

## 2 Revisão bibliográfica

### 2.1. Análise no domínio da frequência

A análise no domínio da frequência constitui-se em uma técnica bastante útil tanto na análise determinística quanto na análise não determinística.

A análise no domínio da frequência é importante quando se está analisando materiais que variam suas propriedades com a frequência, como o solo, por exemplo.

Ela é feita com a transformação de funções temporais em funções dependentes da frequência que, multiplicadas pela função de transferência  $H(\omega)$ , detalhada no item 2.1.2, fornecem as respostas que posteriormente são transformadas novamente para o domínio do tempo. Todo esse processo segue o esquema da Figura 2.1:

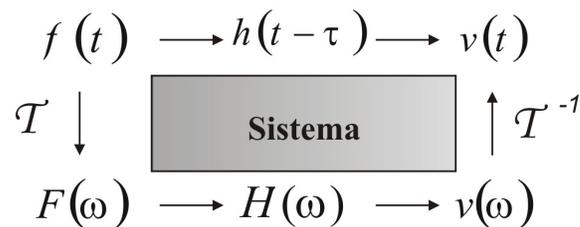


Figura 2.1 – Esquema de análise de um sistema nos domínios do tempo e da frequência.

#### 2.1.1. Transformada discreta de Fourier

A análise de Fourier fornece um instrumento poderoso para a solução de uma grande classe de problemas em diversos campos. Ela forma a base da análise no domínio da frequência em teoria de vibrações e possui também um papel significativo no desenvolvimento e aplicações da Teoria Avançada de Probabilidade.

A transformação de funções temporais contínuas dá-se pela transformada de Fourier ( $\mathcal{T}$ ), utilizando-se a série trigonométrica, Equação (2.1), pois, pode-se representar uma força excitante qualquer através de uma função linear por partes, ou a série exponencial, Equação (2.2), sendo que esta, com a mudança de álgebra, ganha em generalidade e simplicidade e permite sua extensão para emprego em funções não periódicas.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)) \quad (2.1)$$

$$\text{Onde: } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt ,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt \text{ e}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(\omega_n t) dt \text{ são amplitudes;}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n, \text{ sendo } T \text{ o período da função.}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad (2.2)$$

$$\text{Onde: } c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad (2.3)$$

$$\exp(\pm i\omega t) = \cos(i\omega t) \pm i \text{sen}(i\omega t)$$

Diversas técnicas numéricas têm sido usadas para o cálculo destas integrais. Nessas técnicas as integrais são substituídas por uma soma adequada da função pertencente à integral e avaliadas por conveniência em  $r$  incrementos iguais,  $\Delta t$ . Os mais populares desses métodos são a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson.

Admitindo-se agora que não se conheça a função contínua  $f(t)$ , mas sim a série discreta no tempo  $\{f_r\}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ , Figura 2.2; com  $t = r\Delta t$  e  $\Delta t = T/N$ .

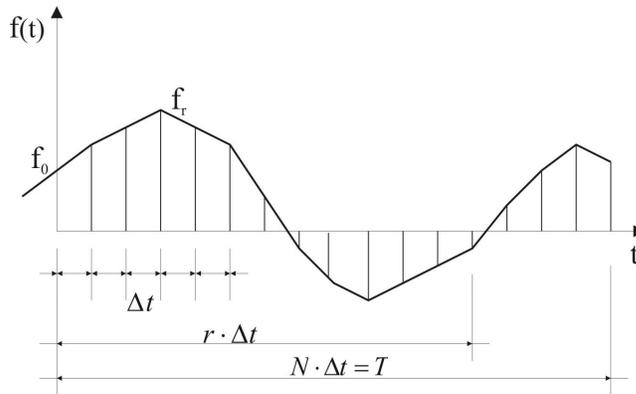


Figura 2.2 – Série discreta.

A transformada discreta de Fourier (TDF) da série torna-se então:

$$F_n = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r \cdot \Delta t}{T}\right) \Delta t \quad (2.4)$$

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r}{N}\right) \quad (2.5)$$

Pela fórmula inversa, Equação (2.6), obtêm-se os valores discretos da série  $\{f_r\}$ .

$$f_r = \sum_{n=0}^{N-1} F_n \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r}{N}\right) \quad (2.6)$$

Embora a TDF tenha sido introduzida pela consideração das propriedades de séries contínuas de Fourier, é importante ressaltar que a TDF, Equação (2.5), possui a inversa exatamente como definida na Equação (2.6) e que as propriedades das TDF são propriedades exatas ao invés de propriedades aproximadas baseadas nos resultados correspondentes para transformadas contínuas de Fourier.

