2
Espaços de Seqüências

Neste capítulo introduzimos os principais ingredientes (alfabetos, linguagens, seqüências bi-infinitas, blocos) para a construção de espaços de seqüências. Veremos alguns exemplos importantes de espaços de seqüências, como os espaços de blocos com e sem sobreposição. Fecharemos o capítulo com o estudo dos códigos de translação de blocos, que nos levará ao estudo de fatores, que terão um papel importante no estudo da entropia.

2.1
Seqüências Completas

Informação é freqüentemente representada como uma seqüência de símbolos discretos de um conjunto finito. Por exemplo, um número real pode ser representado por uma seqüência infinita de números naturais entre 0 e 9 da sua expansão decimal. Ou por uma seqüência de 0's e 1's da sua expansão binária. Por exemplo, computadores armazenam seqüências de 0's e 1's, discos de áudio utilizam blocos de 0's e 1's. Em cada tipo de exemplo, existe um conjunto finito $\mathcal{A}$ de símbolos que chamaremos de alfabeto. Os elementos de $\mathcal{A}$ são também chamados de letras e serão tipicamente denotados por $a, b, c, \ldots$ ou às vezes por dígitos $0, 1, 2, \ldots$, quando isso é mais significativo. Expansões decimais, por exemplo, usam o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Nosso principal objetivo é estudar as coleções de seqüências bi-infinitas de sím-bolos de um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Tal seqüência é denotada por $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ou por

$$x = \ldots x_{-2}\, x_{-1}\, x_0\, x_1\, x_2 \ldots,$$

onde cada $x_i \in \mathcal{A}$. O sím-bolo x_i é a i-ésima coordenada de x. Quando escrevemos uma seqüência precisamos especificar quem é a "0-ésima coordenada". Usaremos então, o "ponto decimal"que separa x_i com $i \geq 0$ dos x_i com $i < 0$. Por exemplo,

$$x = \ldots 010.1101 \ldots$$

onde $x_{-3} = 0$, $x_{-2} = 1$, $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, etc.

Denotaremos por $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{Z}$ no alfabeto $\mathcal{A}$.

Tais funções são as seqüências bi-infinitas de elementos de $\mathcal{A}$.

Definição 2.1 (Espaço de seqüências completas e Aplicação shift) *Seja $\mathcal{A}$ um alfabeto finito.*

- *Chamamos de* $\mathcal{A}$-seqüência completa *a coleção de todas as seqüências bi-infinitas de sím-bolos de $\mathcal{A}$, que denotaremos por*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A}, \;\; \textit{para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Cada elemento (seqüência) $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um ponto da seqüência completa.

- *Dado $r \in \mathbb{N}$, dizemos que uma r-seqüência completa (ou simplesmente r-seqüência) é uma seqüência completa sobre o alfabeto $\{0, 1, \ldots, r-1\}$. Os pontos de uma 2-seqüência completa são também chamados de seqüências binárias.*
- *Se $\mathcal{A}$ tem tamanho $|\mathcal{A}| = r$, então existe uma correspondência natural entre a $\mathcal{A}$-seqüência completa e a r-seqüência completa. Tal correspondência é dada pelo fato de o alfabeto $\mathcal{A}$ possuir r sím-bolos em sua coleção, caracterizando assim a r-seqüência completa.*
- *A* aplicação shift *do espaço de seqüências completas $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ em si mesmo é definida por*

$$\begin{aligned} \sigma : \;\; & \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ & x \longmapsto y = \sigma(x); \;\; \textit{onde } y_i = x_{i+1}. \end{aligned}$$

Observe o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{lcl} x & = & \cdots \; x_{-3} \;\; x_{-2} \;\; x_{-1} \, . \, x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \; \cdots \\ \big\downarrow \sigma & & \\ y = \sigma(x) & = & \ldots \; x_{-2} \;\; x_{-1} \;\; x_0 \, . \, x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \; \cdots \end{array}$$

Pontos em uma seqüência completa que retornam em si mesmos, após um número finito de iteradas da aplicação shift são particularmente simples de se descrever.

Definição 2.2 (Ponto Periódico) *Um ponto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é* periódico *para a aplicação shift σ, se existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tal que $\sigma^n(x) = x$, neste caso dizemos que x tem período n. Se $\sigma(x) = x$, isto é $n = 1$, então x é chamado de* ponto fixo *para σ.*

2.2 Blocos

Introduziremos nesta seção as noções de blocos de sím-bolos consecutivos e subblocos. Estes conceitos terão um papel importante na Sessão 2.3.

Um *bloco* $\mathfrak{b}$ sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ é uma seqüência finita de sím-bolos de $\mathcal{A}$. Escreveremos o bloco $\mathfrak{b}$ sem separar seus sím-bolos por vír-gulas ou outra pontuação. Assim, um bloco típico sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$ aparecera na forma $aababbabbb$. Isso é conveniente para incluirmos a seqüência sem símbolos, chamada de *bloco vazio* e denotada por $\mathfrak{e}$.

O tamanho (comprimento) de um bloco $\mathfrak{b}$, é dado pelo número de símbolos que ele contém e é denotado por $|\mathfrak{b}|$. Assim, se $\mathfrak{b} = b_1b_2\dots b_k$ então $|\mathfrak{b}| = k$. O bloco vazio $\mathfrak{e}$ tem tamanho 0. Um bloco $\mathfrak{b}$ de tamanho k é denominado k-*bloco*. O conjunto de todos os k-blocos sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ é denotado por $\mathcal{A}^k$.

Um *subbloco* $\tilde{\mathfrak{b}}$ do bloco $\mathfrak{b} = b_1b_2\dots b_k$ é um bloco da forma $b_ib_{i+1}\dots b_j$ onde $1 \leq i \leq j \leq k$. Por convenção, o bloco vazio $\mathfrak{e}$ é um subbloco de qualquer bloco.

