

## 5 Modelo Proposto

Para o estudo de problemas de inferência em que a informação relevante é escassa, vaga ou conflitante, e de problemas de decisão cujas opções também podem estar incompletas, são necessários modelos de probabilidade imprecisa. A probabilidade imprecisa é um termo genérico para os vários modelos matemáticos ou estatísticos que medem a possibilidade ou incerteza sem probabilidades numéricas exatas [28] [29].

Estes modelos incluem as funções de *belief*, capacidades de Choquet, ordenações de probabilidade comparativa, conjuntos convexos de medidas de probabilidade, probabilidades avaliadas por intervalos, medidas de possibilidade, medidas de *plausibility*, expectativas ou previsões superior e inferior, e medidas fuzzy [30] [31].

No caso dos modelos de probabilidade fuzzy, eles têm se baseado no conhecimento prévio da forma da função de densidade de probabilidade [32] [33] [34]. Nestes casos, os conceitos fuzzy servem para modelar os parâmetros das funções [35 - 44], ou no caso discreto, os valores das probabilidades dos eventos [35] [45]. Mas como estimar probabilidades fuzzy se os dados amostrais forem imprecisos e se, ao mesmo tempo, não se tem conhecimento da forma da função de densidade de probabilidade?

### 5.1. Notação

Para facilitar a compreensão desta seção, a notação utilizada é revista abaixo:

- Uma “barra” é colocada sobre uma letra para simbolizar um conjunto fuzzy ( $\bar{A}$ ,  $\bar{a}$ , etc.).
- Todos os conjuntos fuzzy apresentados a seguir são subconjuntos fuzzy dos números reais.
- Se  $\bar{A}$  é um conjunto fuzzy, então  $\bar{A}(x) \in [0, 1]$  é a função de pertinência de  $\bar{A}$  estimada para um número real  $x$ .

- Um  $\alpha$ -cut de  $\bar{A}$ , escrito como  $\bar{A}[\alpha]$ , é definido como  $\{x \mid \bar{A}(x) \geq \alpha\}$ , para  $0 < \alpha \leq 1$ .
- $\bar{A}[0]$  é definido separadamente como o fechamento da união de todos os  $\bar{A}[\alpha]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Um número fuzzy  $\bar{N}$  é um subconjunto fuzzy dos números reais que satisfaz:

- $\bar{N}(x) = 1$  para algum  $x$ , isto é, ele é normalizado.
- $\bar{N}[\alpha]$  é um intervalo fechado e limitado, para  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Para qualquer número fuzzy  $\bar{N}$ , tem-se  $\bar{N}[\alpha] = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)]$ , para todo  $\alpha$ , descrevendo desta forma os intervalos fechados e limitados em função de  $\alpha$ .

Define-se  $\bar{N} > x$  ( $\bar{N} \geq x$ ) se  $n_1(0) > x$  ( $n_1(0) \geq x$ ) para qualquer número real  $x$ . Da mesma forma é definido  $\bar{N} < x$  ( $\bar{N} \leq x$ ). Assim como  $\bar{A} \geq \bar{B}$  se  $\bar{A}(x) \geq \bar{B}(x)$  para todo  $x$ .

Um número fuzzy triangular  $\bar{T}$  é definido por três números  $a_1 < a_2 < a_3$  cujo gráfico de  $y = \bar{T}(x)$  é um triângulo que tem como base o intervalo  $[a_1, a_3]$  e o vértice em  $x = a_2$  ( $\bar{T}(a_2) = 1$ ). Assim, um número fuzzy triangular é denotado por  $\bar{T} = (a_1/a_2/a_3)$ .

## 5.2. Aritmética Fuzzy com Restrições Indispensáveis

A aritmética fuzzy padrão (seção 3.2.5) não leva em consideração restrições conhecidas quando da sua aplicação. Estas restrições, referenciadas como restrições indispensáveis, representam informação adicional. Quando são ignoradas, como no caso da aritmética fuzzy padrão, os resultados obtidos possuem, em geral, deficiência de informação [46] [47].

No caso deste trabalho, uma restrição indispensável para a aritmética fuzzy vem da teoria da probabilidade. Para qualquer conjunto finito de eventos, é necessário que a soma das probabilidades dos eventos seja sempre 1. Quando probabilidades numéricas são aproximadas por probabilidades fuzzy, que são números fuzzy definidos no intervalo

unitário  $[0, 1]$ , a soma destas probabilidades não é 1 pelas regras da aritmética fuzzy padrão.

Para lidar com probabilidades fuzzy de forma correta, o requisito de que elas sempre adicionam exatamente 1, não importando o quão precisas sejam, deve ser acrescentado à aritmética fuzzy como uma restrição necessária.

### 5.3. Probabilidade Fuzzy

A seguir é descrita a probabilidade fuzzy seguindo os conceitos introduzidos por Buckley [35] [36] [37] [38].

#### 5.3.1. Caso Discreto

Sejam  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto finito e  $P$  uma função de probabilidade definida para todos os subconjuntos de  $X$  :

$$P(\{x_i\}) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 < a_i < 1 \text{ para todo } i \text{ e } \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

$X$  e  $P$  juntos formam uma distribuição de probabilidade discreta. No caso de uma distribuição de probabilidade tradicional, todos os valores de  $a_i$  devem ser conhecidos com exatidão, ou seja, são números *crisp*. Porém, muitas vezes estes valores são estimados ou fornecidos por especialistas, sendo razoável considerar que alguns valores de  $a_i$  são incertos e modelar esta incerteza através de números fuzzy. É importante observar que nem todos os  $a_i$  precisam ser incertos; alguns podem ser conhecidos com exatidão e possuir um valor *crisp*; ainda assim eles serão representados por números fuzzy.

Diferentemente dos trabalhos sobre probabilidades imprecisas que empregam probabilidades de segunda ordem, possibilidades, probabilidades superior e inferior, e outros, na abordagem de Buckley [35] [36] [37] [38] números fuzzy são utilizados para modelar a incerteza em algumas das probabilidades, mas a aritmética fuzzy padrão não é aplicada para combinar as incertezas.

A incerteza está presente em alguns valores de  $a_i$  mas não há incerteza no fato de ser uma distribuição de probabilidade discreta. Logo, são impostas as seguintes restrições aos valores de  $\bar{a}_i$ :

$$\text{Existe } a_i \in \bar{a}_i[\alpha] \text{ tal que } \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

Isto é, pode-se escolher  $a_i$  em  $\bar{a}_i[\alpha]$ , para todo  $\alpha$ , de forma a se obter uma distribuição de probabilidade discreta, ou, de outra forma, quaisquer que sejam os valores de  $a_i$  em  $\bar{a}_i[\alpha]$ , tem-se sempre  $a_1 + \dots + a_n = 1$ . Esta é a base da aritmética fuzzy restrita para este modelo de probabilidade fuzzy.

Seja  $A$  um subconjunto (*crisp*) de  $X$ ; deseja-se calcular  $\bar{P}(A)$ . Supondo  $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , define-se [34]:

$$\bar{P}(A)[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mid \mathbf{S} \right\} \quad (5.1)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$  e onde  $\mathbf{S}$  representa a proposição “ $a_i \in \bar{a}_i[\alpha]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ”. Esta é a aritmética fuzzy restrita deste problema, onde é importante notar que:

- antes de calcular a probabilidade na eq. (5.1), escolhe-se uma distribuição de probabilidade discreta a partir dos  $\alpha$ -cuts.
- $\bar{P}(A)[\alpha]$  não é a soma dos intervalos  $\bar{a}_i[\alpha]$ ,  $1 \leq i \leq k$ ; isto seria aritmética intervalar.
- $\bar{P}(A)$  é um número fuzzy e  $\bar{P}(A)[\alpha]$  são os  $\alpha$ -cuts de  $\bar{P}(A)$ .

