & (2,0) \\ (1,4) & (0.1,20) \end{bmatrix}$$

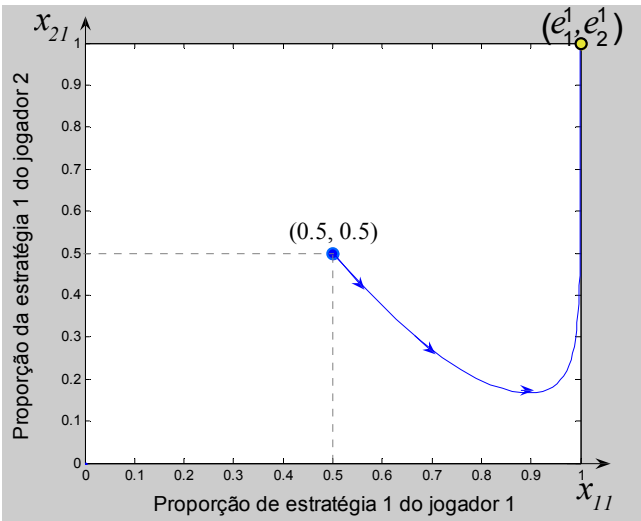


Figura 7-18 – Matriz de payoff e convergência para o perfil (e_1^1, e_2^1)

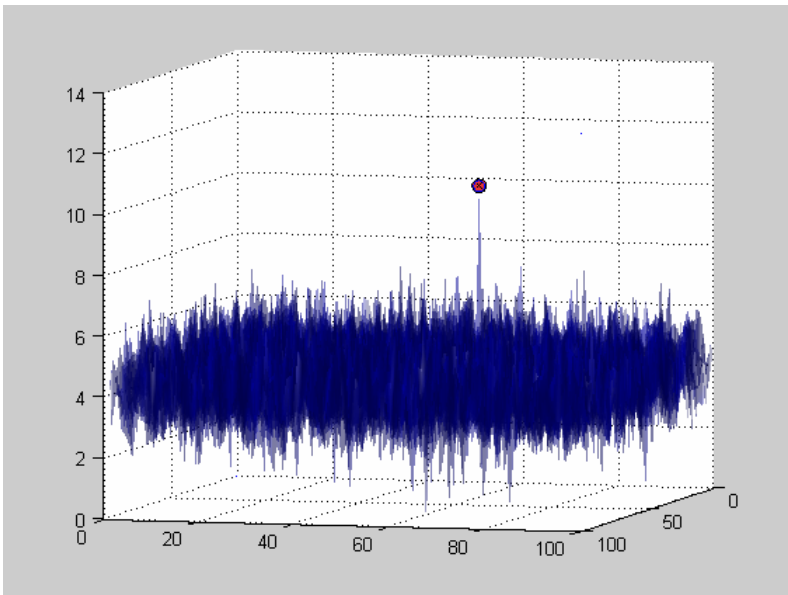
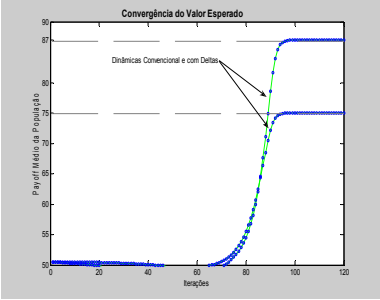
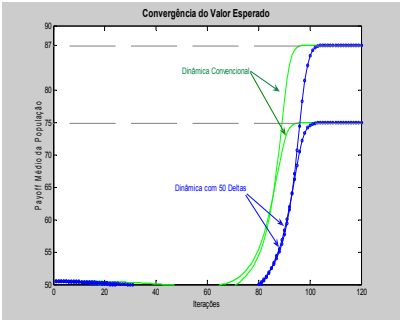
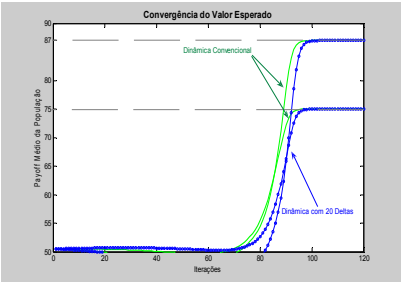
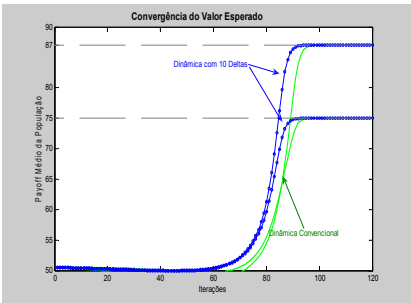
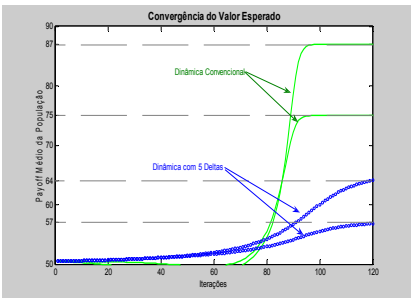


Figura 7-19 – Ponto de máximo em $(87,75)$

Np	Posição de Máximo	Figura de convergência do Valor Médio
100	(87,75)	 A line graph titled 'Convergência do Valor Esperado' showing 'Payoff Médio da População' on the y-axis (50 to 90) and 'Iterações' on the x-axis (0 to 120). It compares 'Dinâmica Concorrencial e com Deltas' (green line) and 'Dinâmica Concorrencial' (blue line). Both curves start at 50, remain flat until iteration 60, then rise sharply to converge at approximately 87.75 by iteration 100.
50	(87,75)	 A line graph titled 'Convergência do Valor Esperado' showing 'Payoff Médio da População' on the y-axis (50 to 90) and 'Iterações' on the x-axis (0 to 120). It compares 'Dinâmica Concorrencial' (green line) and 'Dinâmica com 50 Deltas' (blue line). Both curves start at 50, remain flat until iteration 60, then rise sharply to converge at approximately 87.75 by iteration 100.
20	(87,75)	 A line graph titled 'Convergência do Valor Esperado' showing 'Payoff Médio da População' on the y-axis (50 to 90) and 'Iterações' on the x-axis (0 to 120). It compares 'Dinâmica Concorrencial' (green line) and 'Dinâmica com 20 Deltas' (blue line). Both curves start at 50, remain flat until iteration 60, then rise sharply to converge at approximately 87.75 by iteration 100.
10	(87,75)	 A line graph titled 'Convergência do Valor Esperado' showing 'Payoff Médio da População' on the y-axis (50 to 90) and 'Iterações' on the x-axis (0 to 120). It compares 'Dinâmica Concorrencial' (green line) and 'Dinâmica com 10 Deltas' (blue line). Both curves start at 50, remain flat until iteration 60, then rise sharply to converge at approximately 87.75 by iteration 100.
5	(64,57)	 A line graph titled 'Convergência do Valor Esperado' showing 'Payoff Médio da População' on the y-axis (50 to 90) and 'Iterações' on the x-axis (0 to 120). It compares 'Dinâmica Concorrencial' (green line) and 'Dinâmica com 5 Deltas' (blue line). The green curve starts at 50, remains flat until iteration 60, then rises sharply to converge at approximately 87.75 by iteration 100. The blue curve starts at 50, remains flat until iteration 60, then rises more gradually to converge at approximately 64.57 by iteration 120.

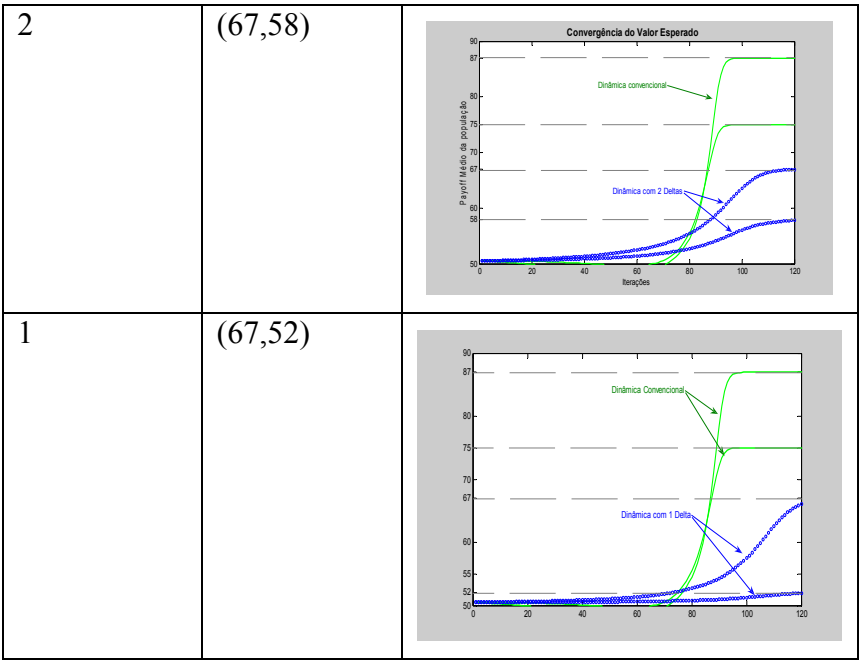


Tabela 7-4 – Convergência do valor esperado

A representação de uma função distribuição por um trem de deltas, provoca mutações nas proporções da matriz de *payoff* e como visto anteriormente mutações podem deslocar uma órbita de uma bacia de atração para outra. Portanto cuidados devem ser tomados para que este efeito não ocorra. Se a distribuição de estratégias não converge monotonicamente para um delta de Dirac, com a proporção de uma estratégia oscilando como na Figura 7-17, é porque inicialmente a órbita não vai em direção ao equilíbrio mais atrator tendo que se desviar em algum momento provocando a inversão das proporções entre estratégias.

O momento de desvio da órbita citado no parágrafo anterior ocorre justamente nas proximidades do estado estacionário interior definido pela Equação 4-19, θ_{int}^{est} . Pela posição relativa entre o estado inicial da órbita e θ_{int}^{est} , podemos deduzir se a convergência das proporções de cada estratégia de um jogador será monotônica ou não. Caso θ_{int}^{est} esteja situado numa posição posterior ao estado inicial na órbita, a convergência das proporções poderá não ser monotônica, porém se θ_{int}^{est} for anterior ao estado inicial na órbita a convergência das proporções será monotônica.

Podemos visualizar tais afirmações com o seguinte exemplo.

Imaginemos um jogo formado pelas seguintes matrizes de *payoff*.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Na Figura 7-20 são apresentados as órbitas partindo do centro do espaço de estados para os equilíbrios mais atratores, o θ_{int}^{est} e a membrana que divide as duas bacias de atração dos dois equilíbrios.

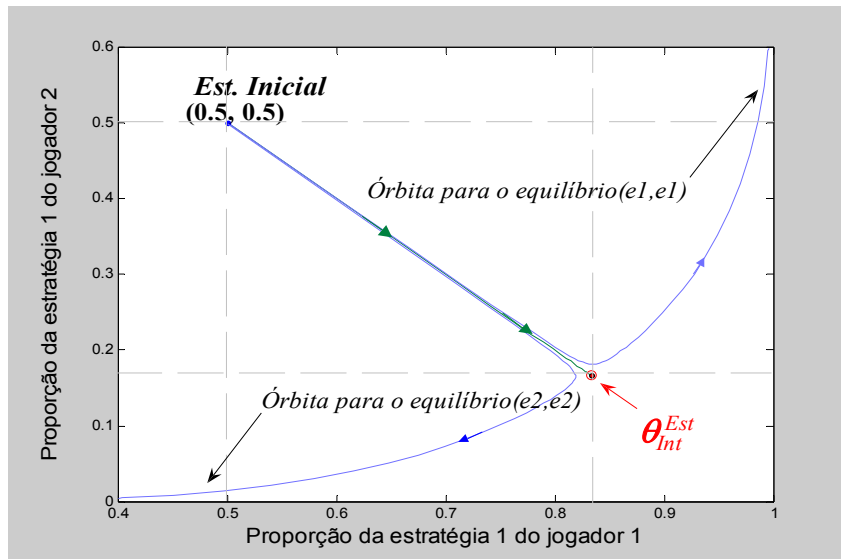


Figura 7-20 – Estado estacionário interior

Aa órbita iniciada no centro do espaço de estados sobre a *membrana* divisória se dirige a θ_{int}^{est} e uma outra órbita na bacia do equilíbrio (e_1^1, e_2^1) , próxima à membrana, segue na direção de θ_{int}^{est} e é desviada para (e_1^1, e_2^1) . No caso, θ_{int}^{est} é posterior ao estado inicial $(0.5, 0.5)$ na órbita para (e_1^1, e_2^1) , apresentando uma convergência não monotônica das proporções das estratégias, quando a proporção x_{22} da estratégia pura e_2^2 cresce inicialmente para em seguida decrescer e se anular.

O estado inicial localizado no centro do espaço de estados possui além da inconveniência de ser totalmente interior, estar algumas vezes situado antes de θ_{int}^{est} na órbita em direção ao equilíbrio mais atrator indicando a possibilidade de movimentos não monotônicos nas proporções das estratégias.

Na Figura 7-21, as resultantes definidas pela Equação 4-18 se anularem quando atingem o estado $\theta_{\text{int}}^{\text{est}}$.

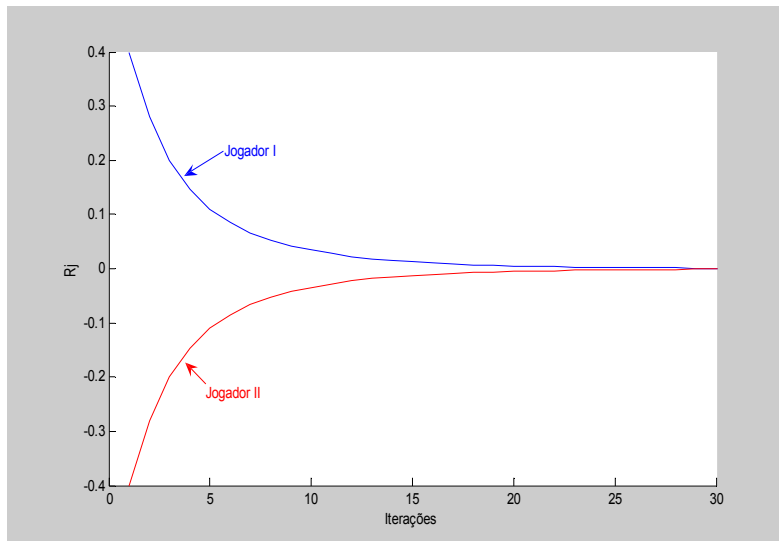


Figura 7-21 – Convergência das resultantes R_j de forças do jogador j

Já um estado inicial localizado muito próximo a um vértice que não seja equilíbrio, possui a vantagem de poder ser aproximado por um único Delta de Dirac. Por exemplo uma órbita iniciando no estado $(x_{11}, x_{21}) = \left(\lim_{x_{11} \rightarrow 1}, \lim_{x_{21} \rightarrow 0} \right)$ seguirá para o mesmo o equilíbrio mais atrator, mas estará sempre antes do estado $\theta_{\text{int}}^{\text{est}}$, resultando em órbitas com proporções oscilatórias. Portanto se tivermos um jogo caracterizado pelas seguintes matrizes de *payoff*:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

o estado final é o mesmo equilíbrio mais atrator que no caso em que a órbita se iniciasse no centro do espaço de estados.

A *membrana* que separa as bacias de atração se conecta aos vértices do espaço de estratégias mistas que não são equilíbrios. Assim, se um vértice que não é equilíbrio se conecta a um equilíbrio pode-se alcançar este equilíbrio a partir do estado $\left(\lim_{x_{11} \rightarrow 1}, \lim_{x_{21} \rightarrow 0} \right)$.

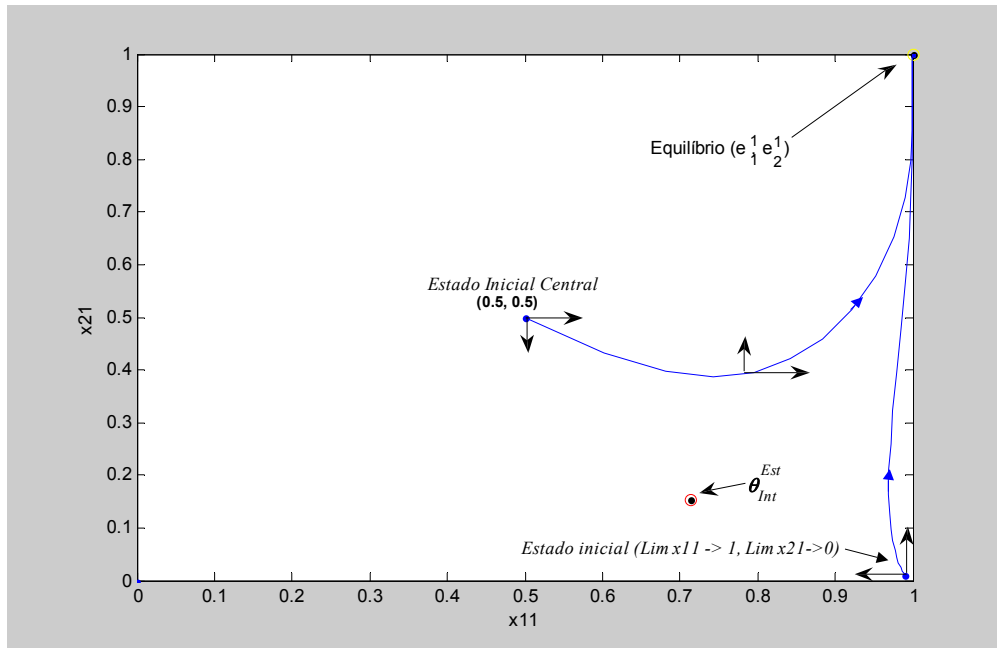


Figura 7-22 – Convergência a partir do estado inicial $\left(\lim_{x_{11} \rightarrow 1}, \lim_{x_{21} \rightarrow 0} \right)$

Quando substituímos o trem de deltas de Dirac da Equação 7-9 por um único delta de Dirac o que estamos fazendo é jogar a órbita para os vértices do espaço de estratégias mistas e com isso a convergência se dará imediatamente para um equilíbrio local. A vantagem é que o processamento para atingir um equilíbrio local não é computacionalmente intensivo necessitando de um número reduzidos de operações.

Os pontos de inflexão acontecem tanto no interior do poliedro de estratégias mistas como em suas faces, pois como eles estão sobre uma membrana divisória e estas membranas estão presentes entre dois ou mais equilíbrios, os pontos de inflexão existirão em qualquer face que contenha mais de dois equilíbrios.

A análise das forças resultantes descritas pela Equação 4-18, é útil na hora de decidirmos quais proporções serão anuladas.

$$\text{Considerando-se ainda, } A = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

observamos que o equilíbrio (e_1^1, e_2^1) , com *payoffs* (11,4) é o equilíbrio mais atrator do jogo. O outro equilíbrio existente (e_1^2, e_2^2) é menos atrator e possui uma bacia de atração menor, portanto quando iniciarmos a convergência a partir de um

estado que não está em equilíbrio como o estado $(x_{11}, x_{21}) = (1, 0)$ teremos resultantes que tendem para $x_{11} = 0$ e $x_{21} = 1$.