Dados um alfabeto $\mathcal{A}$, um ponto $x = (x_i) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e números inteiros i, j com $i \leq j$, denotaremos o bloco de coordenadas de x da posição i à posição j, por

$$x_{[i,j]} = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : y_k = x_k, \text{ para todo } k = i, i+1, \dots, j\}.$$

Usaremos as seguintes notações. Se $i > j$ então $x_{[i,j]}$ é o bloco vazio $\mathfrak{e}$. Definiremos

$$x_{[i,j)} = x_{[i,j-1]}.$$

Finalmente, a seqüência infinita à direita de x_i é definida por

$$x_{[i,\infty)} = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : y_k = x_k \text{ para todo } k \geq 1\}.$$

Similarmente,

$$x_{(-\infty,i]} = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : y_k = x_k \text{ para todo } k \leq i\}$$

é a seqüência infinita à esquerda de x_i.

Dois blocos $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ podem se juntar, formando um novo bloco $\mathfrak{ba}$. Denominaremos tal operação de *junção de blocos*. Mais precisamente, se $\mathfrak{b} = b_1, b_2, \dots, b_k$ e $\mathfrak{a} = a_1, a_2, \dots, a_r$ o bloco $\mathfrak{ba}$ é $b_1, b_2, \dots, b_k, a_1, a_2, \dots, a_r$. Observe que o tamanho $|\mathfrak{ba}|$ do bloco $\mathfrak{ba}$ é $|\mathfrak{b}| + |\mathfrak{a}|$. Por convenção, se $\mathfrak{e}$ é o bloco vazio então $\mathfrak{eb} = \mathfrak{be} = \mathfrak{e}$, para todo bloco $\mathfrak{b}$. Observe que a junção de blocos não é comutativa (em geral).

Se $n \geq 1$ (n pode ser infinito), definimos $\mathfrak{b}^n$ como $\mathfrak{b}\mathfrak{b}\cdots\mathfrak{b}$, onde consideramos a junção de $\mathfrak{b}$ com ele próprio n vezes. Se $n = 0$, por convenção, escrevemos $\mathfrak{b}^0 = \mathfrak{e}$.

Usando a linguagem de blocos para caracterizar os pontos periódicos de uma aplicação shift:

Observação 2.3 *Uma seqüência x tem período n se, e somente se, existe um bloco $\mathfrak{b}$ de tamanho n tal que $x = \mathfrak{b}^{\infty}$.*

2.3
Espaços de Seqüências

As seqüências de sím-bolos que iremos estudar são freqüentemente objeto de restrições. Nesta sessão iremos introduzir a noção fundamental de *espaços de seqüências,* que será o subconjunto de pontos do espaço de seqüências completas que satisfazem um conjunto finito de restrições.

Consideremos um alfabeto finito $\mathcal{A}$ e uma coleção de blocos $\mathfrak{P}$ sobre o alfabeto $\mathcal{A}$. Para tal $\mathfrak{P}$, definiremos $X_{\mathfrak{P}}$ como a coleção de seqüências x em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tais que $x \in X_{\mathfrak{P}}$ se, e somente se, x não contém nenhum bloco de $\mathfrak{P}$, isto é, para todo par $i, j \in \mathbb{Z}$ com $i < j$ se verifica que $x_{[i,j]}$ não pertence à coleção $\mathfrak{P}$.

Definição 2.4 (Espaço de Seqüências) *Considere um alfabeto finito $\mathcal{A}$ e um conjunto de blocos $\mathfrak{P}$ definido sobre o alfabeto $\mathcal{A}$. O* espaço de seqüências associado à coleção de blocos $\mathfrak{P}$ *é um subconjunto X do espaço de seqüências completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = X_{\mathfrak{P}}$. Neste caso, dizemos que $\mathfrak{P}$ é o conjunto de restrições ou de* blocos proibidos *do espaço $X = X_{\mathfrak{P}}$.*

Quando um espaço de seqüências X está contido em outro espaço de seqüências Y, dizemos que X é um subespaço de Y.

A seguir veremos alguns exemplos.

Exemplo 1 *Se X é o espaço de seqüências completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, basta tomarmos $\mathfrak{P} = \emptyset$ para obter $X = X_{\emptyset}$. Isto reflete o fato de que não existe nenhum tipo de restrição sobre X.*

Exemplo 2 (Shift de ouro) *Seja X o conjunto de todas as seqüências binárias, onde não é permitido a seqüência de dois 1's consecutivos. Considerando o bloco $\mathfrak{P} = \{11\}$, obtemos $X = X_{\mathfrak{P}}$. Este espaço de seqüências é chamado de* shift de ouro. *Este exemplo terá um importante papel nesta dissertação.*

Exemplo 3 (Shift par) *Seja X o conjunto de todas as seqüências binárias tais que entre qualquer par de 1's existe um número par de 0's, em particular, não existem dois* 1*'s consecutivos. Neste caso, a coleção de blocos proibidos $\mathfrak{P}$ é dada por*

$$\{10^{2n+1}1 : n \geq 0\}.$$

Temos assim $X = X_{\mathfrak{P}}$. Este exemplo é naturalmente chamado de shift par.