A probabilidade fuzzy definida acima possui as seguintes propriedades [34]:

- se  $A \cap B = \emptyset$ , então  $\bar{P}(A) + \bar{P}(B) \supseteq \bar{P}(A \cup B)$ ;
- se  $A \subset B$ ,  $\bar{P}(A)[\alpha] = [p_{a1}(\alpha), p_{a2}(\alpha)]$  e  $\bar{P}(B)[\alpha] = [p_{b1}(\alpha), p_{b2}(\alpha)]$ , então  $p_{a1}(\alpha) \leq p_{b1}(\alpha)$  para  $i = 1, 2$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;

- iii)  $0 \leq \bar{P}(A) \leq 1$  para todo  $A$  com  $\bar{P}(\emptyset) = 0$ ,  $\bar{P}(X) = 1$  (“um” *crisp*);
- iv)  $\bar{P}(A) + \bar{P}(A') \supseteq 1$  (“um” *crisp*), onde  $A'$  é o complemento de  $A$ ;
- v) quando  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $\bar{P}(A \cup B) \subseteq \bar{P}(A) + \bar{P}(B) - \bar{P}(A \cap B)$ .

O exemplo abaixo ilustra como deve ser feito o cálculo das probabilidades fuzzy a partir da eq. (5.1) e da desigualdade da propriedade (i).

Exemplo:

Sejam  $n = 5$ ,  $A = \{x_1, x_2\}$ ,  $B = \{x_4, x_5\}$ ,  $a_i = 0,2$  para  $1 \leq i \leq 5$ . Todas as probabilidades são imprecisas exceto  $a_3$ ; assim, sejam  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = (0,1/0,2/0,3)$ ,  $\bar{a}_3 = 0,2$  e  $\bar{a}_4 = \bar{a}_5 = (0,19/0,2/0,21)$ . Por definição:

$$\begin{aligned} \bar{P}(A)[\alpha] &= \left\{ \sum_{i=1}^2 a_i \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad \sum_{i=1}^5 a_i = 1 \right\} \\ &= \{a_1 + a_2 \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1\} \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} \bar{P}(A)[0] &= \{a_1 + a_2 \mid a_i \in \bar{a}_i[0], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1\} \\ &= [p_{a1}, p_{a2}] \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} p_{a1} &= \min \{a_1 + a_2 \mid \overbrace{\bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0]}^{\min} + \overbrace{\bar{a}_3[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]}^{\max} = 1\} \\ &= \max \{ \min \{a_1[0] + a_2[0]\}; 1 - \max \{\bar{a}_3[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]\} \} \\ &= \max \{0,1 + 0,1; 1 - (0,2 + 0,21 + 0,21)\} \\ &= \max \{0,2; 0,38\} \\ &= 0,38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{a2} &= \max \{a_1 + a_2 \mid \overbrace{\bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0]}^{\max} + \overbrace{\bar{a}_3[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]}^{\min} = 1\} \\ &= \min \{ \max \{a_1[0] + a_2[0]\}; 1 - \min \{\bar{a}_3[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]\} \} \\ &= \min \{0,3 + 0,3; 1 - (0,2 + 0,19 + 0,19)\} \\ &= \min \{0,6; 0,42\} \\ &= 0,42 \end{aligned}$$

e assim:

$$\bar{P}(A)[0] = [p_{a1}, p_{a2}] = [0,38, 0,42]$$

Observe-se que  $\bar{P}(A)[0]$  não é a soma dos intervalos  $\bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] = [0,2, 0,6]$  utilizando aritmética intervalar.

Repetindo o procedimento para calcular  $\bar{P}(B)[0]$ :

$$\begin{aligned}\bar{P}(B)[\alpha] &= \left\{ \sum_{i=4}^5 a_i \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad \sum_{i=1}^5 a_i = 1 \right\} \\ &= \{a_4 + a_5 \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1\}\end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}\bar{P}(B)[0] &= \{a_4 + a_5 \mid a_i \in \bar{a}_i[0], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1\} \\ &= [p_{b1}, p_{b2}]\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}p_{b1} &= \min \{a_4 + a_5 \mid \overbrace{\bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_3[0]}^{\max} + \overbrace{\bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]}^{\min} = 1\} \\ &= \max \{ \min \{ \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0] \}; 1 - \max \{ \bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_3[0] \} \} \\ &= \max \{ 0,19 + 0,19; 1 - (0,3 + 0,3 + 0,2) \} \\ &= \max \{ 0,38; 0,2 \} \\ &= 0,38\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{b2} &= \max \{a_4 + a_5 \mid \overbrace{\bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_3[0]}^{\min} + \overbrace{\bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0]}^{\max} = 1\} \\ &= \min \{ \max \{ \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0] \}; 1 - \min \{ \bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_3[0] \} \} \\ &= \min \{ 0,21 + 0,21; 1 - (0,1 + 0,1 + 0,2) \} \\ &= \min \{ 0,42; 0,6 \} \\ &= 0,42\end{aligned}$$

Resultando em:

$$\bar{P}(B)[0] = [p_{b1}, p_{b2}] = [0,38, 0,42]$$

Repetindo mais uma vez o procedimento para calcular  $\bar{P}(A \cup B)[0]$ :

$$\begin{aligned}\bar{P}(A \cup B)[\alpha] &= \left\{ \sum_{i=1}^5 a_i \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad \sum_{i=1}^5 a_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \mid a_i \in \bar{a}_i[\alpha], \quad 1 \leq i \leq 5, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \right\}\end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}\bar{P}(A \cup B)[0] &= \left\{ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \mid a_1[0] + a_2[0] + a_3[0] + a_4[0] + a_5[0] = 1 \right\} \\ &= [p_{c1}, p_{c2}]\end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}p_{c1} &= \min \left\{ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \mid \overbrace{a_1[0] + a_2[0] + a_4[0] + a_5[0]}^{\min} + \overbrace{a_3[0]}^{\max} = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \min \{ \bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0] \}; 1 - \max \{ \bar{a}_3[0] \} \right\} \\ &= \max \{ 0,1 + 0,1 + 0,19 + 0,19; 1 - 0,2 \} \\ &= \max \{ 0,58; 0,8 \} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{c2} &= \max \left\{ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \mid \overbrace{a_1[0] + a_2[0] + a_4[0] + a_5[0]}^{\max} + \overbrace{a_3[0]}^{\min} = 1 \right\} \\ &= \min \left\{ \max \{ \bar{a}_1[0] + \bar{a}_2[0] + \bar{a}_4[0] + \bar{a}_5[0] \}; 1 - \min \{ \bar{a}_3[0] \} \right\} \\ &= \min \{ 0,3 + 0,3 + 0,21 + 0,21; 1 - 0,2 \} \\ &= \min \{ 1,02; 0,8 \} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

Logo:

$$\bar{P}(A \cup B)[0] = [p_{c1}, p_{c2}] = [0,8, 0,8] = 0,8$$

Verificando desta forma a propriedade (i):

$$\bar{P}(A[0]) + \bar{P}(B)[0] = [0,76, 0,84] \supseteq \bar{P}(A \cup B)[0] = 0,8$$

A média fuzzy é definida por seus  $\alpha$ -cuts:

$$\bar{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^k x_i a_i \mid \mathbf{S} \right\} \quad (5.2)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$  e onde novamente  $\mathbf{S}$  representa a proposição

$$“a_i \in \bar{a}_i[\alpha], 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n a_i = 1”.$$

A variância é por sua vez definida por seus  $\alpha$ -cuts:

$$\bar{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 a_i \mid \mathbf{S}, \mu = \sum_{i=1}^n x_i a_i \right\} \quad (5.3)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Exemplo:

Seja  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  com  $a_0 = a_4 = \frac{1}{16}$ ,  $\bar{a}_1 = \bar{a}_3 = (0,2/0,25/0,3)$  e  $a_2 = \frac{3}{8}$ .