As componentes de Fourier  $F_n$  são limitadas de  $n = 0 \dots (N-1)$  a fim de se manter a simetria do par de transformadas nas Equações (2.5) e (2.6). Suponha-se agora que se queiram componentes em que  $n$  é maior que  $(N-1)$ , por exemplo  $n = N + l$ . Então:

$$\begin{aligned}
 F_{N+l} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot r \cdot (N+l)}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot r \cdot l}{N}\right)
 \end{aligned}$$

Pois  $\exp(-i \cdot 2\pi \cdot r) = 1 \forall r$  inteiro.

Portanto  $F_{N+l} = F_l$ , os coeficientes repetem-se para  $n > N-1$ . E, ao se plotar as amplitudes  $|F_n|$  ao longo do eixo das frequências  $\omega_n = 2\pi \cdot n/N \cdot \Delta t$ , o gráfico repete-se periodicamente e é simétrico em relação à origem. Assim, a parte não afetada pelo “dobramento” ocupa a faixa de frequências  $|\omega| \leq \pi/\Delta t$  (rad/s). Frequências maiores apresentam coeficientes de Fourier espúrios que são repetições daqueles aplicáveis a frequências abaixo de  $\pi/\Delta t$  (rad/s). Verifica-se que os coeficientes  $F_n$ , calculados pela TDF, são corretos somente para frequências com  $n \leq \frac{N}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ ).

Se  $\omega_0$  for a máxima componente de frequência presente em  $f(t)$ , então o “dobramento” pode ser neutralizado assegurando-se que o intervalo de amostragem  $\Delta t$ , seja pequeno suficiente de modo a se ter:

$$\frac{\pi}{\Delta t} > \omega_0, \text{ ou } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad (2.7)$$

Assegurando-se que:

$$\frac{1}{2\Delta t} > f_0 \quad (2.8)$$

A frequência  $(1/2\Delta t)Hz$  é chamada frequência de dobramento e é a máxima frequência que pode ser detectada de dados amostrados com espaçamento de  $\Delta t$ . Ela precisa ser suficientemente alta para cobrir a completa faixa de frequências da série contínua. Às vezes a única maneira de se garantir isso é filtrar a série

temporal para remoção das frequências superiores à de dobramento, antes do início da análise.

Embora a técnica da Integral de Fourier constitua um meio para a determinação da resposta transiente de um sistema, a implementação numérica da integral de Fourier somente se tornou uma realidade prática com a publicação do algoritmo de Cooley-Tukey para a transformada rápida de Fourier (TRF) em 1965. A TRF divide a série  $\{f_r\}$  em seqüências menores para as quais a TDF é calculada, Equação (2.9), e depois estas seqüências menores são combinadas convenientemente, Equação (2.10), para obtenção da TDF de toda a série. A TRF proporciona uma redução no tempo computacional de processamento. Além disso, há uma vantagem adicional representada por uma melhor precisão dos resultados. Desde que menos operações devem ser feitas pelo computador, os erros de arredondamento devidos ao tamanho limite dos dígitos do computador são reduzidos, e uma melhor precisão é conseguida.

$$Y_n = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} y_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r}{N/2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (2.9)$$

$$Z_n = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} z_r \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r}{N/2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n}{N}\right) Z_n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (2.10)$$

Se o número original de intervalos  $N$  na seqüência for uma potência inteira de 2, então as seqüências  $\{y_r\}$  e  $\{z_r\}$  podem ser bipartidas sucessivamente, até as últimas subseqüências ficarem com um único termo.