2.4
Linguagens

Às vezes é mais fácil descrever um espaço de seqüências especificando os blocos que são permitidos, ao invés de especificar os blocos proibidos, como nos casos acima. Esta abordagem leva naturalmente à noção de *linguagem de um espaço de seqüências.*

Definição 2.5 (Linguagem de um Espaço de Seqüências) *Seja X um espaço de seqüências definido sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathfrak{B}_n(X)$ o conjunto de todos n-blocos que ocorrem em pontos de X. A* linguagem *de X é dada pela coleção*

$$\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n(X).$$

Se um bloco $\mathfrak{b}$ pertence à linguagem $\mathcal{L}(X)$, dizemos que o bloco $\mathfrak{b}$ se encontra em *X. Neste caso, existem números inteiros i e j, $i \leq j$, tais que $\mathfrak{b} = x_{[i,j]}$.*

Veremos as linguagens de alguns exemplos:

Exemplo 4

– *O espaço completo de seqüências de dois sím-bolos* 0 *e* 1 *tem linguagem*

$$\{\mathfrak{e}, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, \ldots\}.$$

– *O shift de ouro tem linguagem*

$$\{\mathfrak{e}, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100, 101, 0000, \ldots\}.$$

Observamos que dado um alfabeto finito $\mathcal{A}$, nem toda coleção de blocos de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é uma linguagem de um espaço de seqüências definido sobre $\mathcal{A}$. Por exemplo, tome o bloco $\mathfrak{b} = 10$ sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ com coleção de blocos proibidos $\mathfrak{P} = \{11\}$ e observe que os conjuntos de blocos

$$\{\mathfrak{e}, 10, 110, 1110, 11110, \ldots, 11111\ldots1110, \ldots\}$$

não formam uma linguagem sobre um espaço de seqüências, pois seus sím-bolos a partir do sím-bolo 110 em diante são proibidos.

A seguinte proposição caracteriza as coleções de blocos que são uma linguagem e mostra as famílias de blocos que fornecem uma descrição alternativa de um espaço de seqüências.

Proposição 2.6 (Caracterização das linguagens) *Considere um alfabeto finito $\mathcal{A}$ e um espaço de seqüências X definido sobre $\mathcal{A}$.*

1. *Seja $\mathcal{L}(X)$ a linguagem de X. Seja $\mathfrak{b}$ um bloco em $\mathcal{L}(X)$, então*

   a) *todo subbloco $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{b}$ pertence a linguagem $\mathcal{L}(X)$,*

   b) *existem blocos não vazios $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{c}$ em $\mathcal{L}(X)$ tais que $\mathfrak{abc} \in \mathcal{L}(X)$.*

2. *As linguagens de um espaço de seqüências estão caracterizadas pelas condições no item (1): se $\mathcal{L}$ é uma coleção de blocos sobre o alfabeto $\mathcal{A}$, então $\mathcal{L}$ é a linguagem de algum espaço de seqüências X definido sobre $\mathcal{A}$ se, e somente se, $\mathcal{L}$ satisfaz a condição do item (1).*

3. *A linguagem de um espaço de seqüências determina o espaço de seqüências:*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_{\mathcal{L}(X)^c}), \quad X = X_{\mathcal{L}(X)^c}$$

Prova: Provaremos primeiro o item (1a). Consideramos um bloco $\mathfrak{b} \in \mathcal{L}(X)$. Então, necessariamente, o bloco $\mathfrak{b}$ encontra-se em algum ponto $x \in X$: existem i e j, $i < j$, tais que $\mathfrak{b} = x_{[i,j]}$. Portanto, por definição, todo subbloco $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{b}$ encontra-se em x, assim $\mathfrak{a}$ está em $\mathcal{L}(X)$. Acabamos de mostrar que todo subbloco de $\mathfrak{b}$ pertence a $\mathcal{L}(X)$.

Para provar o item (1b), lembre que $\mathfrak{b} = x_{[i,j]}$, para certos $i, j \in \mathbb{Z}$, onde $i \leq j$. Escolhemos agora $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $k \leq i - 1 < j + 1 \leq l$. Observamos que os blocos $\mathfrak{a} = x_{[k,i-1]}$ e $\mathfrak{c} = x_{[j+1,l]}$ também pertencem a $\mathcal{L}(X)$. Finalmente observamos que

$$\mathfrak{abc} = x_{[k,\ell]}$$

é um bloco que pertence a $\mathcal{L}(X)$. Assim, mostramos a existência de dois blocos não vazios $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{c} \in \mathcal{L}(X)$ tais que a junção $\mathfrak{abc} \in \mathcal{L}(X)$.

Para provar o segundo item considere uma coleção de blocos $\mathcal{L}$ que satisfazem as condições no item (1). Consideramos o conjunto de blocos $\mathfrak{P} = \mathcal{L}^c$ e consideramos o espaço de seqüências $X = X_{\mathfrak{P}}$ com blocos proibidos em $\mathfrak{P}$. Mostraremos que $\mathcal{L}$ é a linguagem do espaço de seqüências $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$.

Veremos primeiro a inclusão $\mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}}) \subseteq \mathcal{L}$. Suponhamos $\mathfrak{b} \in \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$. Então $\mathfrak{b}$ se encontra- em algum ponto de $X_{\mathfrak{P}} = X_{\mathcal{L}^c}$. Por definição, $\mathfrak{b}$ não pertence $\mathcal{L}^c$, isto é , $\mathfrak{b} \in \mathcal{L}$. Provamos assim a inclusão $\mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}}) \subseteq \mathcal{L}$.

Para ver a inclusão $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$ consideramos um bloco $\mathfrak{b} = x_0\, x_1 \ldots x_m \in \mathcal{L}$. Aplicando repetidamente o item (1b), encontramos infinitos sím-bolos x_j com $j > m$ e infinitos sím-bolos x_i com $i < 0$ tais que o ponto $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ verifica que $x_{[i,j]} \in \mathcal{L}$ para todo $i \leq 0$ e $j \geq m$. Pelo item (1a) todo subbloco de $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ está em $\mathcal{L}$. Por definição, o ponto $x \in X_{\mathfrak{P}} = X_{\mathcal{L}^c}$, pois o bloco $\mathfrak{b}$ se encontra em x. Portanto, $\mathfrak{b} \in \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$, provando que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$.