Utilizando-se a eq. (5.2) para calcular a média fuzzy:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}[\alpha] &= \{0 a_0 + 1 \cdot \bar{a}_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot \bar{a}_3 + 4 \cdot a_4 \mid a_0 + \bar{a}_1 + a_2 + \bar{a}_3 + a_4 = 1\} \\ &= \left\{ \bar{a}_1 + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \bar{a}_3 + 4 \cdot \frac{1}{16} \mid \frac{1}{16} + \bar{a}_1 + \frac{3}{8} + \bar{a}_3 + \frac{1}{16} = 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{a}_3 + 1 \mid \bar{a}_1 + \bar{a}_3 + \frac{1}{2} = 1 \right\} \end{aligned}$$

Notando que  $\bar{a}_1 + \bar{a}_3 = \frac{1}{2}$  ( $a_0 + \bar{a}_1 + a_2 + \bar{a}_3 + a_4 = 1$  e  $a_0 + a_2 + a_4 = \frac{1}{2}$ ), ou seja, que

$\bar{a}_3 = \frac{1}{2} - \bar{a}_1$ , e substituindo na equação acima, obtém-se uma função apenas de  $\bar{a}_1$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}[\alpha] &= \bar{a}_1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \bar{a}_1\right) + 1 \\ &= 2,5 - 2 \cdot \bar{a}_1 \\ &= f_1(\bar{a}_1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_1} = -2 < 0$$

e

$$\bar{a}_1 = [0,2 + 0,05\alpha; 0,3 - 0,05\alpha]$$

os limites do intervalo  $\bar{\mu}[\alpha] = [\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)]$  podem ser calculados:

$$\begin{aligned}
\mu_1(\alpha) &= \min\{f_1(\bar{a}_1)\} \\
&= f_1(\max\{\bar{a}_1\}) \\
&= f_1(0,3 - 0,05\alpha) \\
&= 2,5 - 2 \cdot (0,3 - 0,05\alpha) \\
&= 1,9 + 0,1\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(\alpha) &= \max\{f_1(\bar{a}_1)\} \\
&= f_1(\min\{\bar{a}_1\}) \\
&= f_1(0,2 + 0,05\alpha) \\
&= 2,5 - 2 \cdot (0,2 + 0,05\alpha) \\
&= 2,1 - 0,1\alpha
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\bar{\mu}[\alpha] = [1,9 + 0,1\alpha ; 2,1 - 0,1\alpha] = (1,9 / 2 / 2,1)$$

Utilizando-se a eq. (5.3) para calcular a variância fuzzy:

$$\bar{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \frac{1}{16}(0-\mu)^2 + \bar{a}_1(1-\mu)^2 + \frac{3}{8}(2-\mu)^2 + \bar{a}_3(3-\mu)^2 + \frac{1}{16}(4-\mu)^2 \mid a_0 + \bar{a}_1 + a_2 + \bar{a}_3 + a_4 = 1 \right\}$$

Assim como na cálculo de  $\bar{\mu}[\alpha]$ , substitui-se na equação acima  $\bar{a}_3 = \frac{1}{2} - \bar{a}_1$ :

$$\bar{\sigma}^2[\alpha] = \mu^2 - 5\mu + 7 - 8\bar{a}_1 + 4\mu\bar{a}_1$$

Utilizando o resultado da eq. (5.4) e substituindo  $\bar{\mu} = 2,5 - 2\bar{a}_1$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2[\alpha] &= 0,75 + 2\bar{a}_1 - 4\bar{a}_1^2 \\
&= f_2(\bar{a}_1)
\end{aligned}$$

Como:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_1} = 2 - 8\bar{a}_1 = 0 \Rightarrow \bar{a}_1 = 0,25$$

e:

$$\bar{a}_1 = [0,2 + 0,05\alpha ; 0,3 - 0,05\alpha]$$

Os limites do intervalo  $\bar{\sigma}^2[\alpha] = [\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha)]$  podem ser calculados:

$$\begin{aligned}
\mu_1(\alpha) &= \min\{f_2(\bar{a}_1)\} \\
&= f_2(0,2 + 0,05\alpha) \\
&= f_2(0,3 - 0,05\alpha) \\
&= 0,99 + 0,02\alpha - 0,01\alpha^2 \\
\mu_2(\alpha) &= \max\{f_2(\bar{a}_1)\} \\
&= f_2(0,25) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\bar{\sigma}^2[\alpha] = [0,99 + 0,02\alpha - 0,01\alpha^2, 1]$$

A incerteza na variância é que ela pode ser menor do que 1 mas não maior do que 1.

### 5.3.2. Caso Contínuo

Considere-se a função densidade de probabilidade  $y = f(x; \theta)$  onde  $x \in \mathbf{R}$  e  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  para os parâmetros  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Normalmente, estes parâmetros são estimados a partir de amostras aleatórias de uma população. Estas estimativas podem ser um valor pontual ou um intervalo de confiança.

Para obter uma função densidade de probabilidade intervalar, os valores de  $\theta_i$ , ao invés de estimativas com valores pontuais, são substituídos por intervalos de confiança. Generalizando, a incerteza nos valores de  $\theta_i$  é modelada utilizando-se um número fuzzy para  $\theta_i$  e obtendo-se desta forma um função densidade de probabilidade fuzzy. Conseqüentemente,  $\alpha$ -cuts dos números fuzzy produzem as funções de densidade de probabilidade intervalares.

Em primeiro lugar, será visto como manipular uma função densidade de probabilidade uniforme fuzzy, para em seguida estudar o caso da função densidade de probabilidade normal fuzzy.

#### Uniforme Fuzzy

Seja a função de densidade uniforme  $U(a, b)$ ,  $a < b$ , definida por:

$$y = f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.5)$$

Considera-se agora  $U(\bar{a}, \bar{b})$  com números fuzzy  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  no lugar dos parâmetros  $a$  e  $b$ . Vale lembrar que há incerteza nos valores extremos da densidade uniforme mas não no fato de ela ser uma densidade uniforme. Isto quer dizer que, dado qualquer  $s \in \bar{a}[\alpha]$  e  $t \in \bar{b}[\alpha]$ ,  $s < t$ , tem-se  $U(s, t)$ :

$$y = f(x; s, t) = \begin{cases} \frac{1}{t-s}, & s \leq x \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.6)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ . A partir da eq. (5.6) é possível determinar  $\bar{P}[c, d]$ , a probabilidade fuzzy de se obter um valor dentro do intervalo  $[c, d]$ .

Definição:  $L(c, d; s, t)$  é o comprimento do intervalo  $[c, d] \cap [s, t]$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{P}[c, d][\alpha] &= \left\{ \frac{L(c, d; s, t)}{t-s} \mid s \in \bar{a}[\alpha], t \in \bar{b}[\alpha], s < t \right\} \\ &= [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Para calcular os  $\alpha$ -cuts de  $\bar{P}[c, d]$  definidos na eq. (5.7), calcula-se a probabilidade de se ter um valor no intervalo  $[c, d]$  para cada densidade uniforme  $U(s, t)$ , para todo  $s \in \bar{a}[\alpha]$  e todo  $t \in \bar{b}[\alpha]$ , com  $s < t$ .

O exemplo abaixo ilustra como deve ser feito o cálculo das probabilidades fuzzy a partir da eq. (5.7).

Exemplo:

Seja  $\bar{a} = (0/1/2)$ ,  $\bar{b} = (3/4/5)$  e  $[c, d] = [1, 4]$ ; deseja-se calcular a partir da eq. (5.7)  $\bar{P}[c, d][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$  onde:

$$p_1(\alpha) = \min \left\{ \frac{L(1, 4; s, t)}{t-s} \mid s \in \bar{a}[\alpha], t \in \bar{b}[\alpha], s < t \right\}$$

e

$$p_2(\alpha) = \max \left\{ \frac{L(1, 4; s, t)}{t-s} \mid s \in \bar{a}[\alpha], t \in \bar{b}[\alpha], s < t \right\}$$

Levando-se em consideração que  $\bar{a}[\alpha] = [\alpha, 2 - \alpha]$  e  $\bar{b}[\alpha] = [3 + \alpha, 5 - \alpha]$ , existem quatro casos possíveis:

- |      |                            |             |   |                            |              |
|------|----------------------------|-------------|---|----------------------------|--------------|
| i)   | $\alpha \leq s \leq 1$     | (região I)  | e | $3 + \alpha \leq t \leq 4$ | (região III) |
| ii)  | $\alpha \leq s \leq 1$     | (região I)  | e | $4 \leq t \leq 5 - \alpha$ | (região IV)  |
| iii) | $1 \leq s \leq 2 - \alpha$ | (região II) | e | $3 + \alpha \leq t \leq 4$ | (região III) |
| iv)  | $1 \leq s \leq 2 - \alpha$ | (região II) | e | $4 \leq t \leq 5 - \alpha$ | (região IV)  |

Os  $\alpha$ -cuts de  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , o intervalo  $[c, d] = [1, 4]$ , assim como as quatro regiões onde podem se encontrar  $s$  e  $t$  estão ilustrados na Figura 17.