Como a Equação (2.10) aplica-se somente à metade dos coeficientes da série e são necessários os valores de  $F_n$  para  $n = 0 \dots (N - 1)$ , aproveita-se do fato de  $Y_n$  e  $Z_n$  serem periódicas em  $n$  e se repetirem com período  $N/2$  para escrever:

$$Y_{n-\frac{N}{2}} = Y_n \quad \text{e} \quad Z_{n-\frac{N}{2}} = Z_n \quad (2.11)$$

O esquema computacional completo, permitindo que  $n$  varie somente de 0 a  $N/2$  é:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot n}{N}\right) Z_n \right] \\ F_{n+\frac{N}{2}} &= \frac{1}{2} \left[ Y_n + \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot (n + N/2)}{N}\right) Z_n \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Fazendo-se uso da relação  $\exp(-i \cdot \pi) = -1$  e definindo-se outra variável complexa, Equação (2.13), obtém-se a chamada “borboleta computacional”, Equação (2.14), que ocorre nos programas para cálculo da TRF, (Newland,1996).

$$W = \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi}{N}\right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} [Y_n + W^n Z_n] \\ F_{n+\frac{N}{2}} &= \frac{1}{2} [Y_n - W^n Z_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.1.2. Função de transferência

A função de transferência é a função resposta a um harmônico unitário que multiplicada pela transformada de Fourier de uma função excitação fornece as repostas na frequência. Ela é de fundamental importância na análise dinâmica no domínio da frequência. Pode ser transferência de grandezas cinemáticas, de forças ou de esforços internos.

Na seqüência apresenta-se a função de transferência e a resposta de um sistema com um grau de liberdade submetido a uma excitação com componentes harmônicos como uma função discreta, da forma:

$$E_n = E_0 \exp(i\omega_n t) \quad (2.15)$$

Onde:  $E_n$  - n-ésima componente da excitação.

Admitido  $E_0 = 1$  e  $\omega_n = n\omega$ , a equação de movimento torna-se:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \exp(i\omega_n t) \quad (2.16)$$

Para se obter a função de transferência  $H(\omega_n)$ , Equação (2.16), toma-se a solução permanente da equação de movimento, Equação (2.17) e a substitui na Equação (2.16):

$$u(t) = H(\omega_n) \exp(i\omega_n t) \quad (2.17)$$

Assim:

$$H(\omega_n) = \frac{1}{k - m\omega_n^2 + ic\omega_n} \quad (2.18)$$

Fazendo-se  $\beta_n = \omega_n/\omega_0$  e  $\xi = c/c_{cr} = c/2\sqrt{km}$ , a Equação (2.18) torna-se:

$$H(\omega_n) = \frac{1}{k(1 - \beta_n^2 + 2i\beta_n\xi)} \quad (2.19)$$

Portanto a resposta total  $u_n(t_r)$  no tempo  $t_r = r\Delta t$  devida às N componentes harmônicas de força, indicadas na Equação (2.6), é:

$$u_n(t_r) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_n \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot n \cdot r}{N}\right)}{k(1 - \beta_n^2 + 2i\beta_n\xi)} \quad (2.20)$$

Como a componente de força com frequência  $n$  é igual à componente obtida com o negativo da frequência de ordem  $N-n$ ,  $\beta_n = \omega_n/\omega_0$ , onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , deve ser avaliado como:

$$\begin{aligned} \omega_n &= n\omega & \text{para } n \leq \frac{N}{2} \\ e \\ \omega_n &= -(N-n)\omega & \text{para } n > \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A frequência correspondente a  $n = N/2$ , é a maior frequência não repetida que pode ser considerada na série discreta de Fourier, como já mencionado.

## 2.2. Propagação de ondas elásticas

Um corpo elástico, quando submetido a uma tensão ou esforço, deforma-se temporariamente e, quando essa tensão é retirada, o corpo recupera sua forma e volumes originais. Uma perturbação temporal de um meio elástico, como a provocada por um sismo, ou por uma explosão, ou pelo impacto de um meteorito, etc... geram ondas elásticas que se propagam a partir do ponto de origem. Essas ondas elásticas ou sísmicas podem ser consideradas como perturbações que provocam tensões que deformam o meio temporariamente, durante a sua passagem. Quando a onda termina de passar o meio recupera a sua forma e volume originais.

A quantidade de deformação que sofre o meio, provocada por uma determinada tensão, depende das características elásticas do mesmo.

A análise dinâmica de estruturas pode ser conduzida pela teoria de propagação de ondas, principalmente para resolução de problemas geológicos, que variam muito suas propriedades e devem ser tratados como contínuos (Kramer, 1996).

As ondas podem ser dilatacionais, torcionais ou de flexão, dependendo da vibração a que o material está submetido. As duas primeiras são de principal interesse para a engenharia. Como onda dilatacional tem-se a onda de corpo P, e

cisalhantes as ondas, também de corpo, SV (movimento no plano vertical) e SH (movimento no plano horizontal).