Para provar o item (3), observe que um espaço de seqüências possui uma única linguagem. Considere agora uma linguagem $\mathcal{L}$. Pelo item (2), esta linguagem determina um espaço de seqüências $X_{\mathcal{L}^c}$ cuja linguagem é $\mathcal{L}$. Devemos ver que se X é um espaço de seqüências cuja linguagem é $\mathcal{L}$ então $X = X_{\mathcal{L}^c}$.

Considere $x \in X$. Então, nenhum bloco contido em x pertence a $\mathcal{L}(X)^c$, pois $\mathcal{L}(X)$ contém todos os blocos que encontram-se em pontos de X. Portanto $x \in X_{\mathcal{L}(X)^c}$ e isto mostra que $X \subseteq X_{\mathcal{L}(X)^c}$.

Reciprocamente, como X é um espaço de seqüências, temos que existe uma coleção de blocos $\mathfrak{P}$ tal que $X = X_{\mathfrak{P}}$. Se $x \in X_{\mathcal{L}(X)^c}$, então todo bloco em x deve estar em $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_{\mathfrak{P}})$ e não pode estar em $\mathfrak{P}$. Portanto, $x \in X_{\mathfrak{P}}$, provando que $X = X_{\mathfrak{P}} \supseteq X_{\mathcal{L}(X)^c}$. Obtemos assim o resultado final $X = X_{\mathcal{L}(X)^c}$.
□

O item (3) da Proposição 2.6 mostra que, embora possamos descrever um espaço de seqüências X por uma diferente coleção de blocos proibidos, como por exemplo o shift de ouro que pode ter mais de uma coleção de blocos proibidos, basta observarmos que as coleções $\mathfrak{P} = \{11\}$, $\tilde{\mathfrak{P}} = \{111\}$ são proibidas em tal shift, existe uma grande coleção $\mathcal{L}(X)^c$, que é o complemento da linguagem de X.

Em primeiro lugar, observamos que dado um subconjunto X de um espaço de seqüências podemos definir o conjunto $\mathcal{L}(X)$. Uma conseqüência útil do item (3) da Proposição 2.6 é o seguinte corolário:

Corolário 2.7 *Sejam $\mathcal{A}$ um alfabeto finito e X um subconjunto do espaço de seqüências completo definido sobre o alfabeto $\mathcal{A}$. Então X é um espaço de seqüências se, e somente se, uma seqüência $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ pertence a X se, e somente se, todo subbloco $x_{[i,j]} \in \mathcal{L}(X)$.*

Prova: Observamos que para toda seqüência $x \in X$ se verifica que todo subbloco $x_{[i,j]}$ pertence a $\mathcal{L}(X)$ então $X = X_{\mathcal{L}^c}$. O recíproco é imediato e segue de Proposição 2.6. □

Definição 2.8 (Espaço de seqüências irredutível) *Um espaço de seqüências X é irredutível, se para todo par ordenado de blocos $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} \in \mathcal{L}(X)$ existir um bloco $\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{v} \in \mathcal{L}(X)$.*

2.5
Espaços de seqüências de blocos

Nesta sessão iremos construir novos tipos de blocos em um determinado espaço de seqüências.

Seja X um espaço de seqüências sobre o alfabeto $\mathcal{A}$. Consideramos os conjunto $\mathfrak{B}_N(X)$ de todos os N-blocos permitidos no espaço de seqüências X e consideramos o novo alfabeto ${\mathcal{A}_X}^{[N]} = \mathfrak{B}_N(X)$. Observamos que se $\mathcal{A}$ é um alfabeto finito com k sím-bolos, então ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$ tem no máximo k^N sím-bolos. Portanto, ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$ é um alfabeto finito.

Consideramos agora ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$ como um alfabeto e definimos o espaço de seqüências completo $({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ sobre ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$.

2.5.1
Seqüências de blocos com sobreposição

A transformação de N-blocos com sobreposição β_N está definida por

$$\beta_N \colon X \longrightarrow ({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}}, \quad (\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i,i+N-1]}.$$

Assim β_N substitui a i-ésima coordenada de x pelo bloco de coordenadas de x de tamanho N começando na posição i.

Exemplo 5 *A imagem de $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em β_4 tem a seguinte forma :*

$$\begin{array}{rccl} \beta : & X & \longrightarrow & ({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}} \\ & x & \longmapsto & (\beta_4(x))_{[i]} = x_{[i,i+3]} \end{array}$$

onde

$$\beta_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \dots .$$

Definição 2.9 (Espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição) *Seja X um espaço de seqüências. O espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição $X^{[N]}$ de X é a imagem $X^{[N]} = \beta_N(X)$ contida no espaço de seqüências completo $({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ definido sobre o alfabeto ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$.*

Na Proposição 2.12 veremos que de fato $X^{[N]}$ é um espaço de seqüências.

Definição 2.10 (Sobreposição de blocos) *Dados dois N-blocos*

$$\mathfrak{u} = [u_1 u_2 \dots u_N], \quad \mathfrak{v} = [v_1 v_2 \dots v_N],$$

dizemos que $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{v}$ se sobrepõem *se $u_2 u_3 \dots u_N = v_1 v_2 \dots v_{N-1}$ (isto é, o inicio de $\mathfrak{v}$ coincide com o final de $\mathfrak{u}$).*

Note que no exemplo acima, os sím-bolos consecutivos de ${\mathcal{A}_X}^{[N]}$ se sobrepõem.

