

**André da Rocha Lopes**

## **Espaços de Seqüências**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Lorenzo J. Díaz

Rio de Janeiro  
outubro de 2006

**André da Rocha Lopes**

## **Espaços de Seqüências**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Lorenzo J. Díaz**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Sérgio Bernardo Volchan**

PUC-Rio

**Prof. Flávio Erthal Abdenur**

PUC-Rio

**Prof. Derek Douglas Jack Hacon**

PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de outubro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **André da Rocha Lopes**

Graduação: Matemática-Universidade Federal Fluminense (1999-2004).

Mestrado: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2004-2006).

#### Ficha Catalográfica

Lopes, André da Rocha

Espaços de Seqüências / André da Rocha Lopes; orientador: Lorenzo J. Díaz. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 63 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Espaço de Seqüências. 3. Shifts. 4. Grafos. 5. Matriz Adjacente. 6. Entropia. 7. Teorema de Perron-Frobenius.

I. Díaz, Lorenzo J.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Climério Torres Lopes e Vilma de Mattos Lopes.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Wanderley e Sandra e aos meus irmãos Carlos e Fábio pela paciência e o amor que me dedicam.

À minhas avós Ruth e Sylvia e minha tia Ivone pelo carinho e compreensão.

À minha namorada Danielle e sua família pelo carinho e ajuda nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Lorenzo Díaz pela paciência e empenho para que esse trabalho fosse realizado.

Ao professor Júlio Rebelo que me ajudou muito durante todo esse período com sua dedicação e amizade.

Aos meus amigos, por dividirem comigo as alegrias e as tristezas.

À todos os funcionários e professores do departamento de matemática pela ajuda prestada. Em especial para Creuza e Orlando.

À Capes e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Lopes, André da Rocha; Díaz, Lorenzo J.. **Espaços de Seqüências**. Rio de Janeiro, 2006. 63p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Estudaremos dinâmicas simbólicas associadas a alfabetos finitos. Consideraremos seqüências bi-infinitas e espaços com memória finita. Estudaremos propriedades invariantes por conjugação. Analisaremos a relação entre os espaços de seqüências e propriedades de matrizes não negativas. O principal exemplo desta correlação é o Teorema de Perron-Frobenius que relaciona a entropia de um espaço de seqüências e os autovalores de uma matriz não negativa associada ao espaço. Neste contexto, certos grafos e suas propriedades aparecem de forma natural.

## Palavras-chave

Espaço de Seqüências. Shifts. Grafos. Matriz Adjacente. Entropia. Teorema de Perron-Frobenius.

## Abstract

Lopes, André da Rocha; Díaz, Lorenzo J.. **Spaces of Sequence**. Rio de Janeiro, 2006. 63p. MsC Thesis — Departament of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We study symbolic dynamics associated to finite alphabets. We consider bi-infinite sequences and spaces with finite memory. We pay attention to properties which are invariant by conjugations. We analyze the relation between spaces of sequences and properties of non-negative matrices. The main example is given by the Perron-Frobenius theorem relating the entropy of a space of sequences and the eigenvalues of a non-negative matrix associated to the space. In this setting, certain graphs and their properties appear in a natural way.

## Keywords

Spaces of Sequence. Shifts. Graphs. Adjacency Matrix. Entropy. Perron-Frobenius Theorem.

# Sumário

1	Introdução	<b>9</b>
2	Espaços de Seqüências	<b>11</b>
2.1	Seqüências Completas	11
2.2	Blocos	13
2.3	Espaços de Seqüências	14
2.4	Linguagens	15
2.5	Espaços de seqüências de blocos	18
2.6	Códigos de Translação de Blocos	23
3	Shifts de Tipo Finito	<b>28</b>
3.1	Restrições de Tipo Finita	28
3.2	Grafos e seus Shifts	31
3.3	Representação de Grafos de Shifts de Tipo Finito	35
4	Shifts Sóficos	<b>39</b>
4.1	Apresentações de Shifts Sóficos	39
5	Entropia	<b>44</b>
5.1	Definição e Propriedades Básicas	44
5.2	Teoria de Perron-Frobenius	51
5.3	Cálculo da Entropia	58
	Referências Bibliográficas	<b>63</b>