Os parâmetros definidores da onda são velocidade de propagação, número de onda e amplitude. A influência na estrutura está ligada à direção de propagação e ao ângulo de incidência. As velocidades para meio infinito são calculadas pelas propriedades dos materiais da seguinte forma:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.22a)$$

e

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.22b)$$

Onde:  $V_p$  e  $V_s$  - velocidades das ondas P e S, respectivamente.

$\lambda$  e  $\mu$  - constantes de Lamé, que relacionam tensões com deformações.

$\rho$  - densidade do material onde a onda propaga-se.

As velocidades de propagação podem ser complexas, quando considerado o efeito do amortecimento.

O número de onda é obtido pela razão da frequência angular do carregamento pela velocidade da onda:

$$k = \frac{\omega}{V} \quad (2.23)$$

Para fins de análise utilizam-se ondas planas, que são uma simplificação das ondas tridimensionais. Considera-se que as ondas variam somente em um plano principal, mas podem provocar movimentos fora desse plano, caso da onda SH.

Os problemas são resolvidos por propagação, reflexão e refração de ondas, observando-se as condições de contorno, relações de tensão-deformação e deformação-deslocamento, além da lei de Snell. Ondas P ou SV incidentes geram ondas P e SV refratadas e refletidas. Já ondas SH só geram ondas SH refratadas e

refletidas. Como a velocidade da onda P é maior que a da onda SV, esta quando incidente, apresenta um ângulo crítico ( $b_c$ ), para o qual não há onda P refletida. Esse ângulo é dado por:

$$b_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{V_S}{V_P}\right) \quad (2.24)$$

e influencia muito na resposta do sistema sujeito a ondas SV incidentes.

Os modelos de simulação do terreno consideram um extrato de solo estratificado em camadas sobre um semi-espaço. As ondas de corpo são consideradas incidindo na interface do semi-espaço com o terreno estratificado, e formulações são feitas para considerar as reflexões e refrações por elas sofridas e que provocam os deslocamentos das camadas. Além das ondas P e S, existem as ondas superficiais que se propagam nas camadas superiores da Terra e que são basicamente derivadas a partir das sucessivas reverberações que as ondas P e S sofrem nessas camadas, Figura 2.3. As ondas superficiais mais conhecidas são as ondas Rayleigh, que movimentam as partículas do meio na forma de elipses retrógradas no plano vertical paralelo à direção de propagação da onda, e as ondas Love, que são semelhantes às ondas SH, porém com maior período de vibração, Figura 2.4. A partir de distâncias maiores que 100 Km as ondas superficiais possuem mais energia que as ondas de volume, por esse motivo são elas que provocam o maior índice de destruição quando alcançam essas distâncias.

### 2.3.

#### Excitação sísmica

Sismo é a liberação instantânea de energia que está acumulada no interior da Terra e que se propaga na forma de ondas elásticas.

Existem vários tipos de sismos, entre os quais pode-se mencionar:

Sismos de origem tectônica: são os associados a falhas tectônicas, que normalmente ocorrem pelo movimento e interação das placas tectônicas. São os mais abundantes e os que provocam as maiores magnitudes, além de ocorrerem a

profundidades muito próximas à superfície da Terra até 600 Km de profundidade. Existem três tipos de falhas tectônicas que podem ser provocadas pelos sismos: falhas de cisalhamento (transcorrente), falhas de extensão (normais) e falhas de compressão (inversas). Normalmente os sismos provocam uma combinação entre a falha transcorrente e uma das outras duas.

Sismos de origem vulcânica: estão associados às erupções vulcânicas, podem atingir grandes magnitudes, porém têm seus focos relativamente superficiais.

Sismos de origem secundária: são provocados normalmente pela acomodação de estratos superficiais, que provocam deslizamentos e afundamentos do solo.

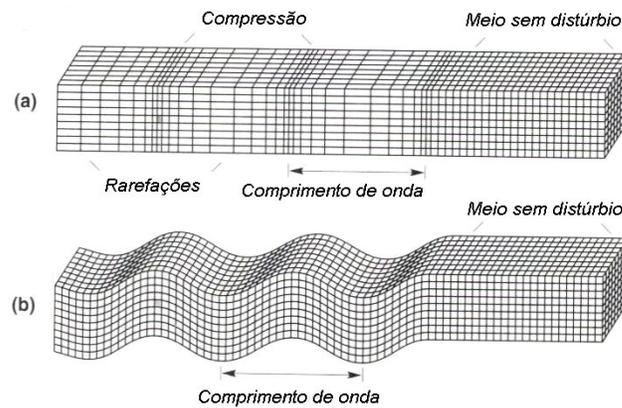
Sismos induzidos: são sismos de origem secundária ou tectônica provocados pela ação do homem, principalmente na construção de reservatórios hidrelétricos ou na injeção de água através de poços profundos, Berrocal, J. (2003).