Lema 2.11 *Seja X um espaço de seqüências definido sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Seja $y \in ({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ uma seqüência formado por N-blocos que verifica a propriedade de sobreposição. Então existe $x \in X$ tal que $\beta_N(x) = y$.*

Prova: Como y é uma seqüência do espaço de seqüências completo $({\mathcal{A}_X}^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ formado por N-blocos que verifica a propriedade de sobreposição segue da definição 2.9, que y é a imagem $\beta_N(X)$ contida em tal espaço de seqüências. Isto é, existe uma seqüência x pertencente ao espaço de seqüências X tal que $y = \beta_N(x)$.
Assim, concluímos a prova do lema. □

Exemplo 6 *Seja X o shift de ouro do Exemplo 2 e considere N=2. Temos que a coleção de 2-blocos sobre o alfabeto ${\mathcal{A}_X}^{[2]}$ é dada por:*

$${\mathcal{A}_X}^{[2]} = \{\mathfrak{a} = [00], \mathfrak{b} = [01], \mathfrak{c} = [10]\}.$$

O espaço de seqüências $X^{[2]}$ tem como restrição a coleção blocos proibidos

$$\mathfrak{P} = \{\mathfrak{ac}, \mathfrak{ba}, \mathfrak{bb}, \mathfrak{cc}\}.$$

Observe que se $x \in X$ e consideremos dois blocos consecutivos de tamanho 2, $[x_i, x_{i+1}]$ e $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ eles tem necessariamente sobreposição. A família $\mathfrak{P}$ é exatamente a coleção de todos os dois blocos sem sobreposição (note que não é possível um bloco [11]*. Por outra parte é imediato ver usando a transformação β_2 que os blocos $\mathfrak{aa}$, $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{ca}$ e $\mathfrak{cb}$ acontecem. Por exemplo, é suficiente considerar as imagens de pontos da forma*

$$\ldots 000 \ldots, \quad \ldots 001 \ldots, \quad \ldots 010 \ldots, \quad \ldots 100 \ldots, \quad \ldots 101 \ldots,$$

respectivamente.

De fato, para ver que $X^{[N]}$ é um espaço de seqüências devemos encontrar seu conjunto de blocos proibidos.

Proposição 2.12 *O espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição de um espaço de seqüências também é um espaço de seqüências.*

Prova: Sejam X um espaço de seqüências sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ e $N \geq 1$. Então, pela definição de espaço de seqüências, temos que existe uma coleção de blocos proibidos $\mathfrak{P}$ sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ tal que $X = X_{\mathfrak{P}}$. Para provar que $X^{[N]}$ é um espaço de seqüências devemos construir sua coleção de blocos proibidos em ${\mathcal{A}_X}^N$.

Criaremos uma nova coleção de blocos $\tilde{\mathfrak{P}}$ sobre $\mathcal{A}$, como segue. Se um bloco $\mathfrak{b}$ pertence a $\mathfrak{P}$ e tem tamanho maior ou igual do que N então ele também pertence a $\tilde{\mathfrak{P}}$. Se um bloco $\mathfrak{b}$ pertence a $\mathfrak{P}$ e tem tamanho estritamente menor do que N então $\tilde{\mathfrak{P}}$ contém todos os N-blocos sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ que contém o bloco $\mathfrak{b}$. Observamos que todo bloco de $\tilde{\mathfrak{P}}$ tem tamanho maior ou igual a N. Considerando a coleção $\tilde{\mathfrak{P}}$ obtemos um novo espaço de seqüências que é $Y = Y_{\tilde{\mathfrak{P}}}$.

Para cada bloco $\mathfrak{a} = [a_1 a_2 \cdots a_m] \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $m \geq N$, considere o seguinte $(m - N + 1)$-bloco sobre o alfabeto $\mathcal{A}^N$ obtido considerando sobreposições:

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{a})^{[N]} = [[a_1 a_2 \cdots a_N][a_2 a_3 \cdots a_{N+1}] \cdots [a_{m-N+1} a_{m-N+2} \cdots a_m]].$$

Seja $\mathfrak{P}_1$ o conjunto de todos os blocos sobre o alfabeto $\mathcal{A}^N$ da forma $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})^{[N]}$ para algum bloco $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathfrak{P}}$.

Considere $\mathfrak{b} \in \mathfrak{P}$ um bloco de tamanho menor do que N e $\mathfrak{a}$ um bloco de $\tilde{\mathfrak{P}}$ obtido a partir de $\mathfrak{b}$. Observe que esta construção implica o seguinte: existe algum bloco (de tamanho exatamente N) de $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})^N$ que contém $\mathfrak{b}$.

Afirmação 2.13 $X^{[N]} \subseteq Y_{\mathfrak{P}_1}$.

Prova: Consideramos uma seqüência $(\mathfrak{a}_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X^{[N]}$. Por definição, cada $\mathfrak{a}_i$ é um N-bloco de X. Para provar a afirmação é suficiente verificar que nenhum dos blocos de $(\mathfrak{a}_i)_i$ pertence à família $\mathfrak{P}_1$. Suponha por absurdo que algum bloco $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{a}_{i+k}]$ pertence a $\mathfrak{P}_1$. Então, pela observação precedente, existe j tal que $\mathfrak{a}_j$ contem um bloco $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{P}$. Logo $\mathfrak{a}_j$ não pode ser um bloco de tamanho N de X, esta contradição termina a prova. □

Observamos que pela definição da transformação β_N, as seqüências de $X^{[N]}$ também satisfazem a condição de sobreposição: se $\mathfrak{b}_i$ e $\mathfrak{b}_{i+1}$ são dois blocos consecutivos de uma seqüência de $X^{[N]}$ então se $\mathfrak{b}_i = [b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, b_N]$ então $\mathfrak{b}_{i+1} = [b_2, \ldots, b_{N-1}, b_N, b_{N+1}]$. Portanto, se tomarmos o seguinte conjunto

$$\mathfrak{P}_2 = \{\mathfrak{u}\mathfrak{v} : \mathfrak{u} \in \mathcal{A}^N, \mathfrak{v} \in \mathcal{A}^N, \quad \text{onde } \mathfrak{u} \text{ e } \mathfrak{v} \text{ não têm sobreposição}\}.$$