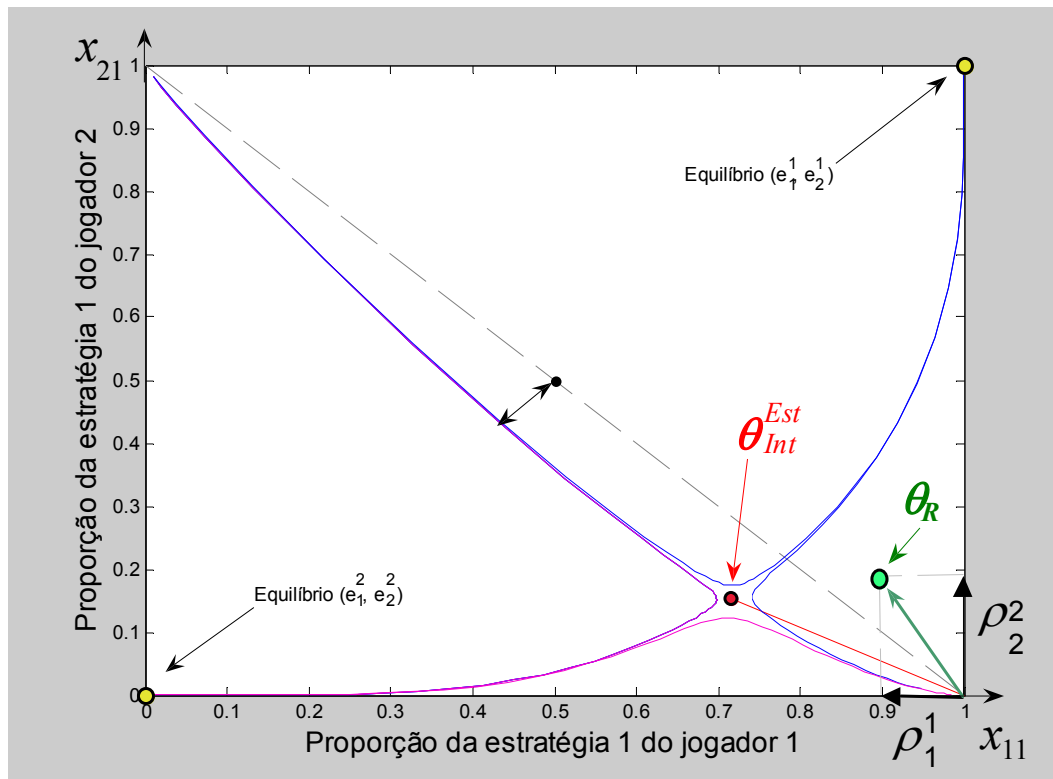


Figura 7-23 – θ_R se encontra dentro da bacia do equilíbrio (e_1^1, e_2^1)

Como na Figura 7-23 θ_R é o estado resultante das forças ρ_1^1 e ρ_2^2 com $\rho_2^2 > \rho_1^1$ e θ_{int}^{est} está sobre a membrana divisória de uma bacia de atração que engloba θ_R , a proporção x_{11} da estratégia pura 1 do jogador 1, e_1^1 , não pode ser anulada, tendo que ficar obrigatoriamente com proporções da população do jogador 1 $[x_{11}, x_{12}] = [1, 0]$ e as proporções do jogador 2 serão $[x_{21}, x_{22}] = [1, 0]$.

Como as membranas das bacias de atração de um dado equilíbrio só se conectam aos vértices, perfis fora do equilíbrio, que contenham uma das estratégias do perfil em equilíbrio, são necessários mais de um passo para se atingir o equilíbrio mais atrator do poliedro caminhando-se pelos vértices.

Imaginemos um jogo com 3 jogadores, cada qual com 2 estratégias, teremos um espaço cúbico de estratégias mistas.

Caso as matrizes de *payoff* que representam este jogo forem:

$$M^1_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M^2_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} e$$

$$M^3_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teremos as seguintes bacias de atração visualizadas nas faces do cubo.

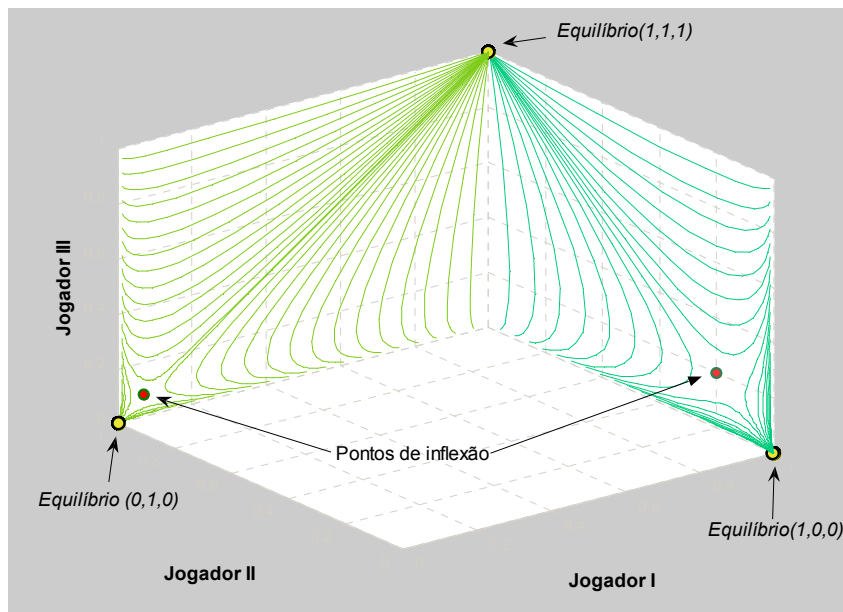


Figura 7-24 – Bacias nas faces traseira e lateral esquerda do cubo

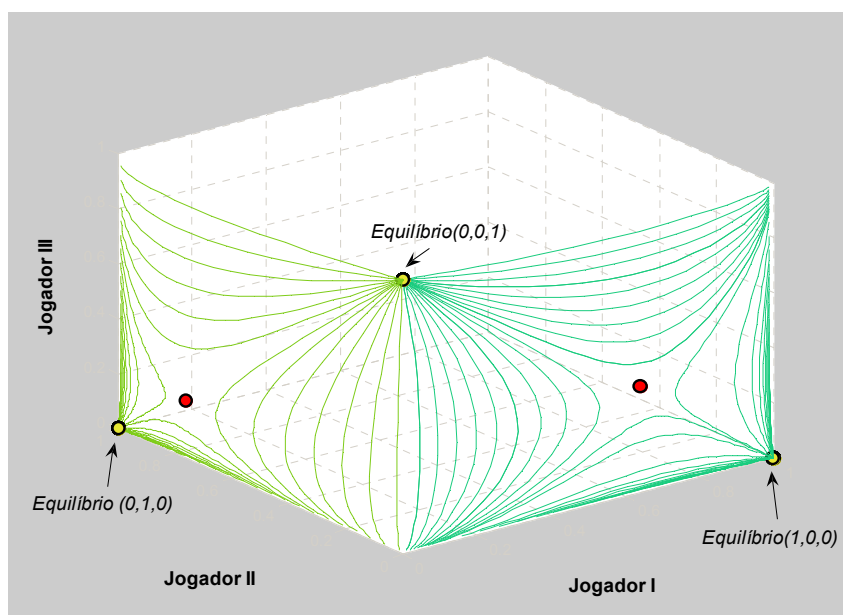


Figura 7-25 – Bacias nas faces frontal e lateral direita do cubo

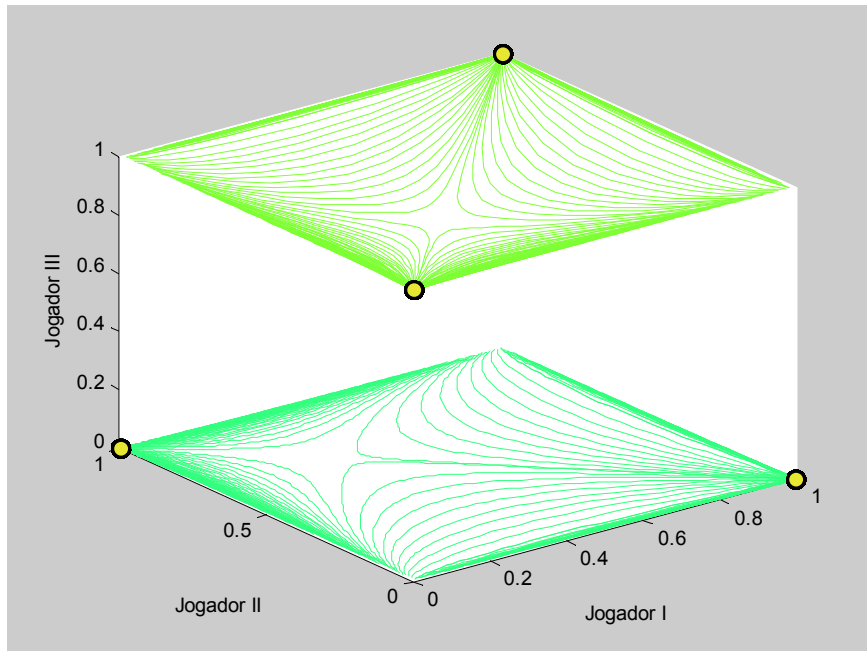


Figura 7-26 – Bacias nas faces superior e inferior do cubo

Caso iniciemos a convergência no perfil $[x_{11}, x_{21}, x_{31}] = [0,0,0]$ correspondente ao elemento da matriz M^1 de *payoff* (2,2,2), a convergência irá para o equilíbrio $[x_{11}, x_{21}, x_{31}] = [0,0,1]$ correspondente ao elemento (2,2,1) da matriz de *payoff*.

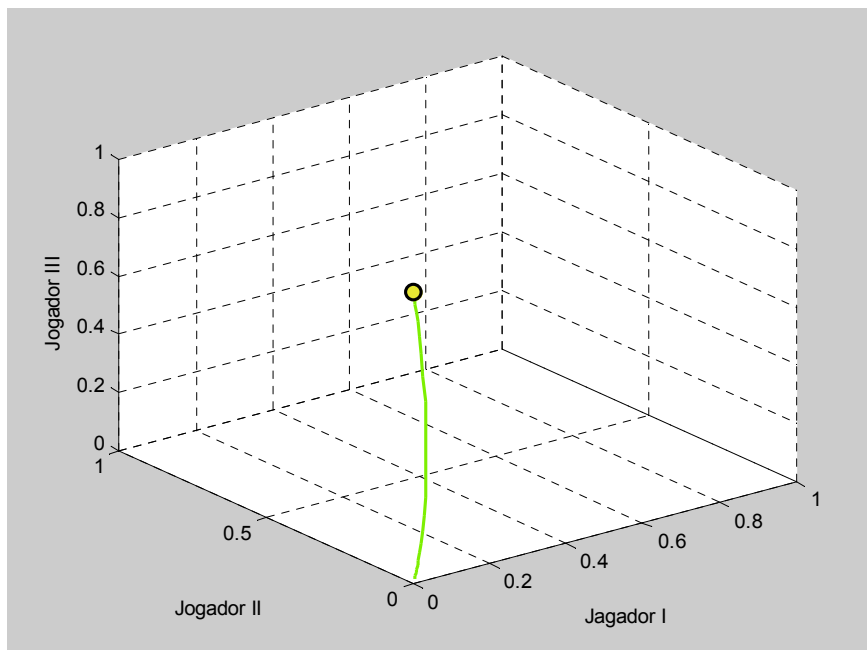


Figura 7-27 – Representação da órbita que vai do estado [0,0,0] ao equilíbrio [0,0,1]

Após a convergência da órbita, eliminamos a linha e a coluna referente a este perfil, assim o vértice $[0,0,1]$ não é mais um equilíbrio e reiniciamos a convergência deste novo estado. Para qualquer estado $[x_{11}, x_{21}, 1]$ a convergência irá para o vértice $[1,1,1]$, ou elemento $(1,1,1)$ da matriz M^1 .

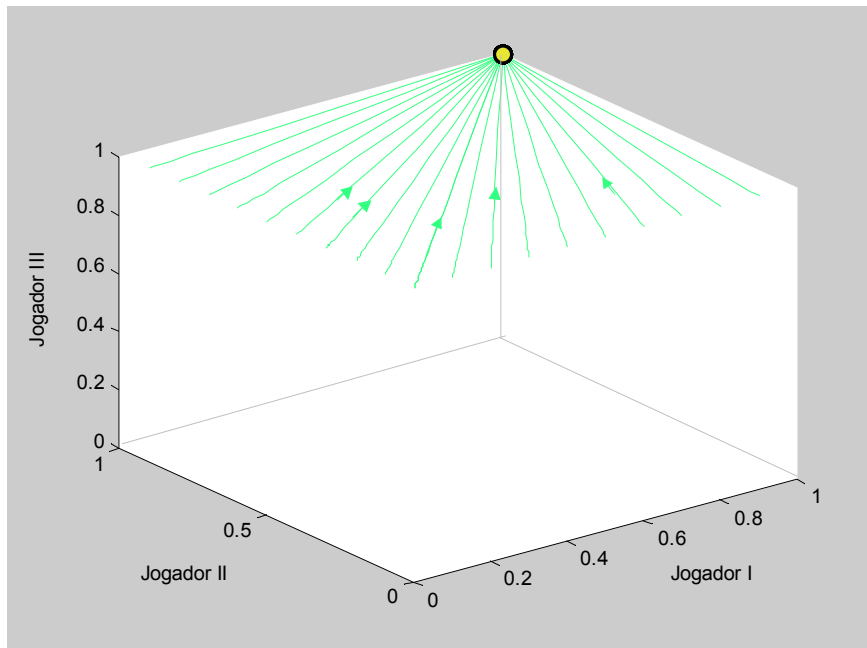


Figura 7-28 – Segundo passo da convergência para o equilíbrio $[1,1,1]$

Partindo-se do mesmo vértice não atrator formado pelo perfil de estratégias puras (e_1^2, e_2^2, e_3^2) chega-se ao equilíbrio mais atrator (e_1^1, e_2^1, e_3^1) através das órbitas distorcidas sob a influência dos vários perfis do jogo.

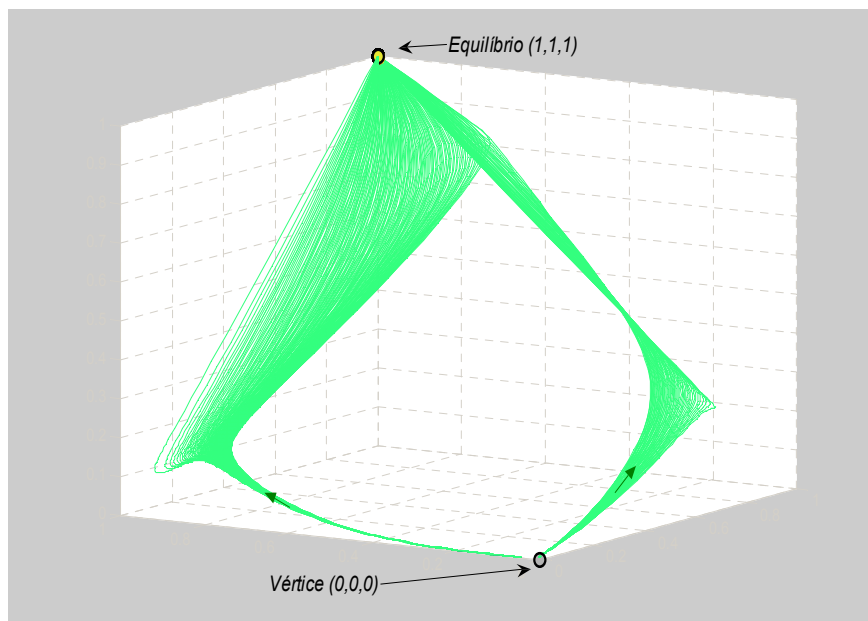


Figura 7-29 – Convergência pelo interior do espaço de estratégias mistas

Estas distorções podem ser atenuadas pelo mesmo princípio da equação

$\left[g_i \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right]^n$ usado nos casos de matrizes de *payoff* representadas por funções e

descrito a seguir.

No caso de um espaço de *payoff* representado por uma função, teremos a cada iteração da dinâmica do replicador uma função de distribuição $g_i^t(x)$ que também poderá ser aproximada pela Equação 7-9, porém neste caso será necessário encontrar as posições p_k do k -ésimo pico.

Para encontrar os picos da função $g_i^t(x)$ precisamos utilizar métodos de otimização global e como estamos lidando com dinâmicas, nos basearemos nelas para alcançar tais ótimos. Suponhamos a convergência monotônica de uma determinada distribuição. A transformação que uma dinâmica imprime à função unidimensional $g_i^t(x)$ de distribuição ao longo de uma órbita é de exaltar os maiores valores de $g_i^t(x)$, e reduzir os menores, exatamente como no processo de seleção, onde as estratégias com maior *payoff* crescem em maior proporção dentro da população, enquanto aquelas estratégias com *payoff* abaixo da média, têm suas proporções reduzidas na população. Esta transformação está exemplificada na Figura 7-30.

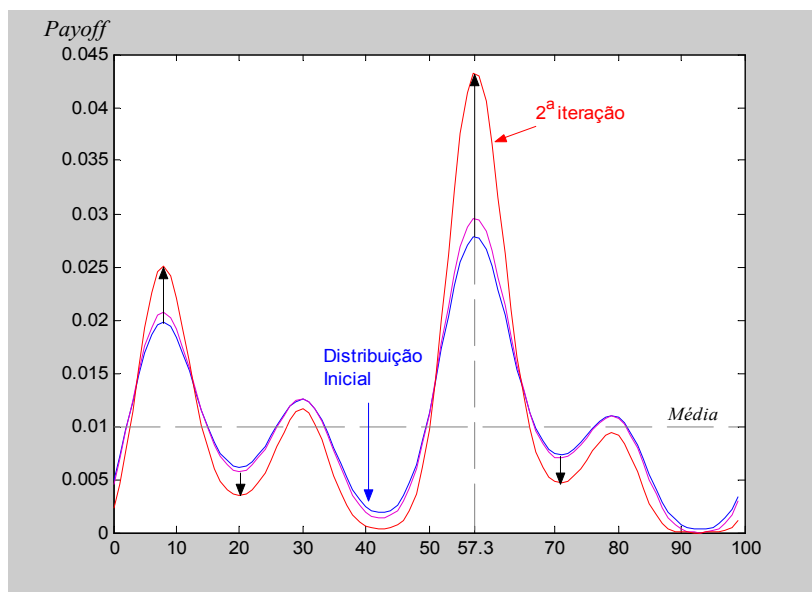


Figura 7-30 – Efeito da dinâmica do replicador sobre uma distribuição de proporções

A cada iteração a função de distribuição $g_i^t(x)$ irá se aproximando de um Delta de Dirac $A\delta(x - p^*)$ com p^* sendo o ponto de ótimo como visto na Figura 7-31.