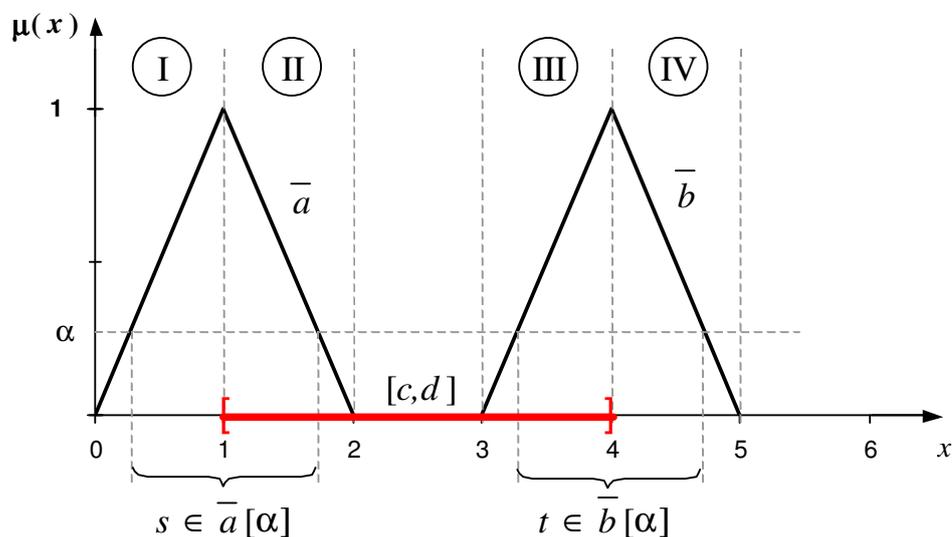


Figura 17 – Elementos de uma densidade de probabilidade uniforme fuzzy

Analisando-se a Figura 17, chega-se à conclusão que  $p_1(\alpha)$  é obtido no caso (ii) com  $s = \alpha \leq 1$  e  $t = 5 - \alpha \geq 4$ , logo:

$$\begin{aligned}
 p_1(\alpha) &= \frac{L(1, 4; s, t)}{t - s} \\
 &= \frac{\text{comprimento } \{[1, 4] \cap [\alpha, 5 - \alpha]\}}{(5 - \alpha) - \alpha} \\
 &= \frac{\text{comprimento } \{[1, 4]\}}{(5 - \alpha) - \alpha} \\
 &= \frac{4 - 1}{5 - 2\alpha} \\
 &= \frac{3}{5 - 2\alpha}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,  $p_2(\alpha)$  é obtido no caso (iii) com  $s = 2 - \alpha \geq 1$  e  $t = 3 + \alpha \leq 4$ , logo:

$$\begin{aligned}
 p_2(\alpha) &= \frac{L(1, 4; s, t)}{t - s} \\
 &= \frac{\text{comprimento } \{[1, 4] \cap [2 - \alpha, 3 + \alpha]\}}{(3 + \alpha) - (2 - \alpha)} \\
 &= \frac{\text{comprimento } \{[2 - \alpha, 3 + \alpha]\}}{3 + \alpha - 2 + \alpha} \\
 &= \frac{3 + \alpha - (2 - \alpha)}{1 + 2\alpha} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Assim, os  $\alpha$ -cuts de  $\bar{P}[1, 4]$  são:

$$\bar{P}[1, 4][\alpha] = \left[ \frac{3}{5 - 2\alpha}, 1 \right]$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Repetindo-se o procedimento, obtém-se:

$$\bar{P}[2, 3][\alpha] = \left[ \frac{1}{5 - 2\alpha}, \frac{1}{1 + 2\alpha} \right]$$

e

$$\bar{P}[0, 5][\alpha] = 1$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

A Figura 18 ilustra os conjuntos (números) fuzzy obtidos para  $\bar{P}[1, 4]$  e  $\bar{P}[2, 3]$ .

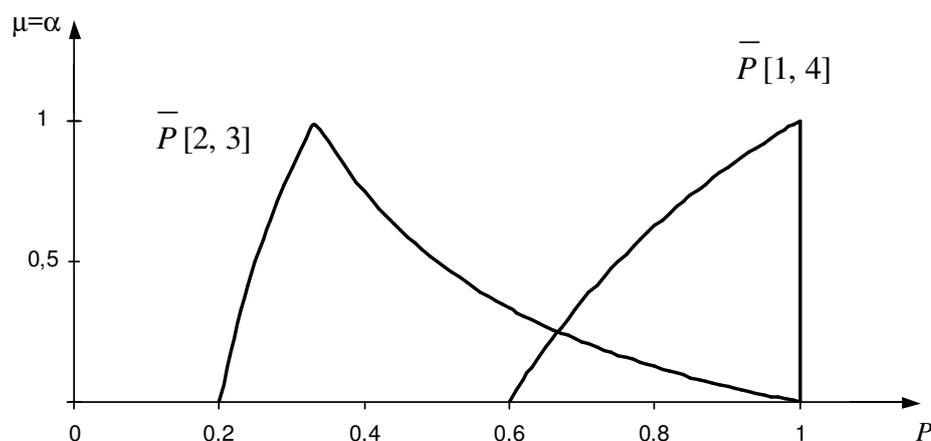


Figura 18 – Probabilidades fuzzy obtidas a partir de uma densidade uniforme fuzzy

Conforme demonstrado em [31], a média fuzzy e a variância fuzzy de uma função densidade de probabilidade uniforme fuzzy  $U(\bar{a}, \bar{b})$  são  $\bar{\mu} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$  e  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{12}$ , respectivamente, e que correspondem à fuzzificação da média crisp  $\mu = \frac{a+b}{2}$  e da variância crisp  $\sigma^2 = \frac{b-a}{12}$ .

### Normal Fuzzy

A partir da função densidade de probabilidade normal  $N(\mu, \sigma^2) = f(x; \mu, \sigma^2)$ , com  $x \in \mathbf{R}$ , média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , é definida a normal fuzzy  $N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$  com números fuzzy  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\sigma}^2 > 0$  no lugar dos parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , respectivamente. Novamente, a incerteza está na média e na variância da densidade normal e não no fato de ela ser uma densidade normal.

Seja  $\bar{P}[c, d]$  a probabilidade fuzzy de se obter um valor no intervalo  $[c, d]$ . Os  $\alpha$ -cuts de  $\bar{P}[c, d]$  são definidos para  $\mu \in \bar{\mu}[\alpha]$  e  $\sigma^2 \in \bar{\sigma}^2[\alpha]$ , com  $z_1 = (c - \mu)/\sigma$  e  $z_2 = (d - \mu)/\sigma$  por:

$$\begin{aligned} \bar{P}[c, d][\alpha] &= \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1) dx \mid \mu \in \bar{\mu}[\alpha], \sigma^2 \in \bar{\sigma}^2[\alpha] \right\} \\ &= [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ , e  $f(x; 0, 1)$  corresponde à densidade normal padrão com média zero e variância unitária.

Em geral é difícil encontrar os valores de  $p_1(\alpha)$  e  $p_2(\alpha)$ , podendo ser necessário o uso de um algoritmo de otimização. Contudo, como o exemplo a seguir mostra, em alguns casos é fácil calcular os  $\alpha$ -cuts.