Logo, como as seqüências de $X^{[N]}$ tem sobreposição obtemos $X^{[N]} \subseteq Y_{\mathfrak{P}_2}$. Assim concluímos que

$$X^{[N]} \subseteq Y_{\mathfrak{P}_1} \cap Y_{\mathfrak{P}_2}.$$

Afirmação 2.14

$$Y_{\mathfrak{P}_1} \cap Y_{\mathfrak{P}_2} = Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}.$$

Prova: Temos que as coleções de blocos proibidos $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ satisfazem as condições:

$$\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2, \quad \text{e} \quad \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2.$$

Observamos que se uma seqüência y pertence a $Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}$ então não contém nenhum bloco de $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$, em particular, não contém nenhum bloco de $\mathfrak{P}_1$. Portanto, $Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2} \subset Y_{\mathfrak{P}_1}$. De maneira análoga, obtemos o mesmo resultado para o espaço de seqüências $Y_{\mathfrak{P}_2}$, isto é, $Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2} \subset Y_{\mathfrak{P}_2}$. Assim concluímos que

$$Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2} \subset Y_{\mathfrak{P}_1} \cap Y_{\mathfrak{P}_2}$$

Reciprocamente, suponhamos que y pertença à intersecção dos espaços de seqüências $Y_{\mathfrak{P}_1} \cap Y_{\mathfrak{P}_2}$. Logo, $y \in Y_{\mathfrak{P}_1}$ e $y \in Y_{\mathfrak{P}_2}$. Portanto, y não contem nenhum bloco de $\mathfrak{P}_1$ nem nenhum bloco de $\mathfrak{P}_2$. Assim, não contem nenhum bloco de $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$. Logo $y \in Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}$. □

Portanto, da afirmação obtemos

$$X^{[N]} \subset Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}.$$

Afirmamos que, de fato, $X^{[N]} = Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}$. Para obter a inclusão $Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2} \subset X^{[N]}$ consideramos uma seqüência $y \in Y_{\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2}$. Como y verifica a condição de sobreposição, pelo Lema 2.11, existe um ponto x do espaço de seqüências $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\beta_N(x) = y$. Afirmamos que $x \in X = X_{\mathfrak{P}}$, em tal caso, por definição, $y \in X^{[N]}$.

Suponhamos, por absurdo, que $x \notin X$. Em tal caso, x contém um bloco proibido $\mathfrak{b}$ que necessariamente está contido em algum bloco de $\tilde{\mathfrak{P}}$. Consideremos agora $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})^N$, um bloco formado por N-blocos. Por definição, $\mathfrak{s}(\mathfrak{a})^N$ está contido en $\mathfrak{P}_1$ e é um bloco de y, isto é absurdo. Concluímos assim a prova. $\square$

2.5.2 Seqüências de blocos sem sobreposição

Na Seção 2.5.1 estudamos o espaço espaço de seqüências X de blocos que se sobrepõem. Podemos fazer o mesmo tipo de construção com blocos que não se sobrepõem, que nos levará a noção de espaço de seqüências de N-blocos.

Dado um alfabeto finito $\mathcal{A}$ e um espaço de seqüências X definido sobre $\mathcal{A}$. A transformação de N-blocos γ_N está definida por

$$\gamma_N \colon X \longrightarrow ({\mathcal{A}_X}^{\{N\}})^{\mathbb{Z}}, \qquad (\gamma_N(x))_{[i]} = x_{[iN, iN+N-1]}.$$

Assim, γ_N divide a seqüência x em blocos de tamanho N consecutivos, e reúne os diferentes pedaços em um ponto do espaço de seqüências ${\mathcal{A}_X}^N$.

Exemplo 7 *A imagem de $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ por γ_4 tem a forma*

$$\gamma \colon X \longrightarrow ({\mathcal{A}_X}^{\{N\}})^{\mathbb{Z}}, \quad x \longmapsto (\gamma_4(x))_{[i]} = x_{[4i,4i+3]},$$

onde

$$\gamma_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{-9} \\ x_{-10} \\ x_{-11} \\ x_{-12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-5} \\ x_{-6} \\ x_{-7} \\ x_{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \\ x_{-4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{3} \\ x_{2} \\ x_{1} \\ x_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{7} \\ x_{6} \\ x_{5} \\ x_{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_{9} \\ x_{8} \end{bmatrix} \dots .$$

Note que neste exemplo os sím-bolos consecutivos não se sobrepõem, diferentemente do exemplo 5.

Definição 2.15 (Espaço de seqüências de blocos sem sobreposição) *Seja X um espaço de seqüências definido sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. O espaço de seqüências de N-blocos sem sobreposição $X^{\{N\}}$ de X é a imagem $X^{\{N\}} = \gamma_N(X)$ contida no espaço de seqüências completo $({\mathcal{A}_X}^{\{N\}})^{\mathbb{Z}}$ sobre ${\mathcal{A}_X}^{\{N\}}$.*

Exemplo 8 *Sejam X o shift de ouro do Exemplo 2 e $N{=}2$. Temos que a coleção de 2-blocos sobre o alfabeto ${\mathcal{A}_X}^{\{2\}}$ é dada por:*

$${\mathcal{A}_X}^{\{2\}} = \{\mathfrak{a} = 00,\ \mathfrak{b} = 01, \mathfrak{c} = 10\}.$$

Vejamos que $X^{\{2\}}$ tem como restrição a coleção $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{bc}\}$. Obviamente como seqüências que contém $\mathfrak{bc} = 0110$, são seqüências que contem o bloco proibido $\{11\}$ temos que $\{\mathfrak{bc}\} \subset \mathfrak{P}$. Por outra parte, usando a transformação γ_2 temos que os blocos

$$\mathfrak{aa} = \gamma_2(\ldots 0000 \ldots), \quad \mathfrak{ab} = \gamma_2(\ldots 0001 \ldots), \quad \mathfrak{ac} = \gamma_2(\ldots 0010 \ldots)$$

$$\mathfrak{ba} = \gamma_2(\ldots 0100 \ldots), \quad \mathfrak{ca} = \gamma_2(\ldots 1000 \ldots), \quad \mathfrak{cb} = \gamma_2(\ldots 1001 \ldots),$$

e

$$\mathfrak{cc} = \gamma_2(\ldots 1010 \ldots),$$

portanto, estes blocos acontecem.