Após $g_i^t(x)$ ter se transformado em $A\delta(x - p^*)$, encontramos o ponto p^* aplicando o cálculo do valor esperado de x .

$$E\{x\} = \int x g_i^{Tfinal} dx = \int x \delta(x - p^*) = p^* .$$

Aplicar a dinâmica do replicador em funções contínuas uni dimensionais é similar a aplicar a dinâmica a jogos de uma única população, onde a estratégia de maior *payoff* médio é a estratégia ótima, o que implica que usarmos a dinâmica do replicador seria eficaz na busca do ponto de máximo de $g_i^t(x)$. Porém a complexidade da aplicação destas dinâmicas aumenta grandemente a cada iteração inviabilizando sua aplicação para esta finalidade

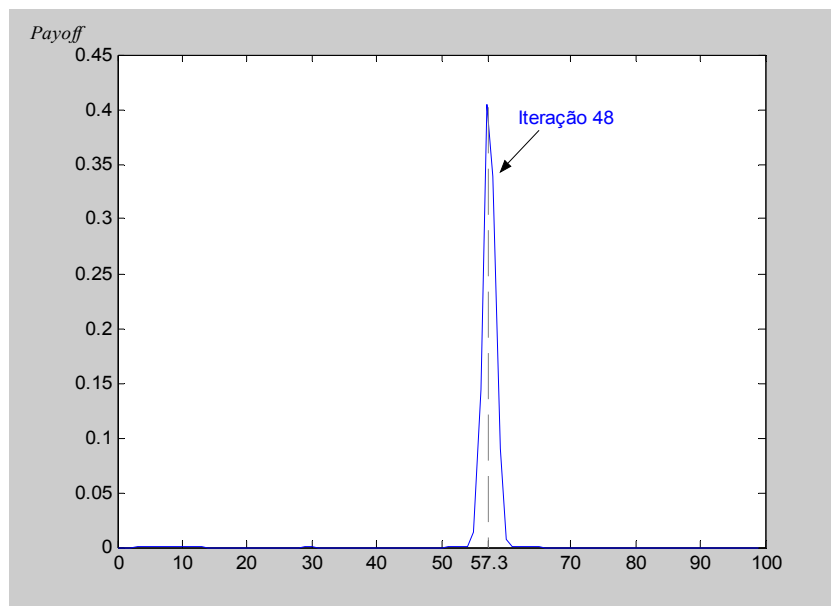


Figura 7-31 – Delta de Dirac como estado final da distribuição de proporções.

A desvantagem da aplicação da dinâmica do replicador para se encontrar o ótimo é o complexo equacionamento das distribuições a cada iteração.

Existem outras transformações com efeito similar em $g_i(x)$ e que por razões práticas se tornam opções interessantes. A seguir serão descritas duas destas transformações com suas vantagens e desvantagens.

Com este propósito, consideremos alguns teoremas sobre diferenciação que nos permite determinar os pontos críticos para o esboço de funções.

Suponhamos que a Figura 7-32 represente um esboço do gráfico de uma função f para todo x num intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Esta figura mostra que quando um ponto se move ao longo da curva de A até B, os valores da função crescem à medida que a abscissa cresce, e quando um ponto se move ao longo da curva, de B até C, os valores da função decrescem à medida que a abscissa cresce. Dizemos então que f é crescente no intervalo fechado $[x_1, x_2]$ e que f é decrescente no intervalo fechado $[x_2, x_3]$. São as seguintes, as definições precisas de uma função crescente ou decrescente em um intervalo.

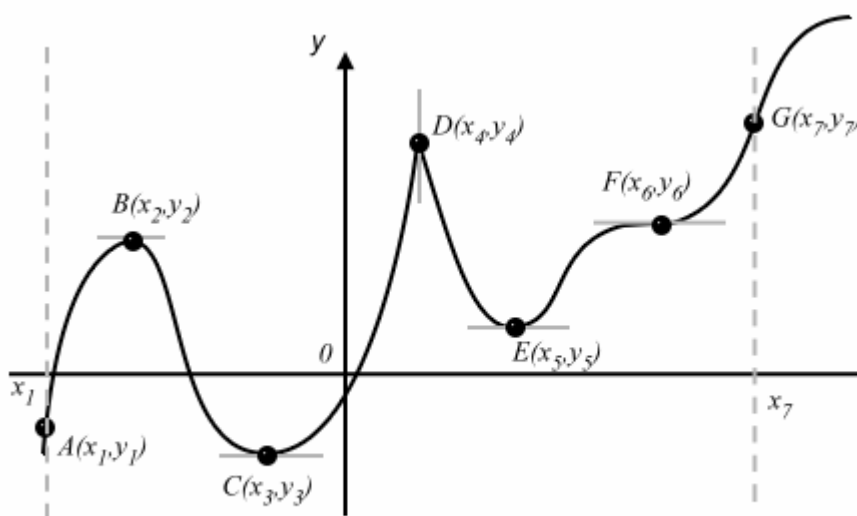


Figura 7-32 – Função com pontos críticos

Diz-se que uma função f definida em um intervalo é crescente neste intervalo se e somente se $f(x_1) < f(x_2)$, para $x_1 < x_2$.

Diz-se que a função f definida em um intervalo é decrescente neste intervalo se e somente se $f(x_1) > f(x_2)$ e $x_1 < x_2$.

Se uma função é crescente ou decrescente em um intervalo dizemos que esta função é monótona neste intervalo.

Observamos que quando a inclinação da reta tangente à curva é positiva, a função é crescente e quando a inclinação da reta tangente é negativa a função é decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva $f(x)$, f será crescente quando $f'(x) > 0$, e f será decrescente quando $f'(x) < 0$.

Como $f'(x)$ é a razão de variação dos valores da função $f(x)$ em relação a x , quando $f'(x) > 0$, os valores da função são crescentes à medida que x cresce; e quando $f'(x) < 0$ os valores da função $f(x)$ são decrescentes à medida que x cresce. Assim temos os seguintes teoremas:

Teorema 7-1 - Seja uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b) :

- (i). se $f'(x) > 0$ para todo x em (a,b) , então f é crescente em $[a,b]$
- (ii). se $f'(x) < 0$ para todo x em (a,b) , então f é decrescente em $[a,b]$.

Teorema 7-2 – Seja uma função f contínua para todos os pontos do intervalo aberto (a,b) contendo c , e suponhamos que f' exista em todos os pontos de (a,b) e que eventualmente não exista em c :

- (i). Se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x num intervalo aberto, tendo como c um extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x num intervalo, tendo c como extremo esquerdo; então, f tem um valor máximo relativo em c .
- (ii). Se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x num intervalo aberto, tendo como c um extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x num intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo; então, f tem um valor mínimo relativo em c .

Resumindo, para determinarmos os extremos de uma função f devemos:

- (1). Encontrar $f'(x)$
- (2). Encontrar os números críticos de f , isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não exista.
- (3). Aplicar o teste da derivada primeira.

Teorema 7-3 – Seja c um número crítico de uma função f no qual $f'(c) = 0$ e f' existe para todos os valores de x num intervalo aberto contendo c . Então se a derivada segunda de f , $f''(c)$ existe e

- (i). Se $f''(c) < 0$, f possui um valor máximo relativo em c .
- (ii). Se $f''(c) > 0$, f possui um valor mínimo relativo em c .

E complementando com as seguintes definições:

1. Se a função f está definida no ponto x_i , então a derivada à direita da função $f(x)$ em x_i , indicada por $f'_+(x_i)$ é definida por:

$$f'_+(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

2. Se a função f está definida no ponto x_i , então a derivada à esquerda da função $f(x)$ em x_i , indicada por $f'_-(x_i)$ é definida por:

$$f'_-(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

De posse destes teoremas e definições sugere-se as seguintes diferenciações em $g_i(x)$.

$$p(x) = -g'_+(x)g'_-(x) + \sqrt{[g'_+(x)g'_-(x)]^2} \quad \text{Equação 7-13}$$

$p(x)$ será diferente de zero nos extremos relativos. Se utilizarmos a derivada segunda de $g(x)$, podemos determinar se os extremos relativos são máximos ou mínimos. Deve-se levar em conta também os valores de $g(x)$ nos pontos extremos do intervalo considerado, $g(Val_{min})$ e $g(Val_{max})$.

A grande dificuldade de lançar mão das derivadas laterais seria como determinar na prática o dx para encontrar $g'_+(x) = g'(x + dx)$ e $g'_-(x) = g'(x - dx)$. Para partes muito suaves de função, o dx poderia ser maior que numa parte com derivadas mais acentuadas. Portanto a escolha do dx é crítica e não deve ser única para todo o domínio.

Considerando-se que estamos lidando com funções contínuas e admitindo-se, como consequência, que a função possui banda estreita, a máxima frequência do espectro da função pode dar indícios do dx mínimo e a frequência fundamental poderá nos indicar o valor máximo a ser utilizado, como exemplificada na Figura 7-33.

Adotamos então, como a mínima variação entre dois picos de $f(t)$, $dx = \frac{1}{8\pi f_{\max}}$ que é a menor distancia temporal para se alcançar o pico do mais alto harmônico como ilustrado pela Figura 7-34.

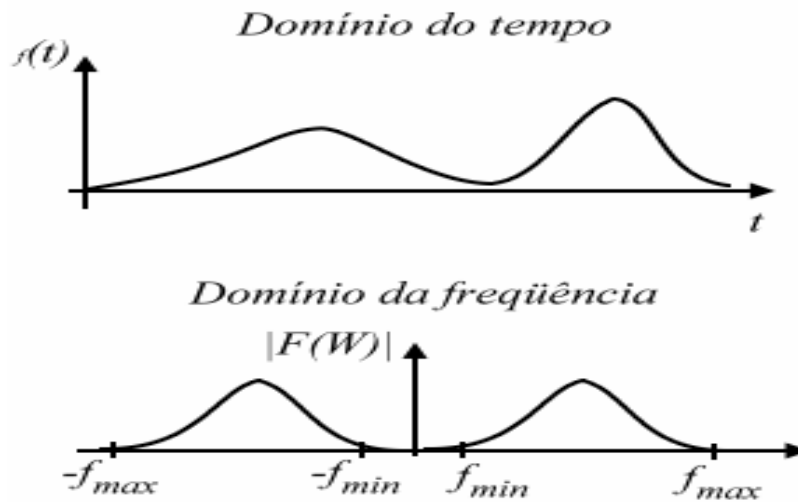


Figura 7-33 – Frequência máxima como indicadora do dx

Como no caso exemplo da Figura 7-30,

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{200}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{25}\right) \text{ e } f'(t) \text{ como a derivada de } f(t)$$

em relação a t igual a

$$\frac{2\pi}{200} \cos\left(\frac{2\pi t}{200}\right) + \frac{2\pi}{50} \cos\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + \frac{2\pi}{25} \cos\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$$

temos que:

$$f'_+(t) = \frac{2\pi}{200} \cos\left(\frac{2\pi(t-dt)}{200}\right) + \frac{2\pi}{50} \cos\left(\frac{2\pi(t-dt)}{50}\right) + \frac{2\pi}{25} \cos\left(\frac{2\pi(t-dt)}{25}\right) \text{ e}$$

$$f'_-(t) = \frac{2\pi}{200} \cos\left(\frac{2\pi(t+dt)}{200}\right) + \frac{2\pi}{50} \cos\left(\frac{2\pi(t+dt)}{50}\right) + \frac{2\pi}{25} \cos\left(\frac{2\pi(t+dt)}{25}\right)$$

Sendo $f_{\max} = \frac{1}{25} \text{ Hz}$ o harmônico de máxima frequência de $f(t)$, temos uma

indicação de quando deve ser o dt fazendo tal $dt = \frac{25}{8\pi}$.

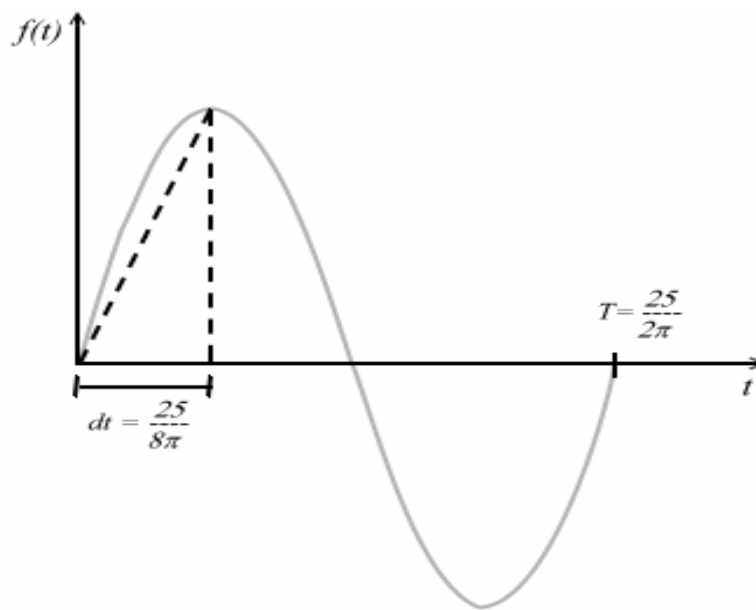


Figura 7-34 – Incremento no domínio em t , dt responsável pela variação mais rápida de $f(t)$

Substituindo-se $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ por $g'_+(x)$ e $g'_-(x)$ respectivamente na Equação 7-13 obtemos o resultado da Figura 7-35.

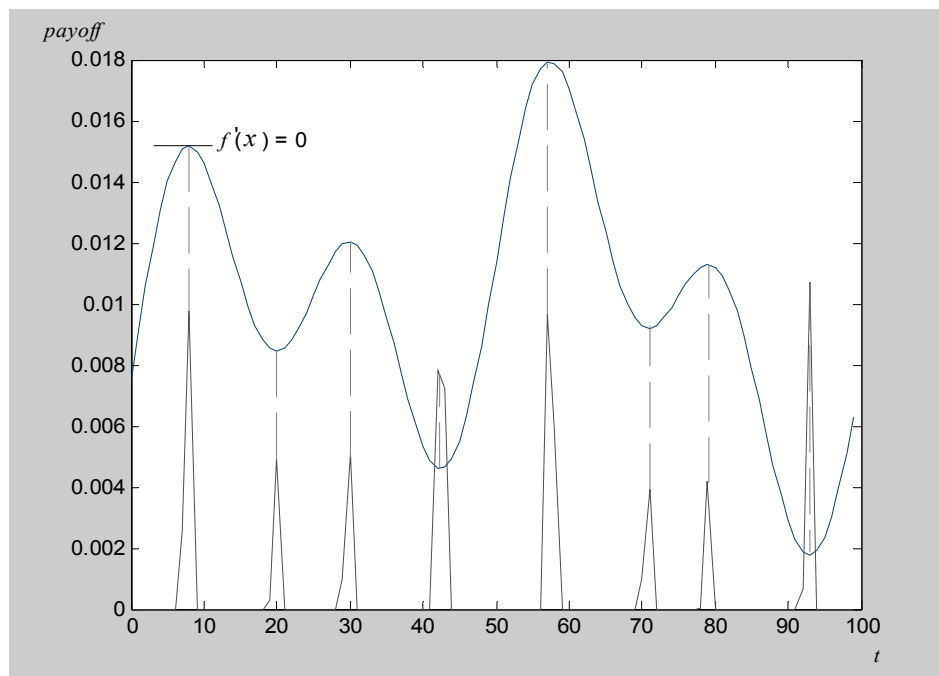


Figura 7-35 – Aplicação da Equação 7-13 sobre uma função distribuição de proporções

Para encontrar as localizações dos picos sugere-se o seguinte algoritmo:

PASSO 0. Inicializa-se $min = MIN$ e $max = MAX$, onde MIN é a restrição para o x mínimo, ou extremo esquerdo e MAX é a restrição de x máximo, ou extremo direito. E inicia o processo iterativo com $It = 0$;

PASSO 1. Encontra-se $E^{It}\{x\} = \int_{min}^{max} xp(x)$

PASSO 2. Se $max = E^{It}\{x\}$ então

$$min = E_{+}\{x\} = \int_{E_{+}^{It}}^{max} xp(x) = \int_{E^{It}}^{max} xp(x) - E^{It}$$

$$max = MAX$$

Senão

$$max = E^{It}\{x\}$$

PASSO 3. Se foram encontrados os números de picos pré especificados **PÁRA**

Senão vai para o **PASSO 4**

PASSO 4. Vai para a Iteração $It = It + 1$;

Volta para o **PASSO 1**

Outra transformação considerada para a função distribuição $g_i(x)$ é

$$\left[g_i\left(\frac{x}{\kappa}\right) \right]^\eta, \text{ onde } \eta \text{ modula a amplitude e } \kappa \text{ controla a banda.}$$

O efeito de η é promover a modulação de $g_i(x)$ por si mesma fazendo com que sua banda no espectro dobre a cada multiplicação de $g_i(x)$ por si mesma, trazendo a cada multiplicação harmônicos cada vez maiores. O efeito de κ compensa possíveis consequências negativas do aumento da banda.

Essa transformação, apesar de ter um equacionamento bastante simples necessita de metodologias de integração numérica, desde que integrar $\left[g_i\left(\frac{x}{\kappa}\right) \right]^\eta$ simbolicamente pode nem sempre ser simples.

Como exemplo para esta transformação fazemos;

$$g_i(x) = \frac{1}{(20 - 0.1x)^2 + 1} + \frac{1.2}{(80 - 0.1x)^2 + 1}$$

Utilizamos neste exemplo η igual a 10 para garantir uma diferença significativa entre $g_i(x)$ e $[g_i(x)]^\eta$ e κ igual a 1. Ambas as funções normalizadas podem ser visualizadas na Figura 7-36

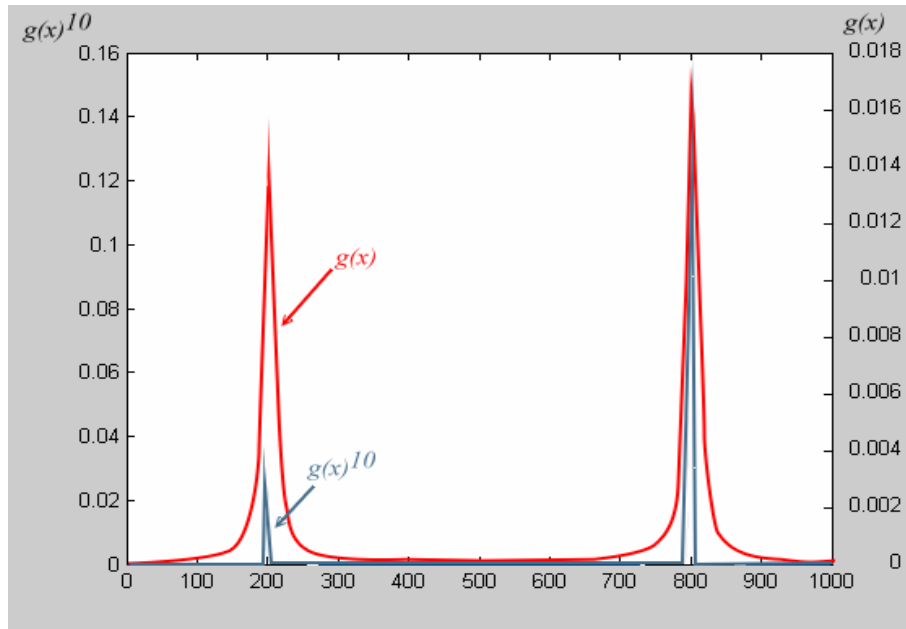


Figura 7-36 – Aplicação de $\left[g_i \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right]^\eta$ sobre uma função dist. de proporções

Na utilização desta transformação sugere-se o seguinte algoritmo.