Exemplo:

Em uma densidade normal cuja média é aproximadamente 10 e a variância aproximadamente 5, estes parâmetros podem ser modelados pelos números fuzzy triangulares  $\bar{\mu} = (8/10/12)$  e  $\bar{\sigma}^2 = (4/5/6)$  respectivamente. Deseja-se calcular, a partir da eq. (5.8)  $\bar{P}[10, 15]$ , a probabilidade fuzzy de se obter um valor no intervalo  $[10, 15]$ . Em particular, deseja-se obter os  $\alpha$ -cuts para  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0$ .

Para  $\alpha=1$ :  $\mu = 10$ ,  $\sigma^2 = 5$ ,  $c = 10$  e  $d = 15$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{10-10}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{15-10}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

logo:

$$\begin{aligned} \bar{P}[c, d][1] &= \left\{ \int_0^{\sqrt{5}} f(x; 0, 1) dx \mid \mu \in \bar{\mu}[1], \sigma^2 \in \bar{\sigma}^2[1] \right\} \\ &\approx 0,4873 \end{aligned}$$

Para  $\alpha=0$ :  $\bar{\mu}[0] = [8, 12]$ ,  $\bar{\sigma}^2[0] = [4, 6]$ ,  $c = 10$  e  $d = 15$

Existem quatro casos extremos possíveis:

$$\text{i) } \mu = 8, \quad \sigma^2 = 4, \quad z_1 = \frac{10-8}{\sqrt{4}} = 1, \quad z_2 = \frac{15-8}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}, \quad \bar{P}[10, 15][0] \approx 0,1584$$

$$\text{ii) } \mu = 12, \quad \sigma^2 = 4, \quad z_1 = \frac{10-12}{\sqrt{4}} = -1, \quad z_2 = \frac{15-12}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}, \quad \bar{P}[10, 15][0] \approx 0,7745$$

$$\text{iii) } \mu = 8, \quad \sigma^2 = 6, \quad z_1 = \frac{10-8}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad z_2 = \frac{15-8}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}, \quad \bar{P}[10, 15][0] \approx 0,2049$$

$$\text{iv) } \mu = 12, \quad \sigma^2 = 6, \quad z_1 = \frac{10-12}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad z_2 = \frac{15-12}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}, \quad \bar{P}[10, 15][0] \approx 0,6825$$

Desta forma:

$$p_1(\alpha) = \min\{\bar{P}[10, 15][0]\} \approx 0,1584 \quad @ \mu = 8, \quad \sigma^2 = 4$$

$$\text{e } p_2(\alpha) = \max\{\bar{P}[10, 15][0]\} \approx 0,7745 \quad @ \mu = 12, \quad \sigma^2 = 4$$

$$\bar{P}[10, 15][0] = [0,1584; 0,7745]$$

Conforme demonstrado em [31],  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\sigma}^2$  são, respectivamente, a média fuzzy e a variância fuzzy de uma função densidade de probabilidade normal fuzzy  $N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ .

### 5.3.3. Representação Gráfica

As funções densidade de probabilidade não fuzzy possuem uma única representação gráfica conforme ilustrado para o caso de uma Normal com média nula e variância unitária,  $f(x; 0, 1)$ , na Figura 19.

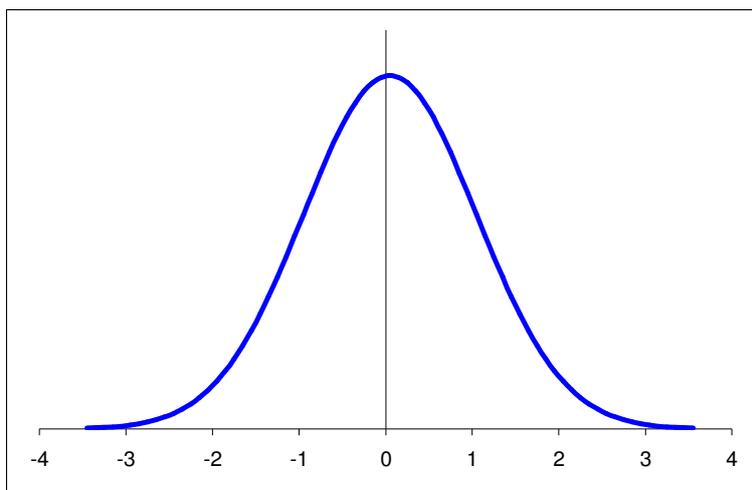


Figura 19 – Representação gráfica de uma Normal de média nula e variância unitária,  $f(x; 0, 1)$

Para o caso das funções densidade de probabilidade fuzzy definidas neste capítulo, segundo a propriedade i) da seção 5.3.1, para dois eventos disjuntos ( $A \cap B = \emptyset$ ) tem-se que:

$$\bar{P}(A) + \bar{P}(B) \supseteq \bar{P}(A \cup B)$$

Esta propriedade enuncia que não é possível obter a probabilidade fuzzy de um evento a partir da soma das probabilidades fuzzy de dois eventos disjuntos. Mais, devido a esta propriedade da probabilidade fuzzy estabelecida por Buckley [35] [36] [37] [38], não é possível obter uma representação gráfica única para a função de densidade de probabilidade fuzzy.

Por exemplo, seja a densidade normal com números fuzzy triangulares  $\bar{\mu} = (8/10/12)$  e  $\bar{\sigma}^2 = (4/5/6)$  para a média e a variância, respectivamente. Para esta função densidade, podem-se calcular as probabilidades fuzzy  $\bar{P}[10,15]$ ,  $\bar{P}[10,12]$ ,  $\bar{P}[12,15]$  e a soma  $\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15]$ . A Tabela 2 apresenta os valores para diferentes  $\alpha$ -cuts das probabilidades fuzzy acima. Observando os valores das duas últimas colunas da Tabela 2, a desigualdade  $\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15] \supseteq \bar{P}[10,15]$  é confirmada. Esta

desigualdade é ilustrada pela Figura 20, onde percebe-se claramente que  $\bar{P}[10,15]$  está contido em  $\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15]$ .

Tabela 2 -  $\alpha$ -cuts das probabilidades fuzzy

$\alpha$	$\bar{P}[10,12]$	$\bar{P}[12,15]$	$\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15]$	$\bar{P}[10,15]$
0	[0,1359; 0,3829]	[0,0225; 0,4332]	[0,1584; 0,8161]	[0,1584; 0,7745]
0,2	[0,1780; 0,3744]	[0,0389; 0,3741]	[0,2168; 0,7485]	[0,2168; 0,7330]
0,4	[0,2179; 0,3665]	[0,0620; 0,3164]	[0,2799; 0,6829]	[0,2821; 0,6813]
0,6	[0,2512; 0,3575]	[0,0924; 0,2674]	[0,3437; 0,6250]	[0,3512; 0,6203]
0,8	[0,2841; 0,3398]	[0,1298; 0,2196]	[0,4139; 0,5594]	[0,4207; 0,5545]
1,0	[0,3145; 0,3145]	[0,1729; 0,1729]	[0,4873; 0,4873]	[0,4873; 0,4873]