Usando argumentos análogos aos da prova da Proposição 2.12 obtemos o seguinte:

Proposição 2.16 *O espaço de seqüências de N-blocos sem sobreposição de um espaço de seqüências também é um espaço de seqüências.*

2.6
Códigos de Translação de Blocos

Suponhamos que $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma seqüência de sím-bolos em um espaço de seqüências X sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Podemos transformar a seqüência x em uma nova seqüência $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sobre um outro alfabeto finito $\mathcal{U}$, da seguinte maneira. Fixemos dois números inteiros m e n. Para calcularmos a i-ésima coordenada y_i da seqüência transformada, usaremos a função Φ que depende do bloco $[x_{i-m}x_{i-m+1}\ldots x_{i+n-1}x_{i+n}]$ de tamanho $(n+m+1)$ de x. Obtemos assim uma função $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \to \mathcal{U}$, chamada de $(m+n+1)$-*aplicação de blocos,* definida entre o espaço dos $(m+n+1)$-blocos permitidos em X e os sím-bolos em $\mathcal{U}$. Denotaremos tal função por,

$$y_i = \Phi([x_{i-m}x_{i-m+1}\cdots x_{i+n}]) = \Phi(x_{[i-m,i+n]}). \tag{2-1}$$

Usando a função Φ, podemos definir uma aplicação

$$\phi = \Phi^{[m,n]} \colon X \to \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}, \quad \Phi^{[m,n]}(x) = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \text{onde} \quad y_i = \Phi(x_{[i-m,i+n]}).$$

Definição 2.17 (Código de translação de blocos) *Sejam X um espaço de seqüências sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ e $\Phi\colon \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \to \mathcal{U}$ uma $(m+n+1)$-aplicação de blocos. Então a aplicação*

$$\Phi^{[m,n]}\colon X \to \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}, \quad \phi(x) = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \textit{onde} \quad y_i = \Phi(x_{[i-m,i+n]}).$$

é chamada de código de translação de blocos*, com memória m e antecipação n, induzida por Φ.*

A Figura 2.1 ilustra a ação de um código de translação de blocos.

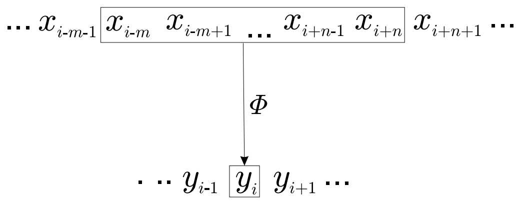

Figura 2.1: Código de Translação de Blocos

Os exemplos mais simples de códigos de translação de blocos são aqueles que não possuem nem memória nem antecipação, isto é, $m = n = 0$. Aqui, a i-ésima coordenada da imagem de x depende somente de x_i. Tais códigos são chamados de 1-códigos.

Proposição 2.18 *Sejam X e Y espaços de seqüências. Se $\phi : X \to Y$ é um código de translação de blocos, então $\phi\circ\sigma_X = \sigma_Y\circ\phi$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "\sigma_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Prova: Suponhamos que ϕ tenha memória m e antecipação n, isto é, ϕ é induzida por uma aplicação de blocos $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1} \to \mathcal{U}$. Para $x \in X$, temos, pela definição de ϕ,

$$(\sigma_Y \circ \phi)(x)_i = \phi(x)_{i+1} = \Phi(x_{[i+1-m,i+1+n]}).$$

Por outro lado, observe que, pelas definições de ϕ de σ_X,

$$(\phi \circ \sigma_X)(x)_i = \phi(\sigma_X(x))_i = \Phi((\sigma_X(x))_{[i-m,i+n]}) = \Phi(x_{[i-m+1,i+n+1]}).$$

Assim, provamos a comutatividade do diagrama acima. □

Definição 2.19 (Fatores)

- *Se um código de translação de blocos $\phi : X \to Y$ é sobrejetivo dizemos que ϕ é um* fator de X em Y.
- *Dizemos que um espaço de seqüências Y é um fator do espaço de seqüências X se, existir um fator $\phi : X \to Y$ de X em Y.*

Definição 2.20 *Um código de translação de blocos ϕ: $X \to Y$ é uma* conjugação *de X em Y se ϕ é inversível. Dois espaços de seqüências X e Y são conjugados (escreve-se $X \simeq Y$) se existir uma conjugação de X em Y.*

A seguir veremos que dado um código de translação de blocos $\phi : X \to Y$, podemos extender o espaço de seqüências X a um espaço de seqüências conjugado $\tilde{X}$ tal que seu código de translação de blocos correspondente $\tilde{\phi} : \tilde{X} \to Y$ é um 1-código.

Proposição 2.21 *Seja $\phi : X \to Y$ um código de translação de blocos. Então, existem um espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição $\tilde{X}$ de X, uma conjugação $\psi : X \to \tilde{X}$ e um 1-código $\tilde{\phi} : \tilde{X} \to Y$ tal que $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$ isto é, o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d, "\phi"'] & \tilde{X} \arrow[dl, "\tilde{\phi}"] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Prova: Suponhamos que o código ϕ de translação de blocos é induzido por uma aplicação de blocos Φ que tem memória m e antecipação n. Consideramos o conjunto $\mathcal{U}$ de símbolos formado pelos blocos de tamanho $m+n+1$ de X, isto é, $\mathcal{U} = \mathfrak{B}_{m+n+1}(X)$. Definimos a aplicação

$$\psi \colon X \to \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}, \quad \psi(x)_{[i]} = x_{[i-m,\ldots,i+n]}$$

Afirmamos que
$$\psi = \sigma^{-m} \circ \beta_{m+n+1},$$
onde β_{m+n+1} é a transformação de $m+n+1$-blocos com sobreposição de X, $\beta_{m+n+1}(x)_{[i]} = x_{[i,i+n+m]}$, veja a Seção 2.5. Posporemos a prova da afirmação e concluiremos a prova da proposição.