PASSO 0. Inicializa-se os extremos de busca $Lmin = MIN$ e $Lmax = MAX$, onde MIN e MAX são as restrições de mínimo x ou extremo esquerdo e de máximo x ou extremo direito respectivamente.

PASSO 1. Calcula-se numericamente

$$T_g = \int_{MIN}^{MAX} g_i(x) dx \text{ e } T_{g^\eta} = \int_{MIN}^{MAX} \left[g_i \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right]^\eta dx$$

Normaliza-se as duas funções,

$$g_{in}(x) = \frac{g_i(x)}{T_g} \text{ e } g_{in}(x)^\eta = \frac{g_i(x)^\eta}{T_{g^\eta}}$$

PASSO 2. Calcula-se os valores esperados

$$E(x) = \int_{MIN}^{MAX} x g_{in}(x) dx \text{ e } E_\eta(x) = \int_{MIN}^{MAX} x g_{in}(x)^\eta dx$$

PASSO 3. EQUANTO $|E(x) - E_n(x)| > TOL$ segue ao **PASSO 4**

PASSO 4. Faz-se a verificação

Se $E_n(x) > E(x) \rightarrow$ direção do máximo está à direita de $E(x)$

Então $Lmin = E(x)$ e $Lmax = MAX$

Senão, caso $E_n(x) < E(x) \rightarrow$ direção do máximo está à esquerda de $E(x)$

Então $Lmin = MIN$ e $Lmax = E(x)$

PASSO 5. Calcula-se numericamente

$$T_g = \int_{Lmin}^{Lmax} g_i(x) dx \text{ e } T_{g^\eta} = \int_{Lmin}^{Lmax} \left[g_i\left(\frac{x}{K}\right) \right]^\eta dx$$

PASSO 6. Calcula-se os valores esperados

$$E(x) = \int_{Lmin}^{Lmax} x g_{in}(x) dx \text{ e } E_\eta(x) = \int_{Lmin}^{Lmax} x g_{in}(x)^\eta dx$$

PASSO 7. Volta ao **PASSO 3**

Para a função da Figura 7-36, uma tolerância TOL igual a 0.001, o extremo esquerdo MIN igual a zero e o extremo direito igual a 1000, este algoritmo apresentou a seguinte sequência de iterações até a convergência no ponto de máximo igual; a 800.

Iteração	Lmin	E(x)	Lmax	E _η (x)- E (x)
0	0	526.8637	1000	189.6296
1	526.8638	798.4700	1000	1.5298
2	798.4700	817.9983	1000	16.9568
3	798.4700	805.8474	817.9983	4.806
4	798.4700	801.9897	805.8474	1.0265
5	798.4700	800.2252	801.9897	0.038291
6	798.4700	799.3510	800.2252	0.029188
7	799.3510	799.7884	800.2252	0.0024113
8	799.7883	800.0068	800.2252	1.9542e-005

Tabela 7-5 – Convergência para o ótimo global da distribuição

No exemplo da Figura 7-37 o perfil para o qual a dinâmica do replicador convergirá será o perfil de maior *payoff* médio $[e^4, e^2]$ onde o jogador obtém um *payoff* igual a nove, porém o perfil em equilíbrio de *payoff* máximo e portanto mais eficiente, é o perfil $[e^1, e^6]$ com *payoff* igual a dez. Para o primeiro jogador a estratégia 4 é a que possui o maior *payoff* médio e para o segundo jogador a estratégia 2 é a que possui o maior *payoff* médio. Diante de incertezas seria aconselhável jogá-las gerando o perfil $[e^4, e^2]$, mesmo que o equilíbrio mais eficiente ocorra quando o primeiro jogador jogue sua estratégia 1 e o segundo jogador jogue sua estratégia 6.

Teoricamente, para se encontrar o perfil em equilíbrio mais eficiente $[e^1, e^6]$ basta modificarmos a dinâmica do replicador convencional, substituindo-se a parcela de *payoff* médio de uma estratégia pelo *payoff* máximo. Assim a dinâmica do replicador seria transformada em:

$$x_{k,i}^{t+1} = \left[\max(\pi_{i,-i}^k) - \max(\pi_{i,-i}) w_{-i} \right] x_{k,i}^t \quad \text{Equação 7-14}$$

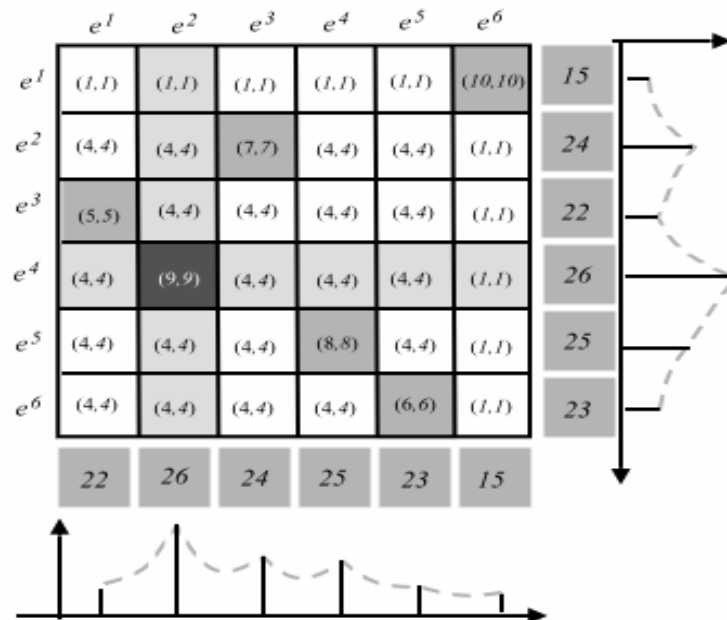


Figura 7-37 – Matriz de *payoff* inicial onde cada dimensão obtém o mesmo *payoff*

Onde $\max(\pi_{i,-i}^k)$ é o máximo *payoff* obtido pela estratégia k do jogador i em todos os perfis em que a estratégia k esteja presente e $\max(\pi_{i,-i})w_{-i}$ é a média dos *payoffs* máximos de cada estratégia do jogador i .

Caso usássemos a dinâmica convencional o equilíbrio alcançado seria o $[e^4, e^2]$. Ao aplicarmos a dinâmica da Equação 7-14 atingir-se-á o equilíbrio mais eficiente do jogo $[e^1, e^6]$. Podemos ver na Figura 7-38 a convergência da média para o perfil com *payoff* máximo igual a 10 e na Figura 7-39 a superfície gerada pela matriz de *payoff*.

Para a Equação 7-14, todo o procedimento de convergência é semelhante ao da dinâmica do replicador convencional, com diferença no ponto inicial, pois enquanto é possível encontrar o valor esperado de cada estratégia através de simulações, o valor de *payoff* máximo para cada estratégia exigiria um esforço em termos de otimização que não justifica a aplicação da dinâmica descrita pela Equação 7-14. Para se encontrar um *payoff* ótimo para cada estratégia seria necessário percorrer $m^{(n-1)}$ elementos ou ter a disposição técnicas de otimização global que por si só acabaria com a necessidade de se recorrer aos jogos evolutivos, para se encontrar o ótimo.

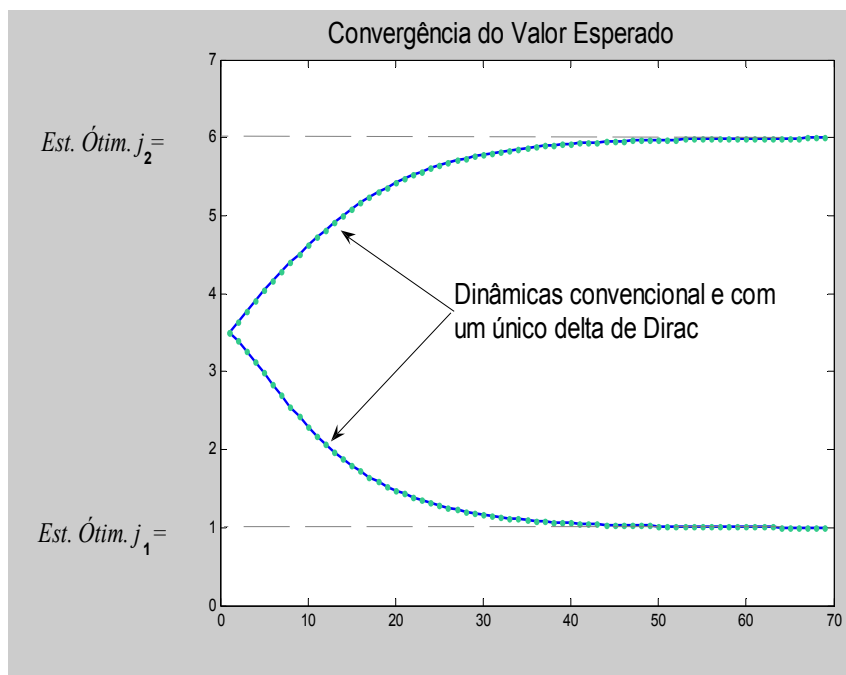


Figura 7-38 – Comparação entre as convergências das dinâmicas convencional e modificada

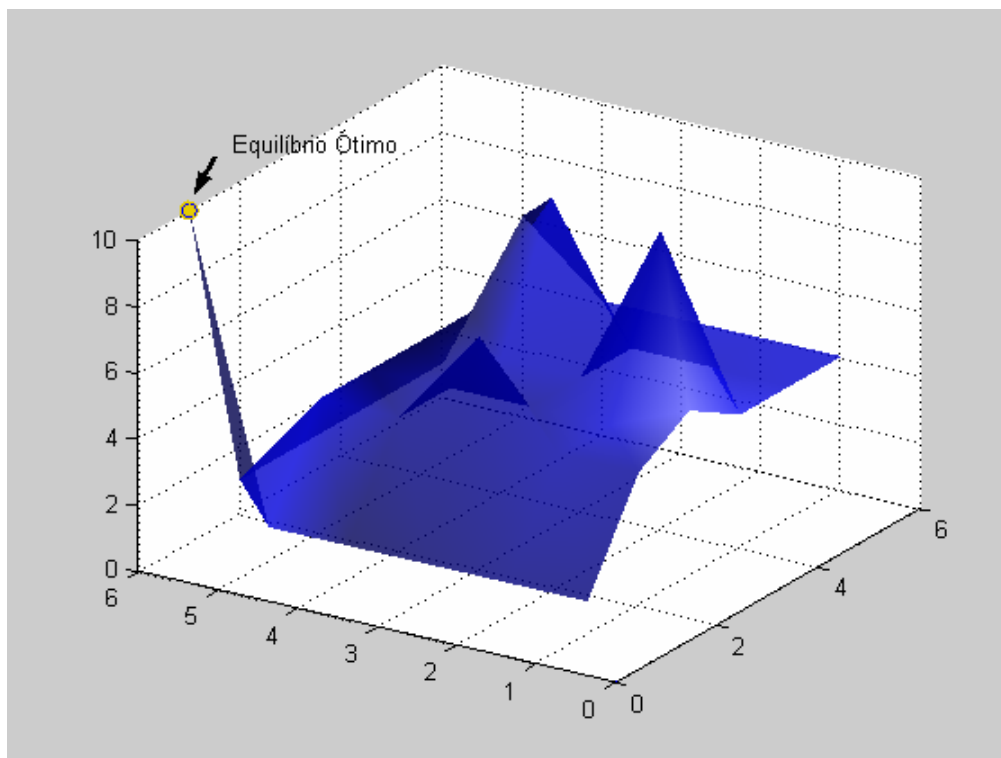


Figura 7-39 – Convergência para o ponto de ótimo

O número de equilíbrios em estratégias puras existentes num jogo é menor que o número de perfis da matriz e vai depender do jogo. Então para a matriz de *payoff* da Figura 7-37, com somente duas dimensões teríamos no pior dos casos seis equilíbrios dentre os quais o equilíbrio de *payoff* máximo $[e^1, e^6]$. Deste modo temos dois fatores limitantes que seriam o número de equilíbrios em estratégias puras do jogo além do número de elementos da matriz de *payoff* que inviabilizaria totalmente a sua aplicação numa extensa gama de jogos. Para jogos restritos a um pequeno número de jogadores, onde cada um pretende escolher uma entre poucas opções de estratégias, inclusive aqueles onde em vez de estratégias se interessam na determinação de melhores regras a serem adotadas, ou para alguns jogos com estratégias numéricas (a estratégia é um simples número como preço ou quantidade), a técnica pode ser aplicada. Ao aplicarmos a dinâmica do replicador iterativamente, de modo a se percorrer todos os equilíbrios assintoticamente estáveis do jogo produz-se a seguinte ordem de equilíbrios.

Ao retirarmos do jogo as linhas e colunas dos equilíbrios $[e^4, e^2]$, $[e^5, e^4]$ e $[e^2, e^3]$ a matriz de *payoff* da Figura 7-37 se reduzirá a matriz da Figura 7-41.

$$x = 4 \ y = 2 \ \max = 9$$
$$x = 5 \ y = 4 \ \max = 8$$
$$x = 2 \ y = 3 \ \max = 7$$
$$x = 1 \ y = 6 \ \max = 10$$

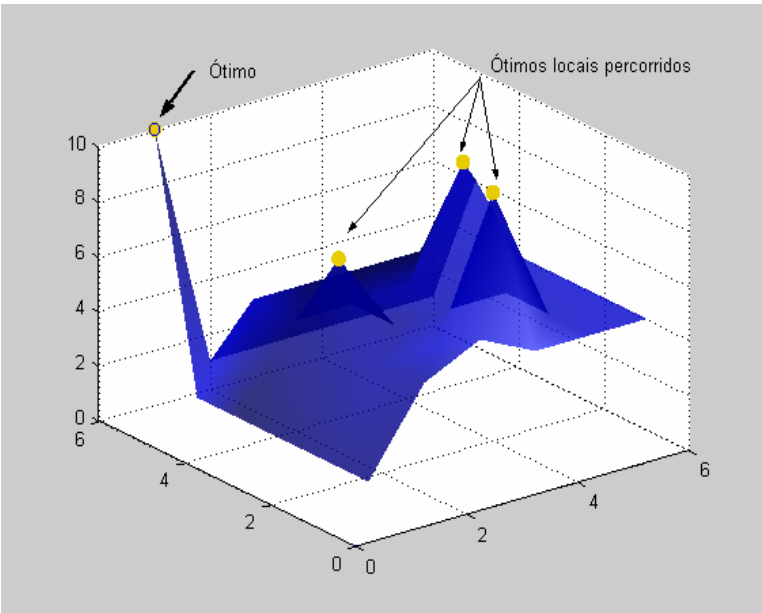


Figura 7-40 – Algoritmo percorrendo máximos

Observamos que neste ponto, o equilíbrio $[e^1, e^6]$ com o maior *payoff*, passa a ser também o equilíbrio de maior *payoff* médio.

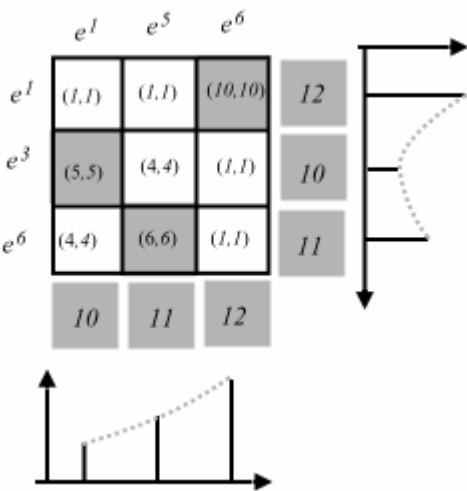


Figura 7-41 – Matriz de *payoff* da Figura 7-37 reduzida

Em muitos algoritmos de otimização a busca pelo ótimo é feita em uma vizinhança, numa determinada direção, até que se encontre uma solução de melhor custo que num problema de minimização será o menor custo. A busca é feita até que não se encontre nenhuma solução de melhor custo e assim temos uma solução ótima local. Porém um algoritmo que pretenda buscar o ótimo global não

pode buscar em sua vizinhança a direção que melhora o custo, desde que sua vizinhança pode não exprimir a vizinhança do ótimo global, ou seja, se não estivermos na vizinhança do ótimo não podemos simplesmente seguir a direção de melhor custo.

Podemos aplicar agora o princípio da equação $\left[g_i \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right]^\eta$ no exemplo do jogo apresentado anteriormente neste capítulo e representado pelas matrizes de *payoff*,

$$M^1_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M^2_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$M^3_{2 \times 2 \times 2} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, as matrizes de *payoff* serão modificadas para $M' = [M]^\eta$ privilegiando os maiores *payoffs*.

As órbitas distorcidas, ilustradas na Figura 7-29, que partem do vértice com proporções $(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = (0,0,0)$ e seguem para o equilíbrio mais atrator com proporções $(x_{11}, x_{21}, x_{31}) = (1,1,1)$ transformam-se em órbitas retilíneas.

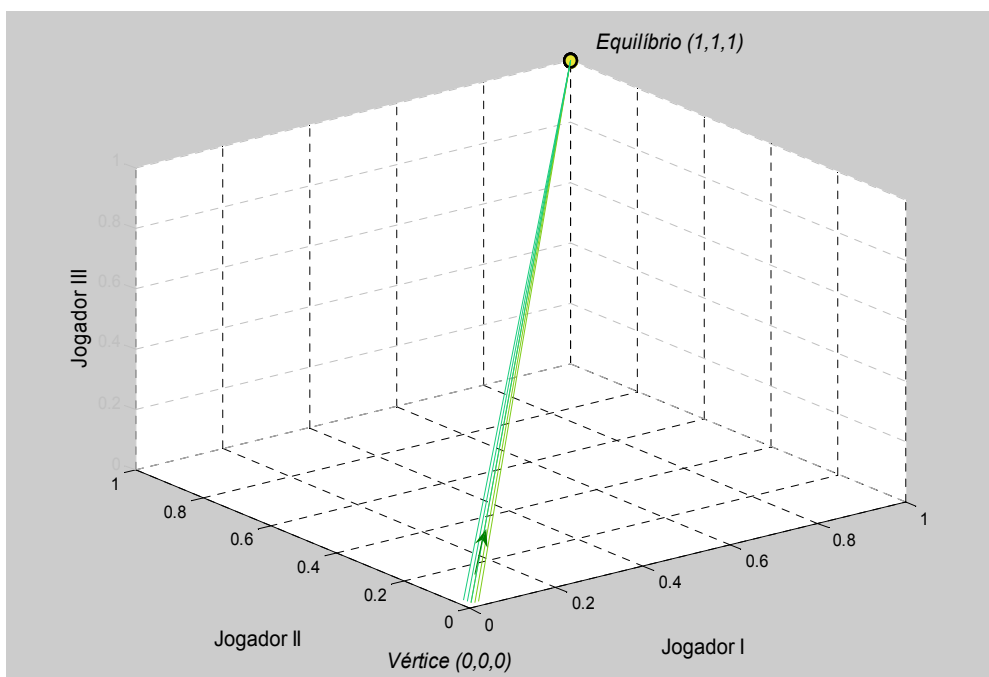


Figura 7-42 – Aplicação $[M]^\eta$ às matrizes M^1 , M^2 e M^3

Este método porém, altera o tamanho dos passos nas órbitas causando um outro tipo de distorção mostrada na Figura 7-5, que pode fazer com que tais órbitas sejam lançadas para fora do espaço de estratégias mistas.