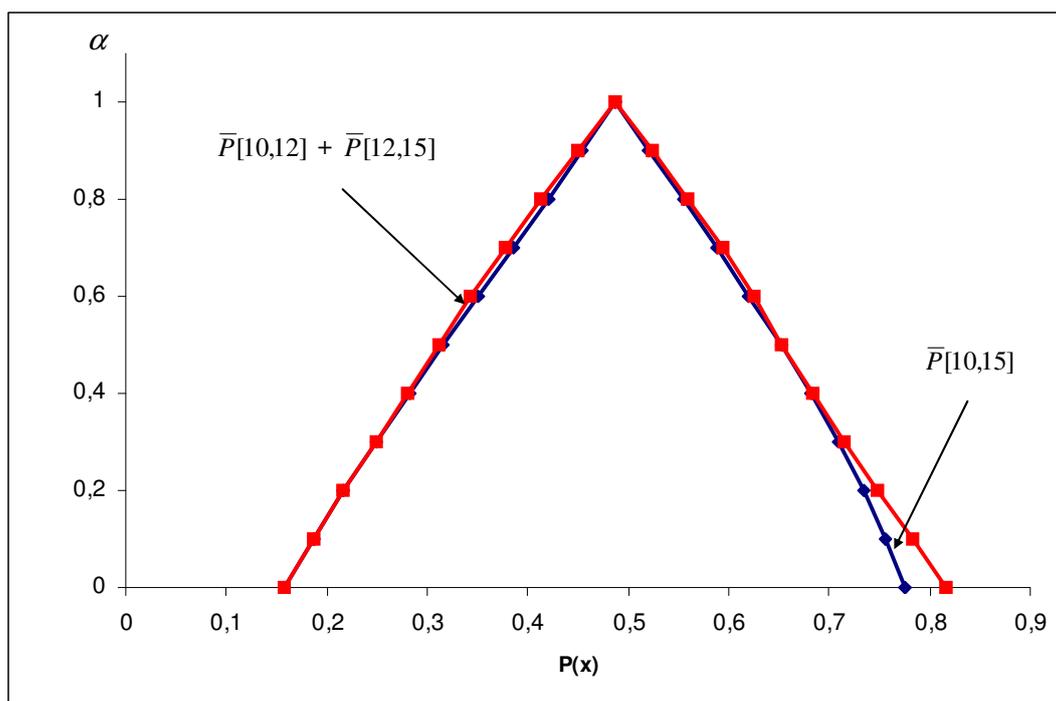


Figura 20 – Ilustração da desigualdade  $\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15] \supseteq \bar{P}[10,15]$

#### 5.4. Modelando a Incerteza de Medição Através de Números Fuzzy

Em [14] e [15], é proposto um método alternativo para a representação sistemática tanto da incerteza quanto da imprecisão de medição. Esta abordagem consiste em representar as medidas por uma família de intervalos de confiança, associados a uma função densidade específica, aninhados em torno de seu valor nominal. Esta transformação corresponde à transformação ótima que permite passar de uma distribuição de probabilidade para um número fuzzy de forma triangular [14]. A Figura 21 apresenta o conjunto de intervalos, para níveis de confiança entre 0 e 1, utilizando uma distribuição normal.

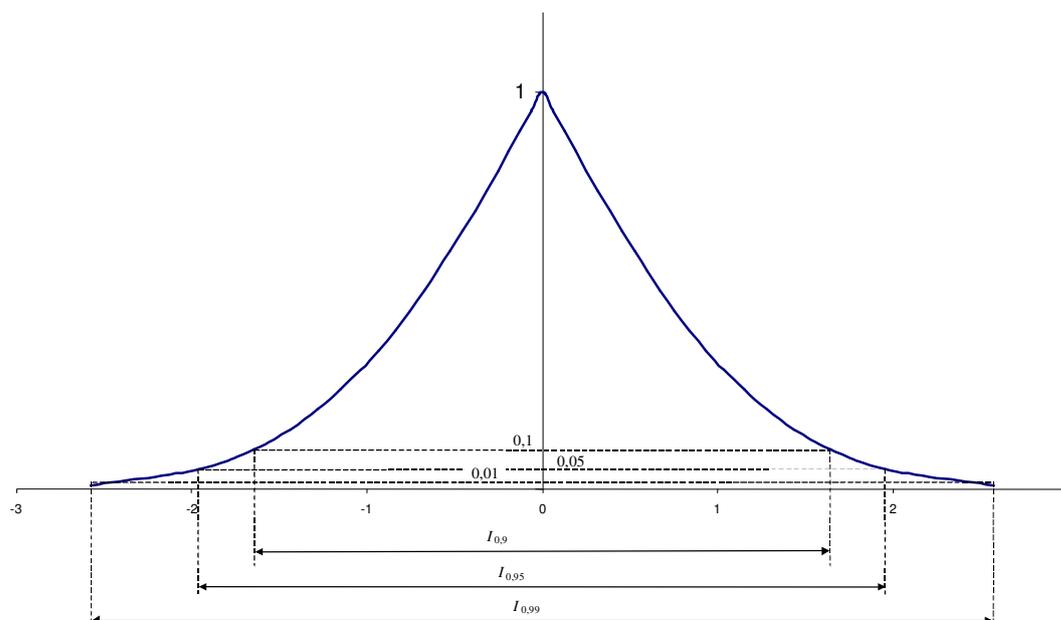


Figura 21 - Conjunto dos intervalos de confiança associados a uma distribuição normal

Foi provado em [16] que um número fuzzy triangular, com moda  $m$  e espalhamento  $\Delta$ , é uma aproximação superior de qualquer função densidade simétrica definida para o intervalo  $[m - \Delta, m + \Delta]$ . Este resultado permite a utilização dos números fuzzy triangulares como uma equivalência fuzzy para a distribuição de probabilidade normal. Como é particularmente difícil obter intervalos de confiança legítimos que correspondam

realmente a níveis de confiança superiores a 99% [13], a base do número fuzzy triangular é limitada ao intervalo de confiança de 99%. A Figura 22 ilustra o número fuzzy triangular correspondente à aproximação superior do conjunto de intervalos de confiança.

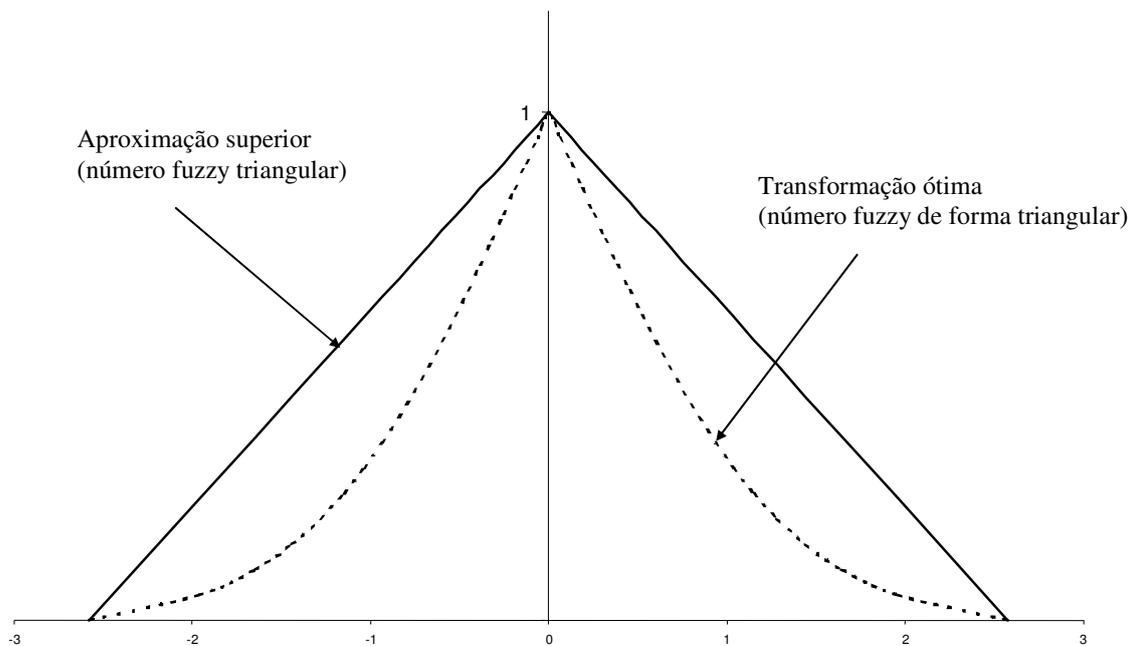


Figura 22 – Aproximação superior do conjunto de intervalos de confiança através de um número fuzzy triangular

### 5.5. Janela de Parzen Fuzzy

Como foi visto na seção 4.4.4, a estimativa por janela de *Parzen* é dada, no caso unidimensional, pela equação abaixo:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] \quad (5.9)$$

que corresponde à soma de  $n$  densidades normais de média  $x_i$  e variância  $h_n^2$ .