Para provar a afirmação é suficiente verificar que
$$\psi(x)_{[i]} = (\sigma^{-m} \circ \beta_{m+n+1}(x))_{[i]}.$$

Por definição,
$$\psi(x)_{[i]} = x_{[i-m,\dots,i+n]}.$$
Por outro lado, pela definição de β_{m+n+1},
$$\begin{aligned}(\sigma^{-m} \circ \beta_{m+n+1}(x))_{[i]} &= (\beta_{m+n+1}(x))_{[i-m]} = x_{[i-m,\dots,i-m+(m+n+1-1)]} = \\ &= x_{[i-m,\dots,i+n]}.\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{X} = \psi(X) = X^{[m+n+1]}$ é um espaço de seqüências, pois $X^{[m+n+1]}$ é um espaço de seqüências de $(m+n+1)$-blocos com sobreposição. Por outro lado, como σ e β_{m+n+1} são conjugações, então ψ também é. Logo, existem $\phi^{-1} : Y \to X$ e $\tilde{\phi} : \tilde{X} \to Y$ tal que $\tilde{\phi} = \phi \circ \psi^{-1}$. Concluímos assim a prova da proposição. □

Uma conseqüência da proposição acima é o seguinte teorema.

Teorema 2.22 *Sejam X e Y espaços de seqüências e $\phi : X \to Y$ um código de translação de blocos. Então, a imagem $\phi(X)$ é um espaço de seqüências.*

Prova: Pela Proposição 2.21, podemos assumir que o código ϕ é um 1-código. Seja Φ uma aplicação que induz o código ϕ, isto é, $\phi = \Phi_\infty$. Consideramos a linguagem $\mathcal{L}(X)$ de X e o conjunto
$$\mathcal{K} = \{\Phi(w) : w \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Pela Proposição 2.6, $\mathcal{K}$ é uma linguagem. Mostraremos que $\phi(X) = X_{\mathcal{K}^c}$ e assim provaremos que a imagem do espaço de seqüências X é também um espaço de seqüências. Se $x \in X$, então, pela definição de ϕ, todo bloco em $\phi(X)$ estará em $\mathcal{K}$ e assim $\phi(X) \in X_{\mathcal{K}^c}$. Isto prova que $\phi(X) \subseteq X_{\mathcal{K}^c}$.

Suponhamos agora que $y \in X_{\mathcal{K}^c}$. Pela definição de código de translação de blocos, temos que, para cada $n \geq 0$, o $(2n+1)$-bloco central de y é a imagem por Φ do $(2n+1)$-bloco central de algum ponto $x^{(n)} \in X$, isto é,

$$\Phi(x^{(n)}) = \phi(x^{(n)})_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}.$$

Denotaremos por S o conjunto (infinito) das seqüências $x^{(n)}$ construídas acima. Usaremos S para encontrar $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de sím-bolos de X (o alfabeto). Este conjunto é finito por hipótese. Definimos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} [0]: & S & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & x^{(n)} & \longmapsto & [0](x^{(n)}) = x^{(n)}_{[0]}. \end{array}$$

Como $\mathcal{A}$ é finito, existem um símbolo k_0 do alfabeto e um subconjunto infinito S_0 de S tais que $[0](x^{(n)}) = x_{[0]}{}^{(n)} = k_0$, para todo $x^{(n)} \in S_0$.
Consideremos $\mathcal{A}_1$ o conjunto (finito) dos blocos de três elementos formados por símbolos de $\mathcal{A}$ e transformação

$$\begin{array}{rccl} [1]: & S_0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \\ & x^{(n)} & \longmapsto & [1](x^{(n)}) = x^{(n)}_{[-1,1]}. \end{array}$$

Raciocinando como acima, obtemos um subconjunto infinito $S_1 \subseteq S_0$ e um bloco k_1 de $\mathcal{A}_1$ tal que $[1](x^{(n)}) = x^{(n)}_{[-1,1]} = k_1$, para todo $x^{(n)} \in S_1$.

Continuando este processo indutivamente, encontraremos para cada $j > 1$ um subconjunto infinito $S_j \subseteq S_{j-1}$ e um bloco k_j de tamanho $2j+1$ tais que todos os blocos centrais $x^{(n)}_{[-j,j]}$ são iguais para $x^{(n)} \in S_j$.

Construímos indutivamente uma seqüência x tal que $x_{[-j,j]} = x^{(n)}_{[-j,j]} = k_j$. Visto que $S_j \subseteq S_{j-1}$, temos que o $(2j-1)$-bloco central de de $x_{[-j,j]}$ é $x_{[-j+1,j-1]}$. Observe que todo bloco em $x \in X$ está em algum ponto $x_{[-j,j]} = x^{(n)}_{[-j,j]} \in \mathcal{L}(X)$, pois X é um espaço de seqüências. Por outro lado, para cada $j \geq 0$ e $X^n \in S_j$ temos que,

$$\Phi(x_{[-j,j]}) = \Phi(x^{(n)}{}_{[-j,j]}) = \phi(x^{(n)})_{[-j,j]} = y_{[-j,j]}.$$

tal que $\phi(x) = y$. Isso prova que $X_{\mathcal{K}^c} \subseteq \phi(X)$ e assim concluímos a prova do teorema. $\square$