Por este motivo devemos utilizar este método conjuntamente com o cálculo de um passo que possui a função de normalizar os *payoffs* das matrizes, mantendo ao mesmo tempo as órbitas no espaço de estratégias mistas. .

Suponhamos agora que estamos no estado $\mathbf{x}$ no espaço de estratégias mistas, e que queremos nos mover em direção ao equilíbrio assintoticamente estável mais atrator, na direção do vetor $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_{1,1} \cdots \dot{x}_{1,m}, \dot{x}_{2,1} \cdots \dot{x}_{2,m}, \cdots, \dot{x}_{n,1} \cdots \dot{x}_{n,m}] \in \mathbf{R}^{n(m-1)}$, porém precisamos considerar as escolhas para $\dot{\mathbf{x}}$ de modo a não sair do espaço de estratégias mistas. Então, se estamos num estado $\mathbf{x}$ do poliedro de estratégias mistas, um vetor $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{n(m-1)}$ é uma direção viável, se existe um número escalar θ para o qual $\mathbf{x} + \theta \dot{\mathbf{x}} \in \text{Espaço de Estratégias}$, como ilustra a Figura 7-43.

Uma vez que estamos nos movendo para longe do estado $\mathbf{x}$ ao longo da direção $\dot{\mathbf{x}}$ nós estamos traçando pontos da forma $\mathbf{x} + \theta \dot{\mathbf{x}}$, onde $\theta \geq 0$, e assim a órbita se aproxima do equilíbrio evolutivo estável. É desejável porém nos movermos a maior distância possível na direção $\dot{\mathbf{x}}$, de modo a alcançarmos o equilíbrio desejado no menor número de passos. Cada passo nos levará ao ponto $\mathbf{x} + \theta^* \dot{\mathbf{x}}$.

Onde,

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \mathbf{x} + \theta \dot{\mathbf{x}} \in \text{Espaço de Estratégias}\}.$$

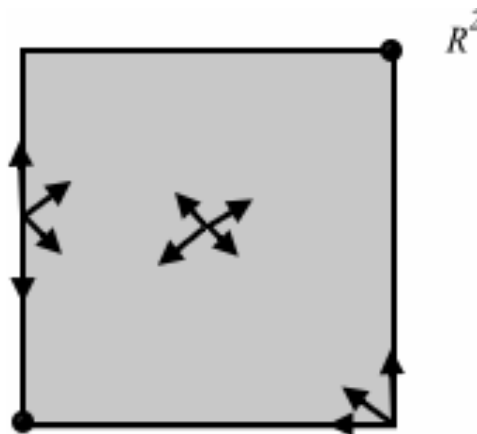


Figura 7-43 – Possíveis direções para o passo da dinâmica

Como cada estratégia é uma componente $\dot{x}_{i,k}$ do vetor $\dot{x}$, para que o espaço de estratégias não seja violado podemos escrever θ^* em duas possibilidades distintas:

1. Caso $\dot{x}_{i,k} \geq 0$

$$\theta^* = \min \left(\frac{1 - x_{i,k}}{\dot{x}_{i,k}} \right), \forall k \in i \text{ e } \forall i \in I \quad \text{Condição 7-1}$$

2. Caso $\dot{x}_{i,k} < 0$

$$\theta^* = \min \left(\frac{-x_{i,k}}{\dot{x}_{i,k}} \right), \forall k \in i \text{ e } \forall i \in I \quad \text{Condição 7-2}$$

Essa condição vem da necessidade de mantermos a órbita na região viável, e para isso temos que garantir que a soma das estratégias não possua uma proporção de mais que 100% na população. Sendo assim, temos que o maior passo possível, para cada componente de $\dot{x}$, será $\theta \dot{x}_{i,k} \leq \Delta_b^{i,k}$, com $\Delta_b^{i,k}$ sendo a distância entre o estado atual e a borda do poliedro de estratégias na direção de $\dot{x}_{i,k}$.

$$\text{Portando } \theta \leq \frac{\Delta_b^{i,k}}{\dot{x}_{i,k}} \quad \forall k \in i \text{ e } \forall i \in I.$$

Ambas as condições contemplam todos os $x_{i,k} \neq 0$. Para aplicação prática em algoritmos sugere-se um possível θ_i^k , elemento de θ , igual a ∞ quando $x_{i,k} = 0$, deste modo ele não influenciará o resultado das Condição 7-1 e Condição 7-2. O caso onde $\dot{x}_{i,k}$ é nula acontece exatamente na fronteira viável onde $x_{i,k} = 1$ ou $x_{i,k} = 0$.

Como exemplo vemos as duas possibilidades de passos ilustradas na Figura 7-44.

Enquanto na versão com θ^* a dinâmica converge com 2 passos, com um θ menor forçado pela normalização da matriz de *payoff*, converge em 262 iterações ou passos da dinâmica do replicador.

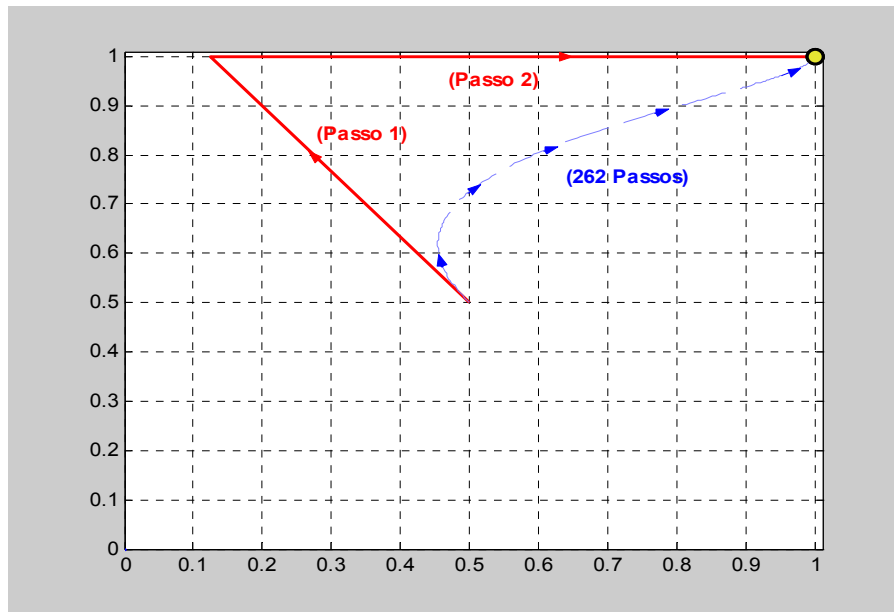


Figura 7-44 – Órbitas com diferentes passos convergindo para o mesmo equilíbrio

Podemos então aplicar a metodologia descrita à matriz de *payoff* ruidosa ilustrada na Figura 7-19. Ali as distribuições aproximadas por um único delta de Dirac não convergiram para o equilíbrio localizado no elemento (87,75) da matriz. Com a aplicação da técnica sugerida tanto a dinâmica convencional com as 100 estratégias para cada jogador quanto a dinâmica com um único delta de Dirac convergem para o mesmo elemento de máximo da matriz de *payoff* (87,75)

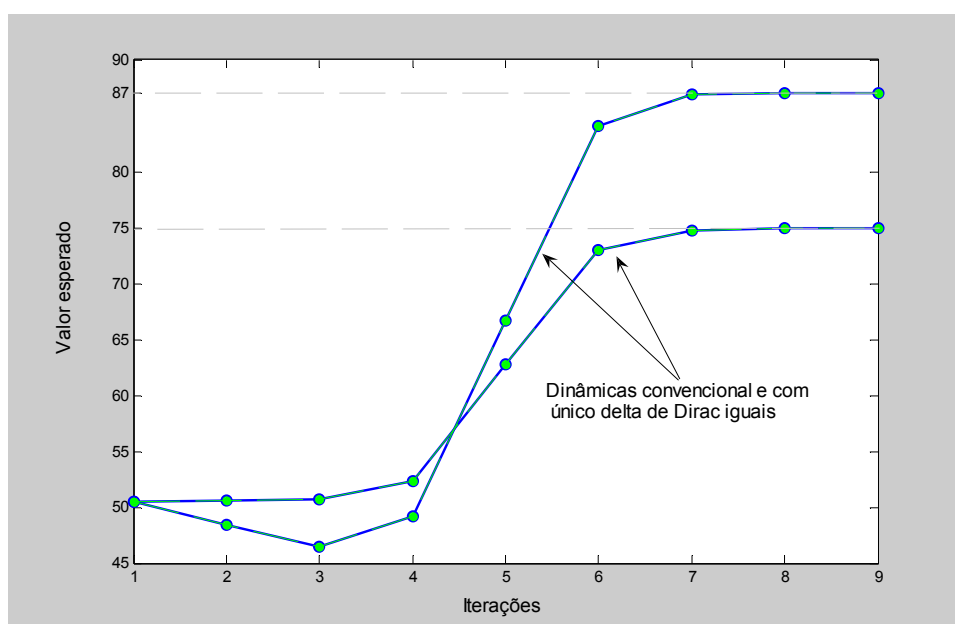


Figura 7-45 – Solução ótima alcançada com um único delta de Dirac

Com o aumento do número de estratégias m por jogador, o estado inicial de distribuição uniforme igual a $\frac{1}{m}$ tende a zero. Tal estado acontece nas proximidades das faces do poliedro de estratégias, onde alguma $x_{i,k} \rightarrow 0$. Uma vez que alguns os equilíbrios atraem mais o estado inicial do que outros, as proporções das estratégias aumentam ou diminuem dependendo dos seus *payoff* médios. Quando algumas estratégias têm suas proporções reduzidas na população, a órbita colide com a face do poliedro e permanece ali até a convergência para o equilíbrio mais atrator, similar a uma gota que escorre por uma superfície lisa até um sorvedouro. Uma vez que a proporção $x_{i,k}$ se torna nula, a estratégia desaparece da população e desde que não haja o aparecimento forçado de estratégias naquela população, a estratégia não mais aparecerá.

Este efeito da face atratora, que se intensifica para o caso de grandes números de estratégias, ajuda na elaboração de soluções que agilizem a convergência das dinâmicas. A medida que algumas estratégias vão tendo suas proporções anuladas, elas não precisam mais ser representadas na matriz de *payoff* e portando, podem ser retiradas da matriz, que se reduz com a saída de uma linha ou coluna relativa àquela estratégia. Durante a convergência, a matriz de *payoff* será continuamente destruída, até que sobre apenas o equilíbrio mais atrator.

Este processo pode ser observado na Figura 7-46, quando um estado inicial situado de modo equidistante das faces do poliedro, colide com uma das faces deste poliedro passando a orbitar somente naquela face, até alcançar o equilíbrio.

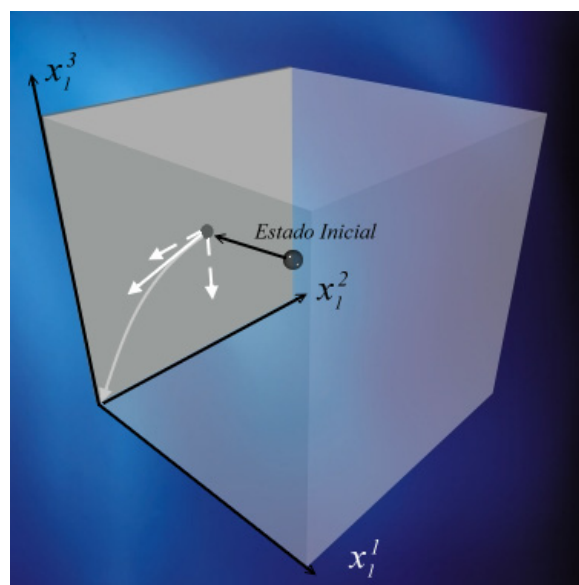


Figura 7-46 – Órbita atingindo uma face do poliedro de estratégias mistas

Assim, tais estratégias com proporção nula, não entram no cálculo de θ_i^k e, no caso em que $x_{i,k} = 0$, são feitos tendendo a infinito, de modo que θ^* possa ser formalmente definido como

$$\left\{ \theta^* = \min \left(\frac{\Delta_i^k}{\dot{x}_{i,k}} \right), \forall k \in i, \text{ tal que } 1 > x_{i,k} > 0 \right\}$$

A aplicação deste cálculo do passo implica em três consequências imediatas. Altera a convergência de equilíbrios mistos onde os *payoffs* médios das estratégias são iguais. Ao invés de andar no interior do espaço de estratégias mistas, a órbita pode pular para um vértice que não seja um equilíbrio assintoticamente estável, porém neste caso a dinâmica não converge e pode ajustar facilmente o algoritmo de modo a seguir para um vértice que seja um equilíbrio assintoticamente estável.

Além do mais este passo altera a convergência direta para o equilíbrio com maior *payoff* médio, já que pode jogar a órbita para fora da bacia de atração do equilíbrio mais atrator no sentido médio. Por este motivo, este passo é útil em conjunto com o alisamento das órbitas fazendo-se $M' = [M]^n$, pois segue assim direto para o equilíbrio mais atrator.

Este princípio, porém, trás a vantagem de gerar convergências mais rápidas a um equilíbrio. Tal fato está ilustrado na Figura 7-48, onde foi testada a convergência para o ponto de máximo (7,72) da Figura 7-47 onde a convergência 2 aplica o princípio descrito e a convergência 1 não.

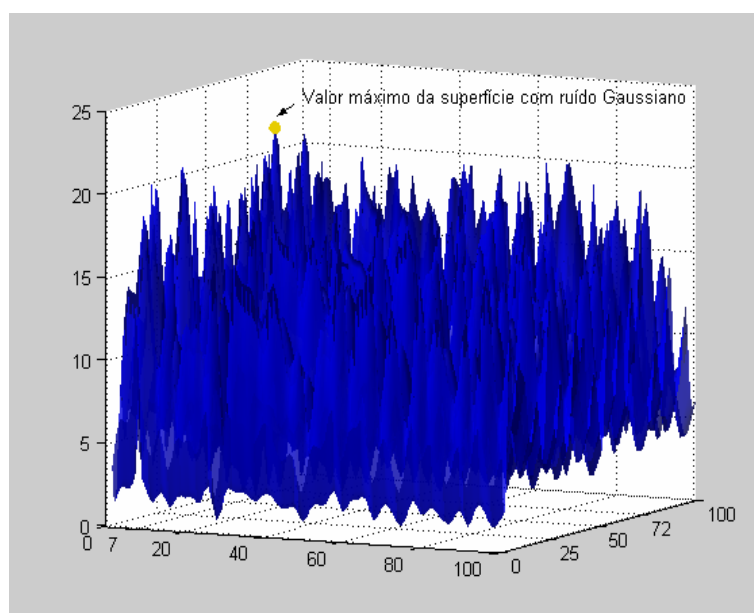


Figura 7-47 – Convergência sobre superfície ruidosa

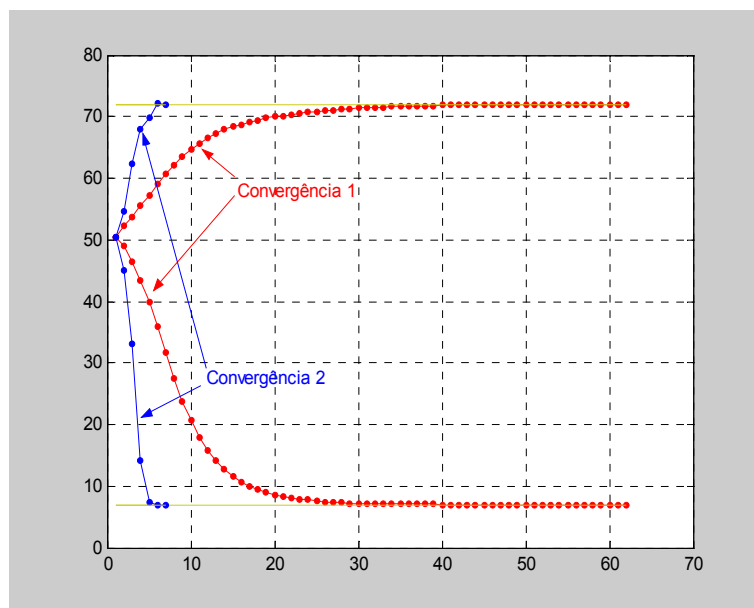


Figura 7-48 – Convergência 1 normal e convergência 2 com passo modificado

O mesmo princípio do passo pode ser utilizado para se obter convergências suaves em matrizes de *payoff* com grandes números, utilizando-se a Condição 7-1 e a Condição 7-2, porém eliminando-se da matriz de *payoff* somente as estratégias que atingem uma proporção nula na população. Deste modo, a órbita segue para o equilíbrio atrator sem sair da bacia de atração de tal equilíbrio.

Juntando-se os conceitos apresentados, uma superfície ruidosa como a da Figura 7-49, pode ter seu máximo encontrado em (53,50).

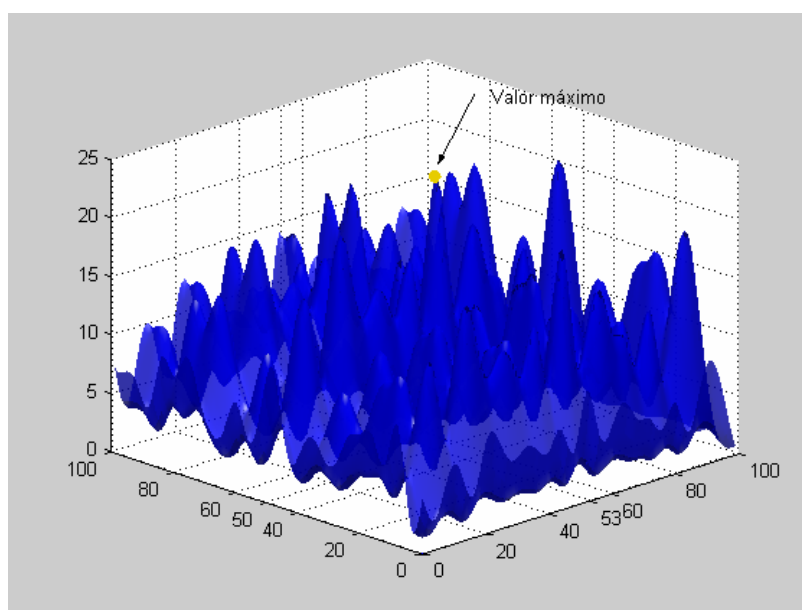


Figura 7-49 – Convergência para o máximo em superfície ruidosa

7.3 Exemplo de Aplicação

Como parte da aplicação do estudo e inovações propostas sobre a teoria dos jogos evolutivos, tomemos como exemplo um caso baseado na idéia da comercialização de energia em um setor elétrico com despacho centralizado. Este sistema possui um alto grau de incertezas relacionadas à hidrologia, desde que a maior parte da matriz energética depende do regime de afluições, incidentes elétricos, como falta em equipamentos e também incertezas regulatórias, que devido à imaturidade do setor, caracterizam-se por regras voláteis, em permanente mudança, afetando tanto a comercialização da energia quanto o planejamento eletro energético.

O planejamento e a operação eletro-energética são realizados de modo centralizado resultando no que é conhecido como despacho centralizado, onde os geradores de diversos tipos são chamados a gerar por ordem de mérito, ou seja, do mais barato ao mais caro.