Como visto na seção 4.2, a probabilidade de se obter um valor no intervalo  $[c, d]$  é dada pela eq. (4.2), reproduzida a seguir:

$$P[c, d] = \int_c^d f(x) dx \quad (5.10)$$

Assim, substituindo a eq. (5.9) na eq. (5.10), obtém-se, para o caso de uma estimação por janela de *Parzen*, a probabilidade de obter um valor no intervalo  $[c, d]$ :

$$\begin{aligned} P_n[c, d] &= \int_c^d p_n(x) dx \\ &= \int_c^d \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] dx \end{aligned} \quad (5.11)$$

Desenvolvendo a eq. (5.11):

$$\begin{aligned} P_n[c, d] &= \frac{1}{n} \int_c^d \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \int_c^d \sum_{i=1}^n \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \int_c^d \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_c^d \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right] dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como  $f(x) = \frac{1}{h_n \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2h_n^2}\right]$  é a expressão de uma densidade normal de

média  $x_i$  e variância  $h_n^2$ , a eq. (5.12) pode ser escrita como:

$$P_n[c, d] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \quad (5.13)$$

onde  $f(x; 0,1)$  corresponde à densidade normal de média nula e variância unitária; e com

$$z_{1i} = \frac{c-x_i}{h_n} \text{ e } z_{2i} = \frac{d-x_i}{h_n}.$$

A equação acima pode ser interpretada como: a probabilidade de se obter um valor no intervalo  $[c, d]$ , a partir de uma estimativa por janela de *Parzen*, corresponde à soma de  $n$  probabilidades de se obter um valor no intervalo  $[c, d]$  em uma distribuição normal de média  $x_i$  e variância  $h_n^2$ .

E se for considerada incerteza nos valores das amostras? Para isto, os valores  $x_i$  são substituídos pelos números fuzzy  $\bar{x}_i$  ( $\bar{x}_i$  é um número fuzzy que modela a incerteza de medição através da correspondência possibilidade-probabilidade (seção 5.4)). É importante ressaltar que somente  $x_i$  é substituído por um número fuzzy, já que a incerteza está na medida deste valor;  $h_n$ , a largura da janela de *Parzen*, continua sendo um número *crisp*. Caso  $h_n$  fosse substituído por um número fuzzy, a incerteza estaria no limite da janela e não no valor da medida [48].

Utilizando a definição da probabilidade fuzzy para uma distribuição normal apresentada na eq. (5.8) da seção 5.3.2, obtém-se a expressão da probabilidade fuzzy através de uma estimativa por janela de *Parzen*:

$$\begin{aligned} \bar{P}_n[c, d][\alpha] &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha] \right\} \\ &= [p_{n1}(\alpha), p_{n2}(\alpha)] \end{aligned} \quad (5.14)$$

com  $z_{1i} = \frac{c - x_i}{h_n}$  e  $z_{2i} = \frac{d - x_i}{h_n}$  e onde:

$$\begin{aligned} p_{n1}(\alpha) &= \min \{ \bar{P}_n[c, d][\alpha] \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha] \} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha] \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

e

$$\begin{aligned}
 p_{n2}(\alpha) &= \max\{\bar{P}_n[c, d][\alpha] \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha]\} \\
 &= \max\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha]\right\}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Observa-se que as eqs. (5.15) e (5.16) correspondem à minimização e maximização de uma soma de  $n$  elementos positivos, não nulos e independentes entre si; desta forma as equações acima podem ser re-escritas como:

$$p_{n1}(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min\left\{\int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha]\right\} \tag{5.17}$$

e

$$p_{n2}(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\left\{\int_{z_{1i}}^{z_{2i}} f(x; 0,1) dx \mid x_i \in \bar{x}_i[\alpha]\right\} \tag{5.18}$$

## 5.6. Exemplos

O modelo proposto é empregado em dois exemplos para estimar a probabilidade fuzzy a partir de amostras imprecisas. No primeiro exemplo, as amostras são geradas seguindo uma distribuição uniforme; no segundo exemplo, as amostras seguem uma distribuição normal. Nos dois casos, o comportamento do modelo é analisado em função do número de amostras disponíveis e da imprecisão das mesmas. Os resultados obtidos são comparados com as estimativas por janela de *Parzen* quando a incerteza nos valores das amostras é ignorada.

### 5.6.1. Exemplo 1: Amostras de uma Uniforme

Sejam amostras criadas seguindo uma distribuição de probabilidade uniforme no intervalo  $[1, 4]$ :

$$y = f(x;1, 4) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.19)$$

Estas amostras são utilizadas para estimar  $\bar{P}[1, 4]$ , a probabilidade fuzzy de obter um valor no intervalo  $[1, 4]$ . É importante lembrar que a incerteza não está nos limites do intervalo para o qual se deseja estimar a probabilidade, nem na largura da janela do estimador, mas no valor dos dados amostrais. Portanto, são analisados dois casos: amostras com incerteza de 0,5 e amostras com incerteza de 1,0. Os  $\alpha$ -cuts das estimativas obtidas com 100 amostras estão na Tabela 3 e os números fuzzy resultantes estão ilustrados na Figura 23.

Tabela 3 -  $\alpha$ -cuts da estimativas de  $\bar{P}[1, 4]$  a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

$\alpha$	$\bar{P}[1, 4] (I = 1,0)$	$\bar{P}[1, 4] (I = 0,5)$
0	[0,37312; 0,99943]	[0,66197; 0,98764]
0,2	[0,48863; 0,99794]	[0,71725; 0,97938]
0,4	[0,60488; 0,99292]	[0,76957; 0,96711]
0,6	[0,71725; 0,97938]	[0,81766; 0,9498]
0,8	[0,81766; 0,9498]	[0,86034; 0,92654]
1,0	[0,89677; 0,89677]	[0,89677; 0,89677]

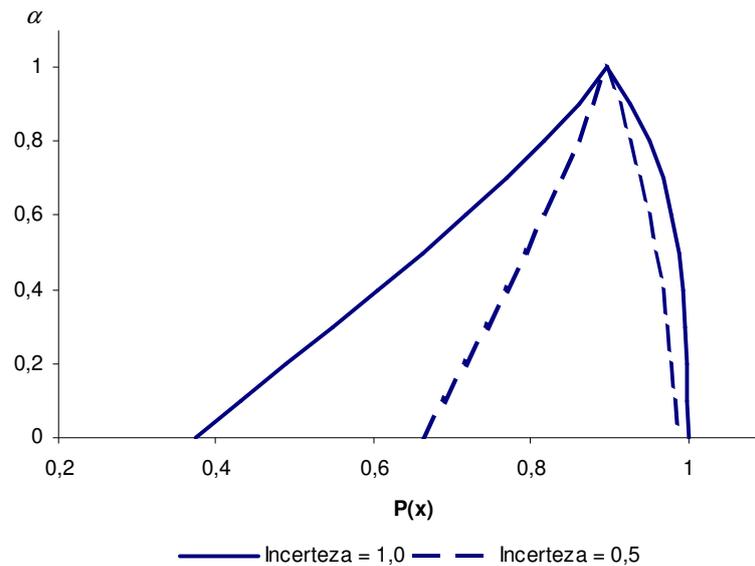


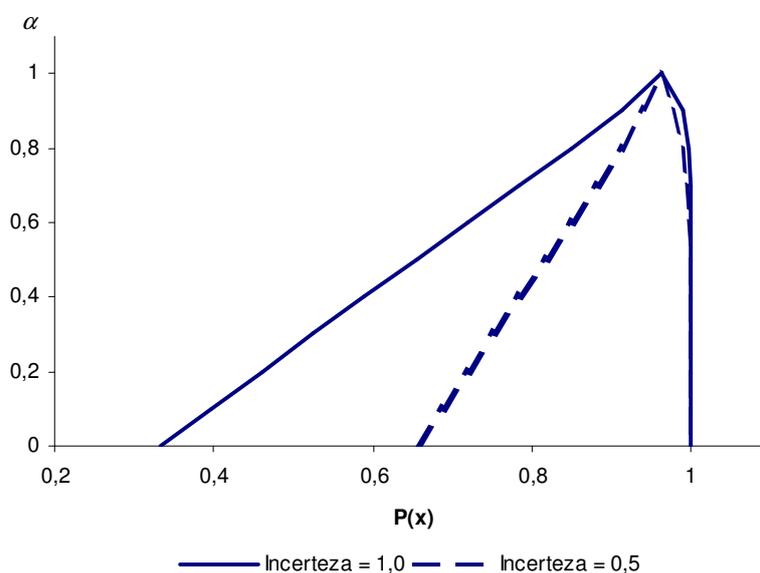
Figura 23 -  $\bar{P}[1, 4]$  estimadas a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