Quando ocorre um terremoto, ondas de corpo e ondas superficiais são produzidas. As ondas de corpo viajam através do interior da terra e são de dois tipos: ondas P e ondas S.

As ondas P também conhecidas como ondas primárias, compressivas ou longitudinais, envolvem compressão e distensão sucessiva dos materiais por onde passam. São análogas às ondas sonoras. O movimento de uma partícula individual propagando-se através de uma onda P é paralelo à direção de propagação da onda. Essas ondas propagam-se através de sólidos e líquidos.

Já as ondas S, também conhecidas como ondas secundárias, cisalhantes ou transversais, causam deformações de cisalhamento quando viajam através de um material. O movimento de uma partícula individual é perpendicular à direção de propagação da onda S. A direção do movimento da partícula pode dividir a onda S em duas componentes, como já visto; onda SV e onda SH. Fluidos que não têm rigidez ao cisalhamento não comportam ondas S. A Figura 2.3 apresenta as deformações causadas pelas ondas P e SV.

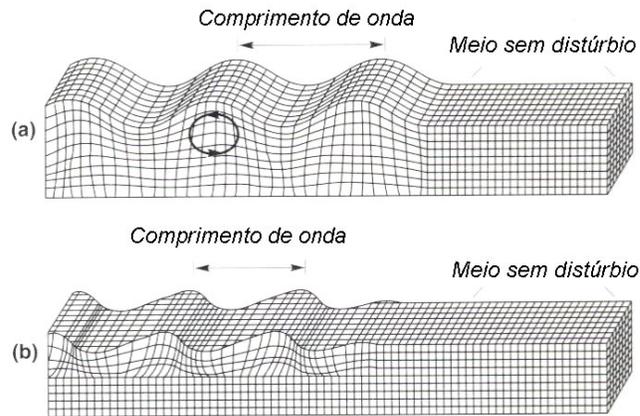
A velocidade de propagação das ondas de corpo varia com a rigidez do material onde elas estão se propagando. Como os materiais geológicos são mais rígidos à compressão, as ondas P propagam-se mais rápido que outras ondas S e são, portanto, as primeiras a chegarem em um sítio particular.



**Figura 2.3** - Deformações produzidas pelas ondas de corpo: (a) ondas P; (b) ondas SV. Fonte: W. H. Freeman and Company, apud Kramer 1996.

As ondas de superfície resultam da interação entre as ondas de corpo e as camadas superficiais da terra. Elas propagam-se ao longo da superfície da terra com amplitudes que decrescem exponencialmente com a profundidade. Devido à natureza da interação requerida para produzi-las, as ondas superficiais são mais proeminentes em distâncias mais afastadas da fonte do terremoto. A distâncias superiores a duas vezes a espessura da crosta terrestre, as ondas superficiais, ao invés de ondas de corpo, produzem picos de movimento do terreno, (Kramer, 1996). Como já mencionado, as ondas superficiais mais importantes para a engenharia de terremotos são as ondas de Rayleigh e as de Love.

As ondas de Rayleigh, produzidas pela interação de ondas P e SV com a superfície da terra, envolvem ambos os movimentos, vertical e horizontal da partícula. As ondas de Love resultam da interação de ondas SH com uma camada superficial flexível e não têm componente vertical de movimento da partícula. A Figura 2.4 apresenta as deformações causadas pelas ondas de Rayleigh e de Love.



**Figura 2.4** - Deformações causadas pelas ondas superficiais: (a) ondas de Rayleigh; (b) ondas de Love. Fonte: W. H. Freeman and Company, apud Kramer 1996.

O programa SASSI considera a excitação sísmica composta por ondas de corpo planas incidindo no topo do semi-espaço, na vertical do ponto de controle, e que podem ser combinadas com ondas superficiais. Dois conjuntos de ondas são possíveis: ondas P ou SV mais R, para respostas no plano vertical; e ondas SH mais L, para resposta fora desse plano.