Através da percepção do Operador Central, despacha-se as várias usinas disponíveis, levando-se em consideração diversos aspectos como estabilidade elétrica, segurança do sistema e o contínuo acompanhamento do risco de déficit. Com este intuito o Operador leva em conta os resultados dos modelos matemáticos oficiais adotados no setor, de modo a estabelecer uma política de operação baseada na minimização do custo presente e do custo futuro.

Em contraste com sistemas puramente termoeletricos, cuja operação é desacoplada no tempo, a operação de um sistema hidroelétrico é um problema acoplado no tempo, onde uma decisão operativa de hoje implica em conseqüências futuras refletidas no custo operativo futuro. Assim, enquanto as usinas térmicas possuem um custo operativo direto baseado, por exemplo, no custo do combustível, as usinas hidro possuem um custo indireto associado à oportunidade de economizar combustível das térmicas, ou evitar déficits de energia.

Caso se venha a deplecionar as reservas de energia hidro com o intuito de economizar a geração mais cara das térmicas e no futuro ocorrer um cenário de seca, poderá ocorrer déficit.

De maneira simplificada, podemos definir o custo futuro como um modo de medir a possibilidade de déficit futuro, de modo que influências na função custo

futuro, como as taxas de afluência e volumes, possam indicar um maior ou menor custo futuro.

Na Figura 7-50, vemos um gráfico com uma função custo futuro simplificada, aproximada por partes, dependente de somente uma variável de volume.

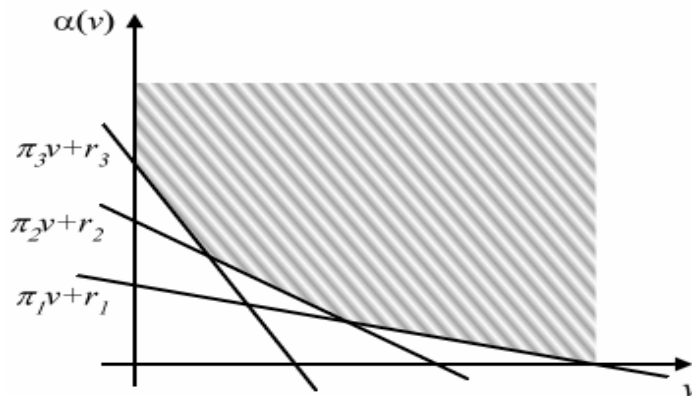


Figura 7-50 – Função de custo aproximada por retas

A borda da região hachurada, formalizada pelo seguinte conjunto de restrições,

$$\alpha \geq \pi_1 v + r_1$$

$$\alpha \geq \pi_2 v + r_2$$

$$\alpha \geq \pi_3 v + r_3$$

representa uma aproximação linear por partes da função custo futuro. No nosso exemplo será usada uma idéia similar, onde a função custo futuro será substituída por uma curva exponencial, com parâmetro a definido pelo Operador Centralizado e representa o valor da água, função da folga entra oferta hidráulica e demanda de energia existente no sistema durante o período em estudo.

A nossa função representada pela Equação 7-15 pode ser visualizada na Figura 7-51 onde o máximo custo C_{def} corresponde ao custo de déficit.

$$\alpha = (C_{def} - C_{\min}) * e^{\left(-a \frac{(f + f_{ni})}{f_p + f_n}\right)} \left[1 - e^{\left(k \frac{(f - f_{ni})}{f_p + f_n}\right)} \right] + C_{\min} \quad \text{Equação 7-15}$$

Onde o custo de déficit C_{def} e o custo mínimo C_{min} são definidos baseados na variáveis de custos da operação, como custo de operação de uma usina termoeletrica, pelo operador centralizado e homologado pelo órgão regulador do setor.

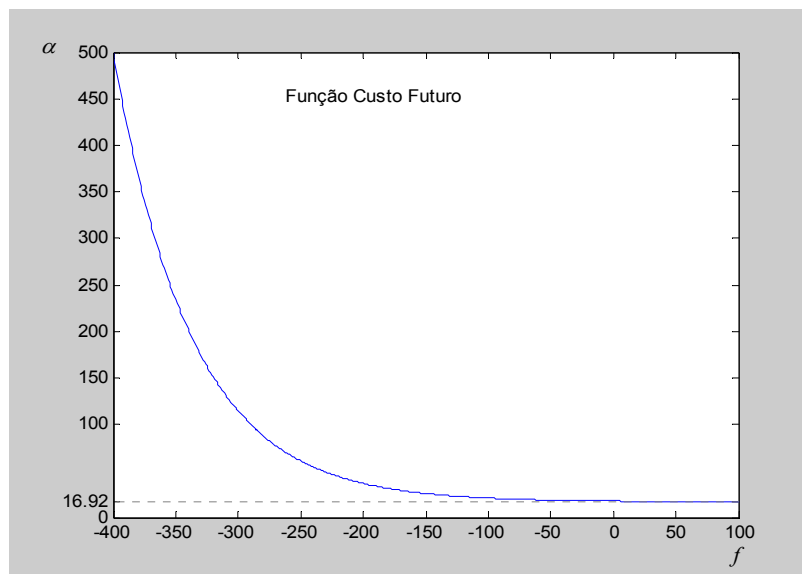


Figura 7-51 – Função de custo não linear

Através desta função de valor futuro $\alpha(f)$ dependente da folga f entre oferta e demanda e dos custos das usinas termo elétricas, o Operador Centralizado despacha por ordem de mérito. Caso o custo $\alpha(f)$ seja maior que o custo de uma usina termoeletrica esta usina será despachada.

A modelagem do exemplo conta ainda com um pequeno cronograma de expansão do parque gerador de forma que ao longo do período de estudo o sistema possa contar com um adicional de geração necessário para acompanhar a demanda crescente.

Neste cronograma de expansão, está prevista a entrada em operação de um grupo de usinas térmicas no quarto ano, com expansão no quinto e sexto ano e previstas entradas de usinas hidrelétricas novas.

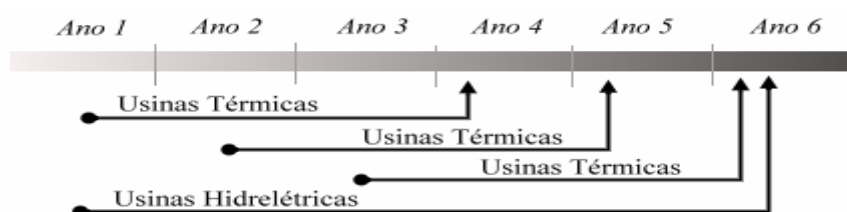


Figura 7-52 – Cronograma de expansão

Paralelamente ao despacho do Operador Central acontece a comercialização de energia em ambiente regulado, único ambiente considerado neste exemplo. O mecanismo implementado para comercialização consiste, similarmente ao caso do modelo do setor elétrico brasileiro de leilões onde a concorrência é separada basicamente três tipos de aproveitamentos. O primeiro consiste das usinas já existentes, em operação. Este tipo de usina firma contrato para o ano posterior ao ano do leilão (A_{-1}). No segundo tipo de usina, estão as usinas novas, com prazo médio de construção de três anos até o início da entrega de energia (A_{-3}) e finalmente o terceiro tipo de usina a concorrer em leilões, são usinas hidroelétricas novas que necessitarão de cinco anos para serem construídas (A_{-5}).

O leilão consiste de uma competição, onde diversos geradores de um determinado tipo ofertam uma quantidade de energia por um certo preço para atender a um mercado declarado por um conjunto de distribuidoras. Partindo de um preço teto especificado pelo leiloeiro, os vendedores especificam a quantidade de energia que pretendem vender por aquele preço. O leiloeiro decrementará o preço a cada rodada do leilão até que a oferta se reduza ao valor da demanda.

Cada leilão promove a competição de um certo tipo de empreendimento, por exemplo A_{-3} competindo com A_{-3} ou A_{-5} competindo com A_{-5} em determinada data. Como no exemplo o período está discretizado em anos, os montantes resultantes de cada leilão é apresentado por ano.

Portanto, cada vendedor deve ter em suas estratégias, a faixa de preços em que ele pretende competir e que quantidade está disposto a vender por determinado preço.

No exemplo, os geradores hidroelétricos se utilizam da mesma função de custos que o Operador Central, ou seja através da Equação 7-15, que aponta um preços mais baixos para reservatórios mais cheios, porém com uma percepção diferente, considerando os vários custos, como O&M, investimento, taxa de retorno e precificação dos riscos. Assim o parâmetro a é característico das estratégias de cada gerador hidroelétrico.

Na Figura 7-53 estão ilustrados os tipos de curvas que os geradores hidroelétricos utilizam como estratégias de preços.

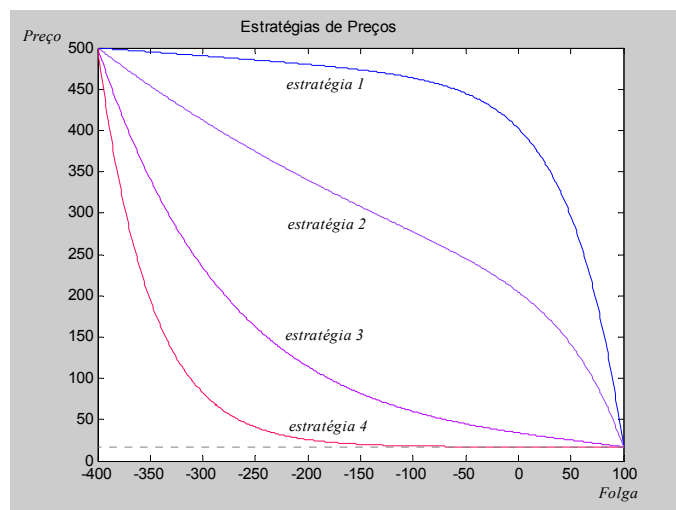


Figura 7-53 – Funções de custo características de cada perfil de um agente

Além da percepção dos preços da energia futuros no curto prazo e conhecimento dos preços teto do leilão de que participarão, os jogadores possuem um comportamento associado à quantidade que devem ofertar por um determinado preço, parametrizado por retas cuja inclinação positiva representa a disposição daquele vendedor em reduzir sua oferta com a queda de preços durante o leilão.

As estratégias aqui descritas não precisam ser racionais. Muitas vezes por desconhecer qual a melhor estratégia, o jogador joga intuitivamente baseado em sua experiência ou crenças futuras que apesar de ser comumente tidas como constatações jamais poderão ser provadas devido às incertezas. Neste caso, ele pode jogar qualquer estratégia, puro palpite, nada altamente racional, mas racionalmente limitado. É o caso em que se acredita que uma energia vendida num leilão A_3 sempre será mais cara do que a energia vendida em um leilão A_5 . Nada impede que no futuro custos ambientais, custos associados à longas linhas de transmissão, indenização por áreas indígenas inundadas ou mesmo algum tipo de novo imposto criado tornem o custo de uma usina hidroelétrica comercializada num leilão A_5 maior que o de uma usina termoelétrica comercializada num leilão A_3 .

Deste jogo participam sete jogadores incluindo seis geradores e uma distribuidora de energia. Todos os jogadores aqui considerados possuem um papel dentro da comercialização de energia e mesmo que alguns como as distribuidoras

não compitam na comercialização, têm a obrigação de informar o mercado alvo da concorrência de venda por parte dos agentes geradores.

Apesar de possuir um papel aparentemente passivo na comercialização, as distribuidoras estão sob regras que se não obedecidas implicam em penalidades e exposição a um mercado de curto prazo não favorável, como a situação em que uma distribuidora que possui sobras de energia deva vender estas sobras no mercado de curto prazo a preços baixos num período de fartura hidrológica. Além do mais as distribuidoras têm o interesse de deter o êxodo de clientes potencialmente livres e não está de acordo com este interesse permitir que o *mix* de preços dos seus contratos de compra de energia se elevem incentivando a saída de consumidores para o mercado livre.

Contratos de longo prazo comercializados nos leilões não são eficientes na cobertura do mercado da distribuidora que muda com a variação da carga e movimento de consumidores que possam sair ou voltar para o mercado cativo.

Alterações repentinas nos contratos existentes de energia promovidas pelo Governo ou Agência Reguladora, como por exemplo re rateio em quotas de energia destinadas às distribuidora podem provocar falta de contratos em anos subseqüentes. Quando uma distribuidora prevê sua carga futura e sofre com uma mudança nas regras que modo a ficar exposta ao mercado de curto prazo no próximo ano, não poderá resolver seu problema com num leilão A_{-3} , ela deverá adquirir esta energia que lhe foi retirada num leilão A_{-1} ou por algum outro mecanismo disponível. A contratação no A_{-1} para o próximo ano afeta diretamente a contratação no A_{-3} para três anos depois. Além do mais não existe a garantia de que a energia necessária declarada pela distribuidora antes do leilão será atendida. Poderá ocorrer frustração no leilão, caso em que os vendedores desistem de vender total ou parcialmente sua energia por não considerarem os preços adequados.

O “tiro” da distribuidora regulada tenta atingir um alvo que está sujeito a mudança de posição. Igualmente ao caso do setor elétrico brasileiro as estratégia da distribuidora, se restringem à declaração das suas necessidades de compra de modo a atender a 100% da sua carga. Neste exemplo, as estratégias da distribuidora consistem em portfólios de compra, onde ela especifica a quantidade de energia que pretende comprar em cada tipo de leilão, a fim de atender à sua carga.

Assim, a distribuidora pode optar por comprar mais de empreendimentos existentes, teoricamente com preços mais baixos e menos de geradores termoeletricos com energia supostamente mais cara o que elevaria seu *mix* de preços. Outra estratégia da distribuidora pode vir da aversão ao risco e se caracterizar por comprar mais de usinas termoeletricas, que apesar de mais caras, não se submetem aos riscos da hidrologia. Apesar do gerador assumir o risco de uma hidrologia ruim, impactos negativos no fluxo de caixa de uma distribuidora devem ser evitados afim de se manter o equilíbrio econômico financeiro. Usinas termoeletricas por sua vez necessitam de uma logística complexa para o fornecimento de combustível, dependem de mercados estrangeiros e são vilãs ambientais, estas características não serão consideradas neste exemplo. De forma a considerar todos os outros aspectos, são montadas as várias estratégias da distribuidora baseadas nos percentuais de cada produto que ela pretende adquirir.

Assim distribuidora será mais eficiente se puder comprar energia mais barata, vendê-la e não correr o risco de precisar vender no mercado de curto prazo quando os preços estiverem mais baixos que os preços dos seus contratos firmados em leilão. Deve-se considerar que dependendo da região onde a distribuidora possuir sua concessão, a carga pode ser altamente dependente do clima e por sua vez pode ser imprevisível.

Neste exemplo, as receitas dos geradores são calculadas como o lucro que cada um obtém com a venda de energia, sob o compromisso de ser despachado centralizadamente e vender sua energia no mercado de curto prazo, ou firmar contratos de venda de longo prazo nos leilões. Dentro de sua estratégia os geradores devem também observar impactos no fluxo de caixa e comportamentos dos contratos bilaterais que cobrem o investimento.

A seguir são apresentados os resultados desta competição por venda de energia, para três casos distintos, onde podem ser vistos; o maior *payoff* de cada competidor em cada ano, a estratégia de maior *payoff*, o menor *payoff* que o jogador pode obter ao jogar a estratégia de máximo, seu *payoff* no equilíbrio mais atrator e seu *payoff* num possível estado de cooperação que pode ser admitido aqui e estabelecido nas diversas associações existentes no setor, como por exemplo, a associação das distribuidoras ou associação dos geradores de energia elétrica.

Além dos resultados de curto prazo, por estágios ou anos, essas grandezas podem ser analisadas no longo prazo, sendo disponibilizados os resultados obtidos para todo o período de estudo.

O primeiro caso se caracteriza por um alto nível de afluências, e foi chamado de caso úmido. Neste caso em particular, devido à quantidade de água disponível nos reservatórios os preços no mercado de curto prazo estarão sempre baixos. O esperado, portanto é que contratos sejam firmados a preços mais altos do que os preços no mercado de curto prazo.

As estratégias de preços dos geradores novos, simplesmente numéricas, estão expostas na Tabela 7-6

	Estratégia 1	Estratégia 2	Estratégia 3	Estratégia 4
Ger. Termo Novo I	70,00	100,00	160,00	210,00
Ger. Termo Novo II	73,00	105,00	166,00	220,00
Ger. Hidro Novo I	60,00	80,00	100,00	150,00
Ger. Hidro Novo II	65,00	82,00	110,00	155,00

Tabela 7-6 – Estratégias de preços

Os resultados de um dos estágios são representados a seguir, para um gerador com estratégia comportamental e dois sem estratégia comportamental.

Observamos na Tabela 7-7 que no perfil de equilíbrio, estão presentes as estratégias comportamentais dos geradores existentes representadas como estratégia de número 1.

Caso Úmido - Estágio 4				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,*,*,*,*(1,2,4))	(*,*,2,*,*(2,3,4))	((2,4),(2,4),3,(3,4),*,*,1)
	Payoff Máximo	29,776.078	4,000.000	96,546.740
	Payoff Mínimo	28,683.529	0.000	670.000
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,1,1,*,*,1)	(1,1,1,1,*,*,1)	(1,1,1,1,*,*,1)
	Payoff	29,776.078	651.779	9,930.180
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,3,3,*,*,1)	(1,1,3,3,*,*,1)	(1,1,3,3,*,*,1)
	Payoff	29,776.078	936.628	51,558.112

Tabela 7-7 – Resultados do jogo de compra e venda de energia no quarto ano da série úmida

Para todo o período de estudo os resultados podem ser visualizados abaixo.

Caso Úmido - Período de Estudo				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,4,*,*,*,1)	(*,2,*,*,3)	(1,1,3,(3,4),(3,4),(3,4),1)
	Payoff Máximo	153,568.235	16,000.000	300,254.136
	Payoff Mínimo	148,241.176	0.000	3,952.000
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)
	Payoff	152,637.776	1,955.336	50,444.096
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)
	Payoff	152,637.776	1,955.336	50,444.096

Tabela 7-8 – Resultados do jogo de compra e venda de energia para todo o período da série úmida

As estratégias comportamentais continuam fazendo parte do perfil em equilíbrio mais atrator. E as estratégias de preços mais baixos, como esperado, formam o perfil de equilíbrio em época de excesso de oferta.

Os preços spot, a percepção de preços de cada jogador e os preços teto em cada leilão estão mostrados na tabela abaixo em unidades monetária \$.

Observamos cenários de preços baixos no mercado de curto prazo e os geradores ofertando energia a preços ligeiramente mais baixos que os preços teto dos leilões para garantir seus contratos.

Preços - Caso Úmido - Período de Estudo							
		Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 4	Estágio 5	Estágio 6
Preço Teto	A-1	90.00	95.00	100.00	105.00	110.00	
	A-3	130.00	140.00	160.00			
	A-4	90.00					
Pspot		20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
Percepção de preço	Ger. Hidro. Ex. I	88.23	93.13	98.04	102.94	107.84	
	Ger. Hidro. Ex. II	88.23	93.13	98.04	102.94	107.84	
	Ger Term Novo I	70.00	70.00	70.00			
	Ger Term Novo II	73.00	73.00	73.00			
	Ger Hidro Novo I	60.00					
	Ger Hidro Novo II	65.00					
Preço de Contrato	Ger. Hidro. Ex. I	88.23	93.13	98.04	102.94	103.38	
	Ger. Hidro. Ex. II	88.23	93.13	98.04	102.94	103.38	
	Ger Term Novo I	69.70	-	-			
	Ger Term Novo II	-	-	-			
	Ger Hidro Novo I	60.00	-	-			
	Ger Hidro Novo II	-	-	-			

Tabela 7-9 – Preços usados na série úmida

Por outro lado a distribuidora contribui para o perfil em equilíbrio dando preferência à energia mais imediata vinda das usinas hidroelétricas existentes, desde que percebe não haver riscos de racionamento.

Os gráficos dos despachos ao longo do período de estudo, dos níveis de volume dos reservatórios existentes e dos contratos firmados, estão ilustrados nas figuras abaixo.

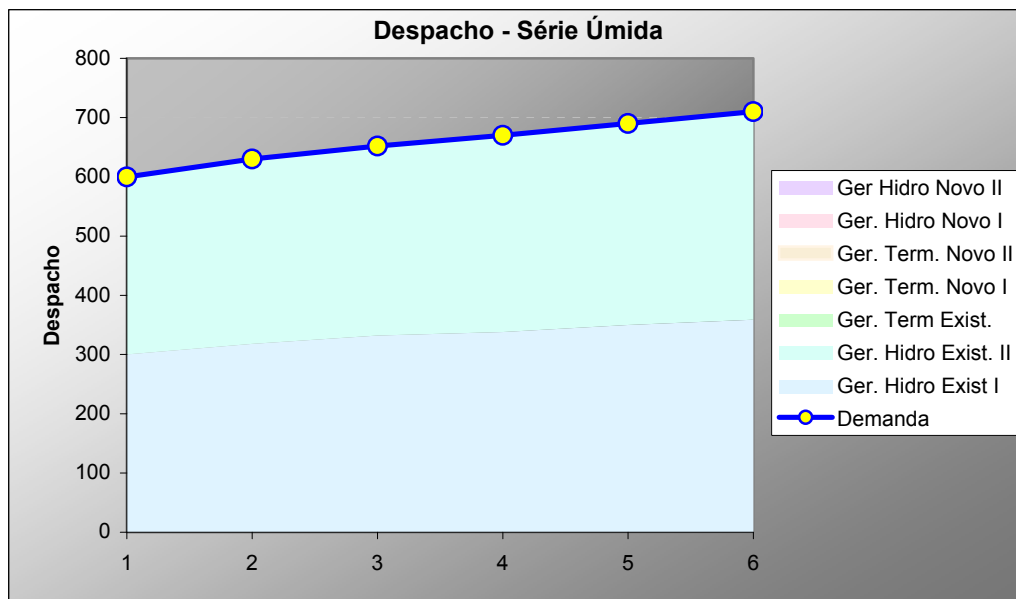


Figura 7-54 – Demanda sendo atendida por ger. hidráulica em período úmido

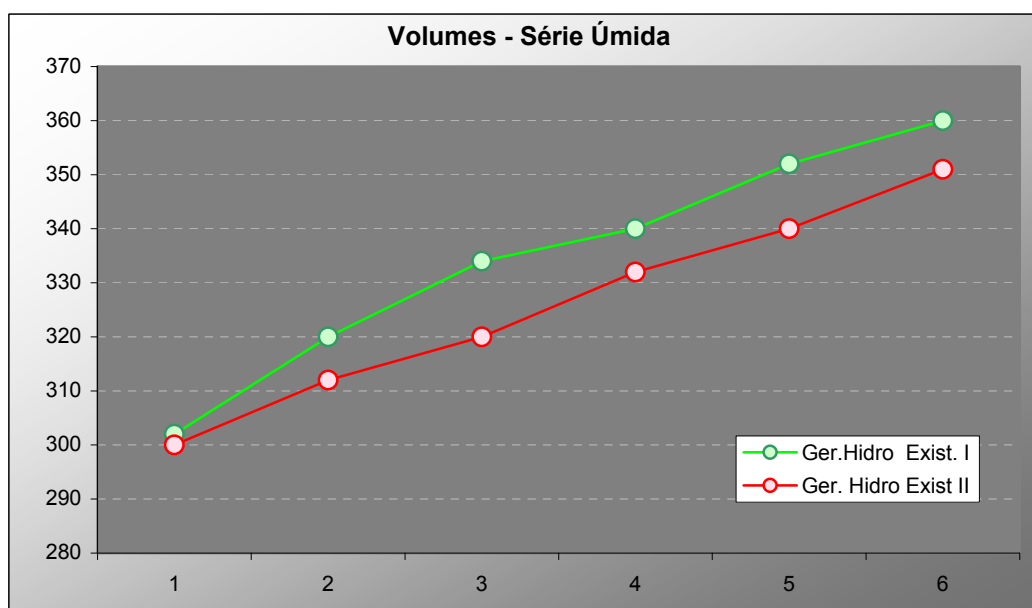


Figura 7-55 – Níveis dos reservatório em elevação em período com altas afluências

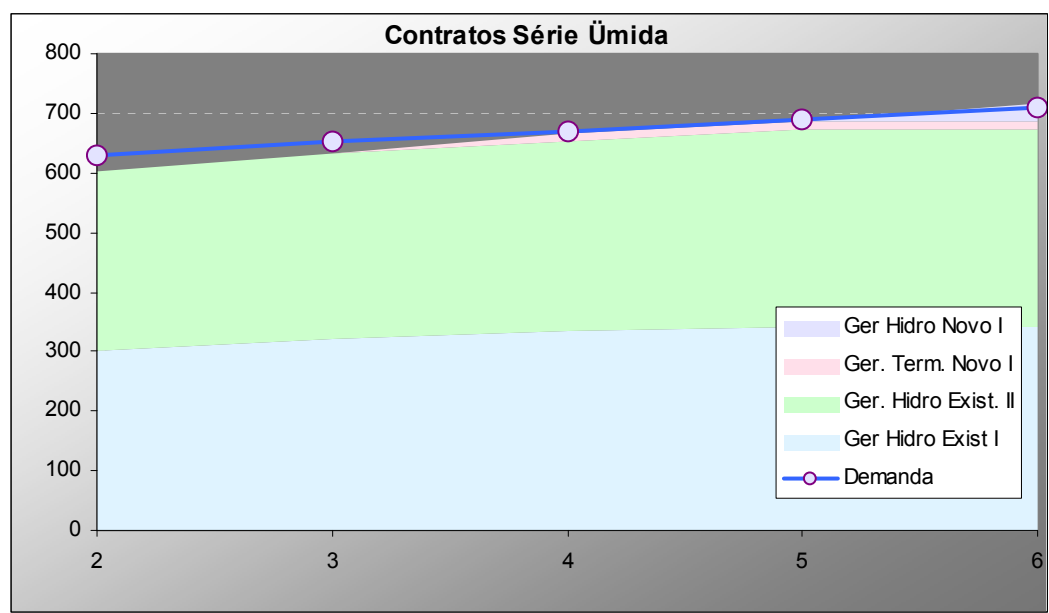


Figura 7-56 – mostra a preferência por contratos de venda por preços mais altos em períodos úmidos onde os preços do mercado de curto prazo estão baixos

O segundo caso é um caso caracterizado por afluências baixas e foi chamado de Caso Seco.

Os resultados de um dos estágios são representados a seguir, para um gerador com estratégia comportamental e dois sem estratégia comportamental.

Caso Seco - Estágio 4				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,*,*,4,*,*,*)	(*,*,4,4,*,*,*)	(2,2,3,1,*,*,(2,3))
	Payoff Máximo	64,240.000	11,000.000	92,980.000
	Payoff Mínimo	46,720.000	9,660.000	1,325.500
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,4,3,*,*,*)	(1,1,4,3,*,*,*)	(1,1,4,3,*,*,*)
	Payoff	61,320.000	9,660.000	7,035.000
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,4,3,*,*,*)	(1,1,4,3,*,*,*)	(1,1,4,3,*,*,*)
	Payoff	61,320.000	9,400.000	7,035.000

Tabela 7-10 – Resultados do jogo de compra e venda de energia no quarto ano da série seca

Observamos que no perfil de equilíbrio, estão presentes as estratégias comportamentais dos geradores existentes representadas como estratégia de número 1.

Como existe previsão de racionamento e de preços no mercado de curto prazo, os geradores termoeletrônicos novos preferem estratégias de preços mais elevados como as estratégias 3 ou 4.

Para todo o período de estudo, os resultados podem ser visualizados na próxima tabela. As estratégias comportamentais continuam fazendo parte do perfil em equilíbrio mais atrator.

Caso Seco - Período de Estudo				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,*,*,4,*,*,*)	(*,*,4,4,*,*,*)	(2,2,3,1,1,1,(2,3))
	Payoff Máximo	316,040.000	44,000.000	299,777.000
	Payoff Mínimo	269,120.000	40,110.000	11,248.500
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)
	Payoff	308,220.000	40,110.000	36,791.000
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)	(1,1,4,3,(3,4),(3,4),*)
	Payoff	308,220.000	40,110.000	36,791.000

Tabela 7-11 – Resultados do jogo de compra e venda de energia em todo o período da série seca.

Os preços spot, a percepção de preços de cada jogador e os preços teto em cada leilão estão mostrados na tabela abaixo em unidades monetária \$.

Preços - Caso Seco - Período de Estudo							
		Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 4	Estágio 5	Estágio 6
Preço Teto	A-1	90.00	95.00	100.00	105.00	110.00	
	A-3	130.00	140.00	160.00			
	A-4	90.00					
Pspot		160	160	160	160	160	160
Percepção de Preço	Ger. Hidro. Ex.	95.74	101.06	106.38	111.70	117.02	
	Ger. Hidro. Ex.	95.74	101.06	106.38	111.70	117.02	
	Ger Term Novo	210.00	210.00	210.00			
	Ger Term Novo	166.00	166.00	166.00			
	Ger Hidro Novo	100.00					
	Ger Hidro Novo	110.00					
Preço de Contrato	Ger. Hidro. Ex.	-	-	-	-	-	
	Ger. Hidro. Ex.	-	-	-	-	-	
	Ger Term Novo	-	-	-			
	Ger Term Novo	-	-	-			
	Ger Hidro Novo	-					
	Ger Hidro Novo	-					

Tabela 7-12 – Preços utilizados na série seca.

Os gráficos dos despachos ao longo do período de estudo, dos níveis de volume dos reservatórios existentes e dos contratos firmados estão ilustrados nas figuras abaixo.

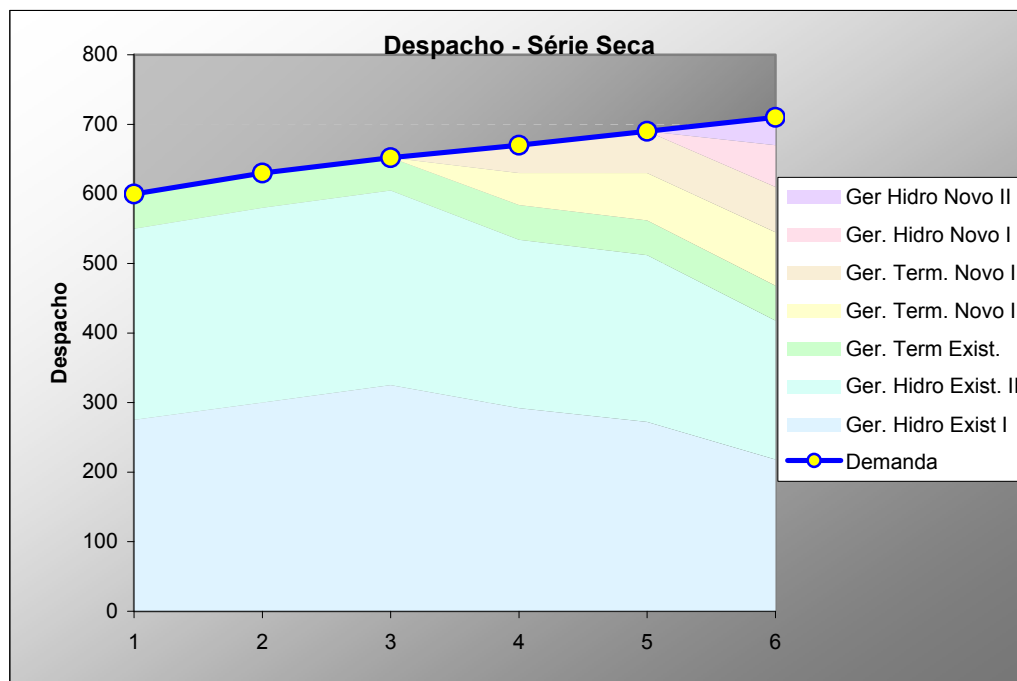


Figura 7-57 – Atendimento completo à demanda necessitando de ger. Térmica em períodos secos

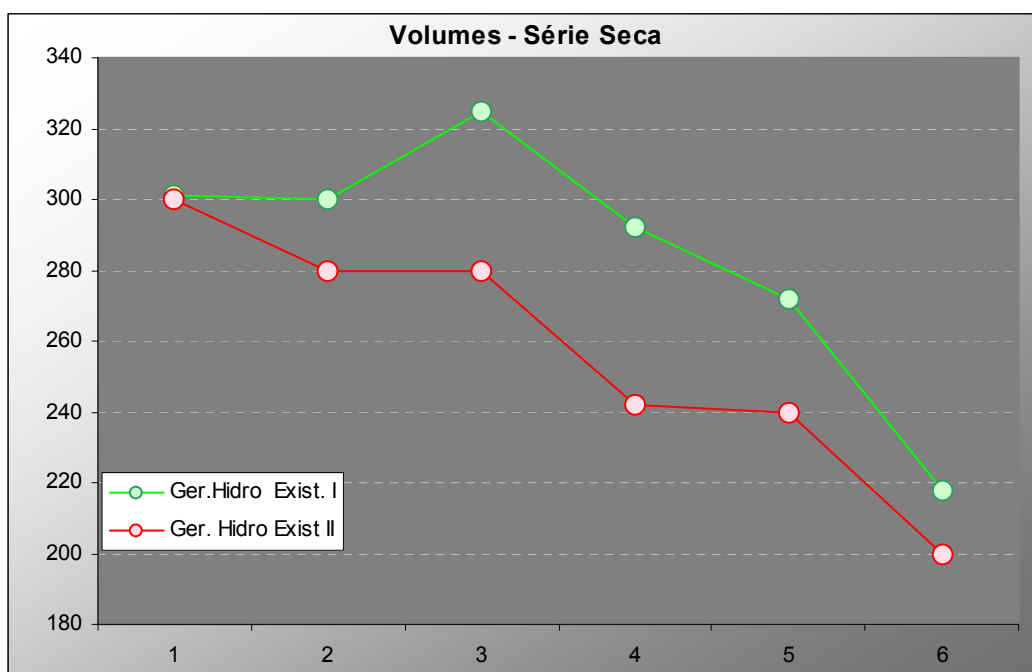


Figura 7-58 – Níveis de volumes decrescentes durante o período seco

Para a série seca, como os preços *spot* em todos os períodos são altos, os vendedores preferem vender no mercado de curto prazo e não fazem contratos.

O terceiro caso é caracterizado por uma variação das afluências que alguns estágios são altos e em outros baixas, fazendo com que os volumes dos reservatórios oscilem. Este caso foi chamado de caso intermediário.

Os resultados de um dos estágios são representados a seguir, para um gerador com estratégia comportamental e dois sem estratégia comportamental.

Caso Intermediário - Estagio 4				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,1,4,(3,4),*,*,*)	(*,*,3,1,*,*,(2,3))	(2,2,3(3,4),*,*,1)
	Payoff Máximo	56,480.00	2,320.00	95,419.12
	Payoff Mínimo	32,221.25	0.00	775.00
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,3,2,1,1,2)	(1,1,3,2,1,1,2)	(1,1,3,2,1,1,2)
	Payoff	37,065.00	1,466.66	40,743.33
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,3,2,1,1,2)	(1,1,3,2,1,1,2)	(1,1,3,2,1,1,2)
	Payoff	37,065.00	1,466.66	40,743.33

Tabela 7-13 – Resultados do jogo de compra e venda de energia no quarto ano da série intermediária.

Observamos que no perfil de equilíbrio, estão presentes as estratégias comportamentais dos geradores existentes, representadas como estratégia de número 1.

Para todo o período de estudo os resultados podem ser visualizados abaixo.

Caso Intermediário - Período de Estudo				
		Gerador Hidro Existente I	Gerador Termo Novo I	Distribuidora
Perfil de Máximo	Perfil	(1,*,4,(3,4),(2,3,4),4,4)	(*,*,1,*,(2,3,4),(2,3,4),1)	(2,2,3,(3,4),1,*,1)
	Payoff Máximo	249.686,67	7.814,60	298.855,37
	Payoff Mínimo	193.690,00	1.800,00	8.617,48
Perfil de Equilíbrio	Perfil	(1,1,1,1,1,*,1)	(1,1,1,1,1,*,1)	(1,1,1,1,1,*,1)
	Payoff	223.184,98	3632.50	46.805,20
Perfil de Cooperação	Perfil	(1,1,3,3,1,1,1)	(1,1,3,3,1,1,1)	(1,1,3,3,1,1,1)
	Payoff	248.825,37	4.801,75	64.035,71

Tabela 7-14 – Resultados do jogo de compra e venda de energia em todo o período da série intermediária.

Também neste caso as estratégias comportamentais continuam fazendo parte do perfil em equilíbrio mais atrator.

Os preços spot, a percepção de preços de cada jogador e os preços teto em cada leilão estão mostrados na tabela abaixo em unidades monetária \$.

Preços - Caso Intermediário - Período de Estudo		Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 4	Estágio 5	Estágio 6
Preço Teto	A-1	90.00	95.00	100.00	105.00	110.00	
	A-3	130.00	140.00	160.00			
	A-4	90.00					
Pspot		160.00	160.00	20.00	105.00	105.00	65.00
Percepção de Preço	Ger. Hidro. Ex. I	95.74	93.13	106.38	102.94	117.02	
	Ger. Hidro. Ex. II	95.74	101.06	106.38	111.70	107.84	
	Ger Term Novo I	160.00	160.00	160.00			
	Ger Term Novo II	105.00	105.00	105.00			
	Ger Hidro Novo I	60.00					
	Ger Hidro Novo II	65.00					
Preço de Contrato	Ger. Hidro. Ex. I	-	93.13	-	102.94	-	
	Ger. Hidro. Ex. II	-	-	-	-	-	
	Ger Term Novo I	-	-	160.00			
	Ger Term Novo II	105.00	105.00	105.00			
	Ger Hidro Novo I	60.00					
	Ger Hidro Novo II	65.00					

Tabela 7-15 – Preço utilizados na série intermediária.

Os gráficos dos despachos ao longo do período de estudo dos níveis de volume dos reservatórios existentes e dos contratos firmados estão ilustrados nas figuras abaixo.

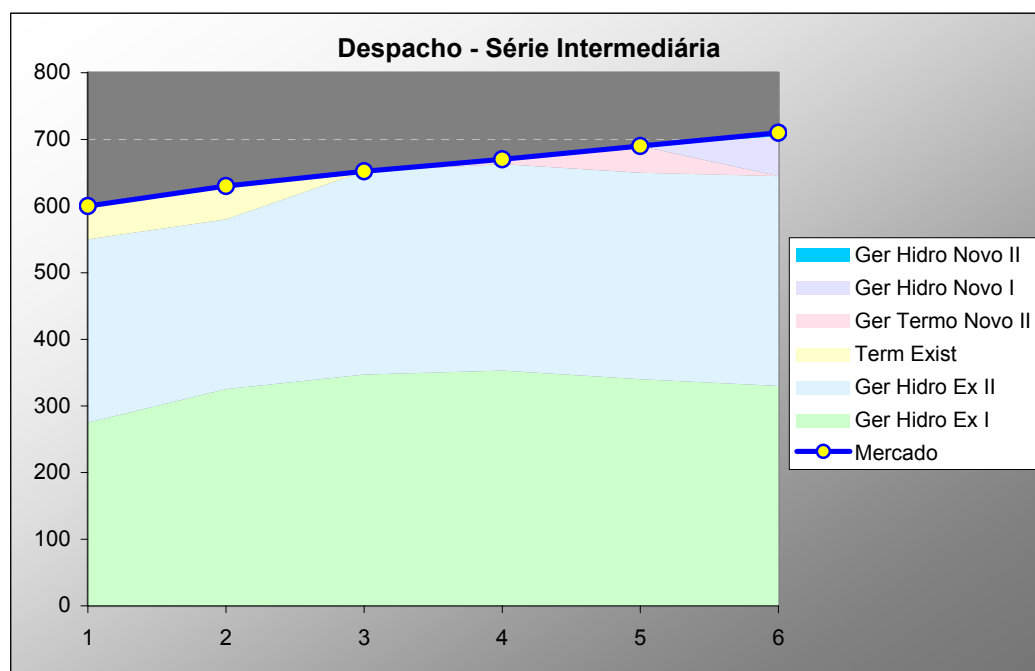


Figura 7-59 – Período onde ocorrem altas e baixas afluências

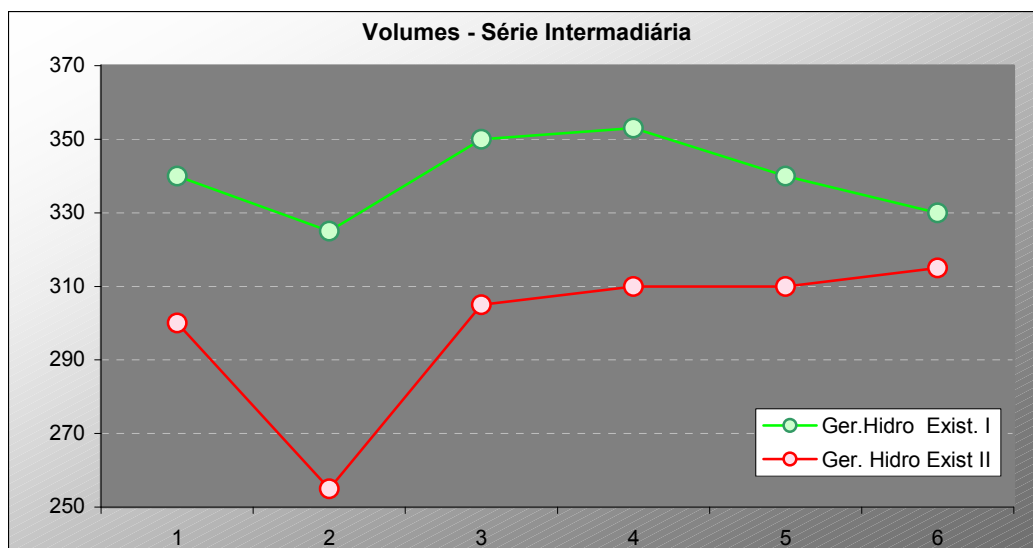


Figura 7-60 – Níveis dos reservatórios oscilam

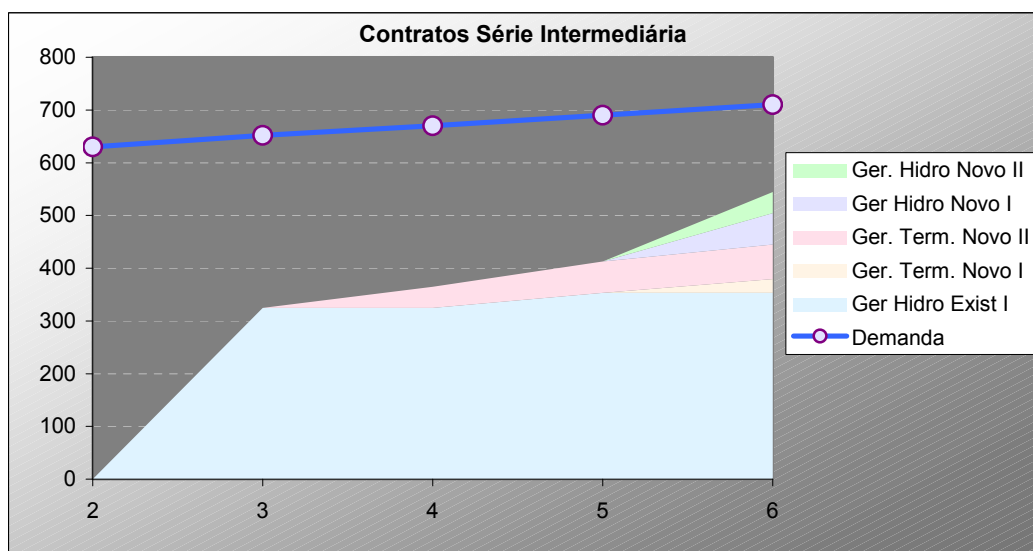


Figura 7-61 – Existência de contratos, tanto das termelétricas quanto das hidroelétricas em pouca quantidade

Os equilíbrios de Nash nem sempre são consequência da competição. Os jogos evolutivos nem sempre evoluem para um equilíbrio de Nash. Para que tais equilíbrios sejam alcançados é necessária muitas vezes, uma equalização de forças através de normalização da matriz de *payoff*.

No caso intermediário a matriz de *payoff* é mal comportada, pois contabiliza os lucros da maioria dos agentes em todos os 6 anos. Porém, para os geradores de energia hidroelétrica nova, seus lucros só podem ser contabilizados no sexto ano após entrarem em funcionamento. Por isso os lucros dos outros agentes tendem a ser muito maiores do que o dos geradores hidroelétricos novos.

Tal fato proposital nos ajuda a ilustrar justamente o caso de matrizes de *payoff* mal comportadas em que alguns jogadores apresentam *payoffs* muito altos e outros *payoffs* relativos insignificantes.

Como consequência as órbitas andam muito mais velozmente em direção às estratégias mais atratoras podendo capturar alguns jogadores em equilíbrios orbitais ad infinitum.

Caso Intermediário - Período de Estudo								
		Ger. Hidro Existente I	Ger. Hidro Existente II	Ger. Termo Novo I	Ger. Termo Novo II	Ger Hidro Novo I	Ger Hidro Novo II	Distribuidora
Perfil de Equilíbrio	Perfil	1	1	1	1	1	*	1
	Payoff	223,184.98	197,232.31	3,632.50	0.00	3,840.87	0.00	46,805.20
Perfil da dinâmica	Perfil	1	1	3	2	*	*	3
	Payoff mínimo	199,136.44	178,281.61	5,013.33	6,430.00	3,600.00	325.00	148,604.31
	Payoff Máximo	203,873.58	182,840.76	5,466.66	7,535.00	3,600.00	2,600.00	157,747.27
Perfi de Cooperação	Perfil	1	1	3	1	1	1	1
	Payoff	248,825.37	223,202.55	4,801.74	0.00	4,146.21	410.00	64,035.71

Tabela 7-16 – Resultados obtidos pela força particular de cada jogador aplicada visando atingir seus próprios interesses.

Em vez do perfil de equilíbrio (1,1,1,1,1,*,1) é alcançado o perfil (1,1,3,2,*,*,3), onde os geradores termo elétricos novos e a distribuidora alcançam melhores *payoffs*. As estratégias comportamentais dos geradores hidro existentes continuam neste perfil apesar dos *payoffs* para esses geradores serem menores.

Na Figura 7-62 é mostrada parte do espaço de estratégias mistas com três dimensões representadas pelas: estratégia 3 da distribuidora e pelas primeiras estratégias de preços mais baixos dos geradores hidro novos.

Claramente vemos que os dois geradores termoeletrônicos novos e a distribuidoras se beneficiam neste novo perfil de equilíbrio, mais que no perfil de cooperação e observamos que as estratégias comportamentais dos geradores hidro existentes continuam sendo as preferidas por esses agentes na competição. Apesar da visão de passividade que tem-se das distribuidoras na comercialização, podemos observar uma situação em que a distribuidora se beneficiou com um determinado tipo de estratégia que dá preferência à compra de energia nova térmica, que é sua opção de estratégia 3, numa situação de incerteza hidrológica, não ficando exposta ao mercado de curto prazo.

Diante de tal cenário não é interessante aos beneficiados cooperarem e por isso, tal estado final é importante para a análise dos jogos.

As matrizes de *payoff* não podem ser representadas graficamente por serem de 7ª dimensão, porém nos estágios iniciais quando estão presentes apenas o geradores existentes é possível visualizar as superfícies de *payoff* dos jogadores 1 e 2 como na Figura 7-63

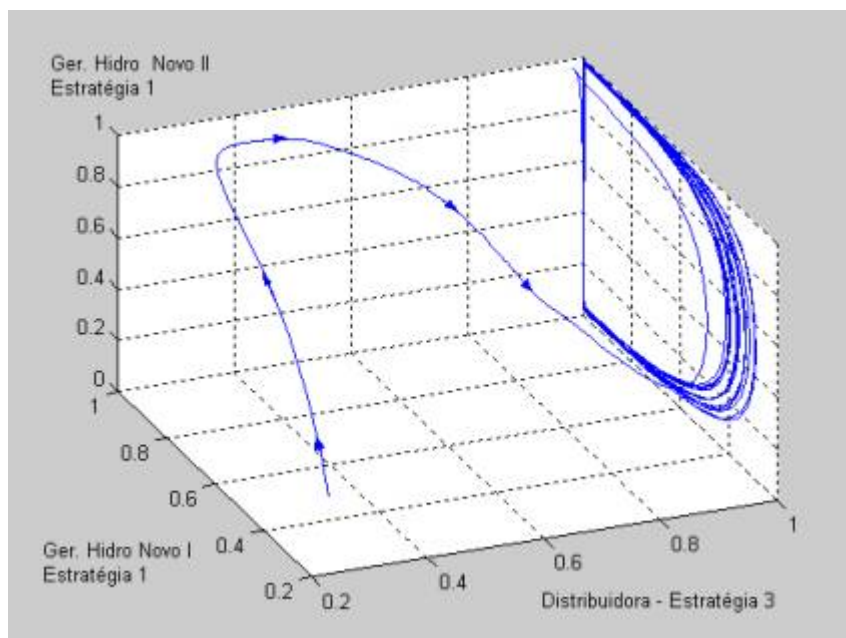


Figura 7-62 – Convergência para equilíbrio orbital

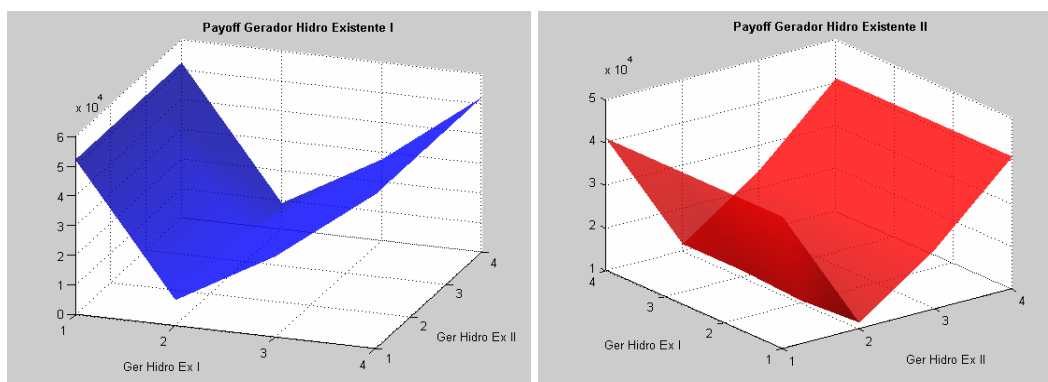


Figura 7-63 – *Payoff* dos jogadores 1 e 2 nos estágios iniciais

O grupo dos geradores térmicos, jogadores 3 e 4, possuem estratégias numéricas intuitivas a respeito do preço de suas energias a serem parcialmente comercializadas três anos após a ocorrência do leilão. Quanto maior a perspectiva de preços dos geradores, por exemplo na iminência de déficit, mais se desinteressarão pela venda sob o preço de um leilão que não lhes pareça adequado. Após o ano de entrada da energia A₃, as termelétricas continuam

expandindo suas capacidades até o sexto ano do período de estudo. Já as duas hidrelétricas previstas no cronograma de expansão só entregarão energia no último ano do período de estudo, ou seja, no sexto ano e suas estratégias, assim como as dos geradores térmicos, também são numéricas e intuitivas e desconectadas de qualquer fator conjuntural. O objetivo de estratégias tão simplificadas é compará-las com as estratégias comportamentais dos jogadores geradores hidro de energia que se comportam de acordo com o cenário vigente e futuro.

Após as simulações modeladas especificamente para este trabalho em Matlab podemos extrair do exemplo, como primeira conclusão, que as estratégias comportamentais tendem a se tornar estratégias mais estáveis formando perfis dominantes não somente nos estágios individuais, mas também durante todo o período de estudo. Esta conclusão vem do fato que, enquanto as usinas térmicas apresentam para cada caso, estratégias diferentes nos perfis de equilíbrio, como é o caso do jogador 3, gerador termoelétrico novo I, que utiliza sua estratégia 4, com um preço de \$ 210,00 para sua energia no quarto estágio do caso seco, sua estratégia 1, com preço de \$ 70,00 no quarto estágio do caso úmido e sua estratégia 3, com preço de \$ 160,00 no quarto estágio do caso intermediário, mudando continuamente na tentativa de melhores resultados, os jogadores hidro podem confortavelmente lançar mão apenas da sua estratégia 1, comportamental, em todos os estágios que se mantém nos perfis de equilíbrio competitivo e cooperativo. Este é exatamente o maior objetivo de uma estratégia comportamental, do ponto de vista da teoria dos jogos evolutivos, termos uma estratégia que funcione bem perante os vários cenários do jogo. Se todos os jogadores possuírem uma estratégia comportamental eficiente, haverá um único perfil de equilíbrio mais atrator em todo o período de estudo em que muito provavelmente cada estratégia comportamental será responsável tanto pelo maior *payoff* esperado quanto pelo máximo *payoff* global.

A segunda conclusão é o visível benefício de estar nos equilíbrios competitivo, ou cooperativo. Quando se mantém nos equilíbrios mais atratores, os jogadores reduzem os riscos de obterem *payoffs* mais baixos. Como vemos nas tabelas do exemplo, quando os jogadores tentam otimizar suas estratégias individualmente correm o risco de baixos *payoffs*.

Um modo sugerido para se calcular tais riscos seria observar a dependência estratégica dos outros jogadores. Por exemplo, no primeiro estágio do caso intermediário o gerador hidro existente I pode tentar qualquer uma de suas estratégias e obter seu máximo *payoff* sem depender das estratégias dos outros. Neste caso, o risco de ineficiência é nulo. Já o gerador termo novo I, ao tentar obter o seu *payoff* máximo de \$ 2320,00, no quarto estágio, jogando sua estratégia 3, corre o risco de ter um *payoff* de \$ 0,00. No caso, para obter o *payoff* máximo, o jogador 3 depende que jogador 4 jogue sua estratégia 1, e a distribuidora se utilize antecipadamente ao leilão, ou da sua estratégia 2 que dá preferência às hidro existentes ou da sua estratégia 3 que dá preferência as termos novas. Essa dependência das estratégias alheias, incide num risco de ineficiência.

A própria ineficiência também deve ser considerada no cálculo do risco, pois se a diferença entre os *payoffs* máximo e mínimo for irrelevante a dependência, dos outros jogadores será considerada desprezível. Como sugestão para a quantificação da percepção do risco escrevemos a seguinte fórmula:

$$ri = \frac{\text{máximo payoff} - \text{mínimo payoff}}{\text{máximo payoff}}$$

Onde;

ri - é o risco de ineficiência que deve ser medido, não por probabilidades de acontecer algo indesejável, mas que deve ser medido pela profundidade da influência negativa no *payoff* máximo

máximo payoff – é o *payoff* obtido pela otimização individual.

mínimo payoff – é *payoff* mínimo possível ao jogador, quando ele joga sua estratégia de máximo *payoff*.

Outro cálculo sugerido para o risco seria em termos da probabilidade do jogador obter baixos *payoffs* ao jogar sua estratégia de máximo. Esta ineficiência dependeria da probabilidade do outro jogador jogar uma estratégia que implicasse num baixo rendimento do primeiro jogador. Por exemplo, no caso do jogador 3, que pode não lucrar nada caso o jogador 4 (termo nova II) não jogue sua estratégia 1 e o jogador 7 (distribuidora), que não compete pela venda mas faz parte do processo não jogue, ou sua estratégia 2, ou sua estratégia 3. No caso do jogador 4, ele provavelmente jogará sua estratégia 2 no quarto estágio, pois essa é justamente

sua estratégia de máximo *payoff* e de equilíbrio mais atrator. O jogador 7, por sua vez, muito provavelmente, jogará a estratégia 2, pois é esta sua estratégia que compõe o perfil de equilíbrio mais atrator, ou jogará a sua estratégia 1 que lhe beneficiará com o máximo *payoff*.

Como terceira conclusão temos que se estratégia comportamental pode ser eficiente para todos os estágios, o será também na contabilização total do período de estudo. Como vimos, a estratégia 1 do jogador 1, está bem afinada para ser jogada em todos os estágios, pois é esta a estratégia do jogador 1 que está sempre presente no perfil de equilíbrio mais atrator.

Outras conclusões dependentes do cenário serão evitadas. A conjuntura é quem vai definir qual é a melhor estratégia que irá variar de caso a caso. Uma estratégia específica deve ser escolhida como a mais eficiente para um determinado jogo.

Os resultados deste simples exemplo está de acordo com Robert Axelrod⁵ que analisou racionalmente a interação entre entidades humanas ou corporativas num ambiente competitivo, considerando um período de tempo razoavelmente longo e provou matematicamente que não existe nenhuma estratégia de competição, por mais "esperta" que seja, capaz de trazer mais benefícios recíprocos que a cooperação continuada entre as entidades participantes de situações potencialmente conflituosas. O conhecimento prévio desse resultado pode acelerar o progresso individual, institucional ou social, evitando desgastes, desperdícios ou retrocessos, comumente observados em comunidades sub desenvolvidas.

⁵ Robert Axelrod é mais conhecido por seu trabalho interdisciplinar sobre evolução da cooperação, é professor de ciências Políticas e Política Pública na universidade de Michingan, tendo passado por Berckley e Universidade de Chicago