Observa-se que, quando a incerteza nas amostras diminui, o número fuzzy da probabilidade é mais estreito. Ou seja, quanto menor é a incerteza nos valores das amostras, menor é a incerteza no valor da probabilidade de um evento. Além disso, observa-se que o valor das duas estimativas é o mesmo para  $\alpha = 1$ , e este valor corresponde ao valor da estimativa por janela de *Parzen* se as incertezas nas amostras forem ignoradas.

Além disso, conforme foi discutido em 4.4.4, a qualidade de uma estimativa aumenta com o número de amostras utilizado. Os valores dos  $\alpha$ -cuts das estimativas de  $\bar{P}[1, 4]$  a partir de 1000 amostras com 0,5 e 1,0 de incerteza estão na Tabela 4. Os respectivos números fuzzy estão ilustrados na Figura 24.

Tabela 4 -  $\alpha$ -cuts da estimativas de  $\bar{P}[1, 4]$  a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

$\alpha$	$\bar{P}[1, 4] (I = 1,0)$	$\bar{P}[1, 4] (I = 0,5)$
0	[0,33197; 1]	[0,65398; 1]
0,2	[0,46103; 1]	[0,71878; 0,99998]
0,4	[0,58851; 1]	[0,78339; 0,99971]
0,6	[0,71878; 0,99998]	[0,8495; 0,99763]
0,8	[0,8495; 0,99763]	[0,91277; 0,98815]
1,0	[0,9615; 0,9615]	[0,9615; 0,9615]

Figura 24 -  $\bar{P}[1, 4]$  estimadas a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

O mesmo comportamento em função da variação da incerteza dos valores das amostras é observado quando o número de amostras aumenta. Além disso, assim como no caso com 100 amostras, o valor das duas estimativas é o mesmo para  $\alpha = 1$  e corresponde ao valor da estimativa por janela de *Parzen* se as incertezas nas amostras forem ignoradas.

A probabilidade de obter um valor no intervalo  $[1, 4]$  para a função densidade de probabilidade definida na eq. (5.19) é:  $P[1, 4] = 1$ . A Tabela 5 apresenta a evolução das estimativas obtidas em função do número de amostras quando  $\alpha = 1$ .

Tabela 5 – Evolução da estimativa em função do número de amostras (exemplo 1)

	100 amostras	1000 amostras	$P[1, 4]$
$\bar{P}[1, 4]_{[1]}$	0,89677	0,9615	1

Observa-se que, quando o número de amostras aumenta, o valor da estimativa  $\bar{P}[1, 4]_{[1]}$  se aproxima do valor de  $P[1, 4]$ .

### 5.6.2. Exemplo 2: Amostras de uma Normal

Sejam amostras criadas seguindo uma distribuição de probabilidade normal de média  $\mu = 10$  e variância  $\sigma^2 = 5$ .

Estas amostras são utilizadas para estimar  $\bar{P}[10, 15]$ , a probabilidade fuzzy de obter um valor no intervalo  $[10, 15]$ . Novamente, é importante lembrar que a incerteza não está nos limites do intervalo para o qual se deseja estimar a probabilidade, nem na largura da janela do estimador, mas no valor dos dados amostrais. Assim como no exemplo anterior, são analisados dois casos: amostras com incerteza de 0,5 e amostras com incerteza de 1,0. Os  $\alpha$ -cuts das estimativas obtidas com 100 amostras estão na Tabela 6 e os números fuzzy resultantes estão ilustrados na Figura 25.

Tabela 6 -  $\alpha$ -cuts da estimativas de  $\bar{P}[10, 15]$  a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

$\alpha$	$\bar{P}[10, 15] (I = 1,0)$	$\bar{P}[10, 15] (I = 0,5)$
0	[0,31721; 0,71285]	[0,44044; 0,63911]
0,2	[0,36772; 0,68371]	[0,46388; 0,62338]
0,4	[0,4166; 0,65428]	[0,48684; 0,60689]
0,6	[0,46388; 0,62338]	[0,5092; 0,58946]
0,8	[0,5092; 0,58946]	[0,53077; 0,57098]
1,0	[0,55141; 0,55141]	[0,55141; 0,55141]

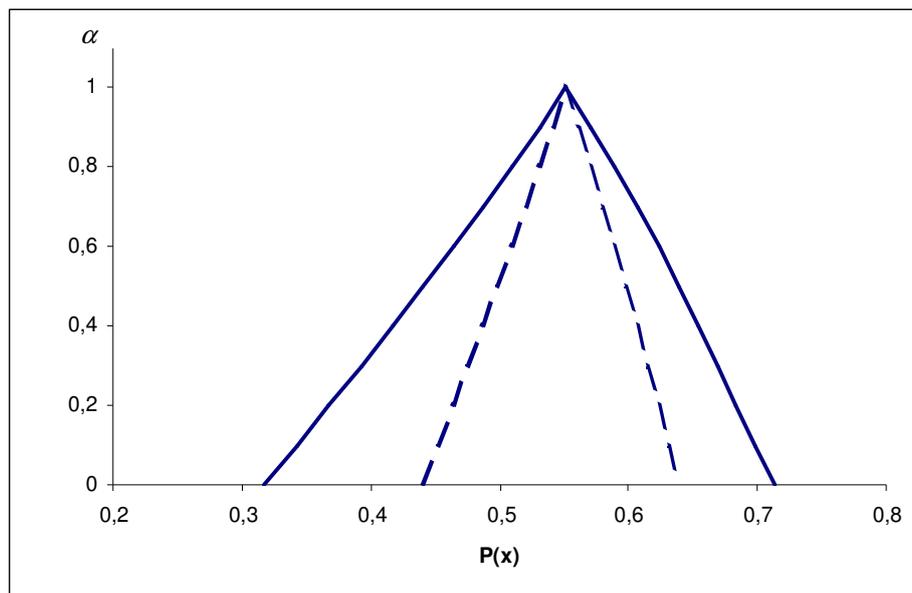


Figura 25 -  $\bar{P}[10, 15]$  estimadas a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

Assim como no exemplo com amostras geradas a partir de uma uniforme, o comportamento da estimativa da probabilidade fuzzy é analisado quando o número de amostras aumenta. Os valores dos  $\alpha$ -cuts das estimativas de  $\bar{P}[10, 15]$  a partir de 1000 amostras com 0,5 e 1,0 de incerteza estão na Tabela 7. Os respectivos números fuzzy estão ilustrados na Figura 26.

Tabela 7 -  $\alpha$ -cuts da estimativas de  $\bar{P}[10, 15]$  a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

$\alpha$	$\bar{P}[10, 15]$ ( $I = 1,0$ )	$\bar{P}[10, 15]$ ( $I = 0,5$ )
0	[0,27736; 0,63789]	[0,38654; 0,55948]
0,2	[0,3211; 0,60808]	[0,40786; 0,54421]
0,4	[0,36519; 0,57522]	[0,42796; 0,52889]
0,6	[0,40786; 0,54421]	[0,4459; 0,51292]
0,8	[0,4459; 0,51292]	[0,46247; 0,49608]
1,0	[0,47904; 0,47904]	[0,47904; 0,47904]

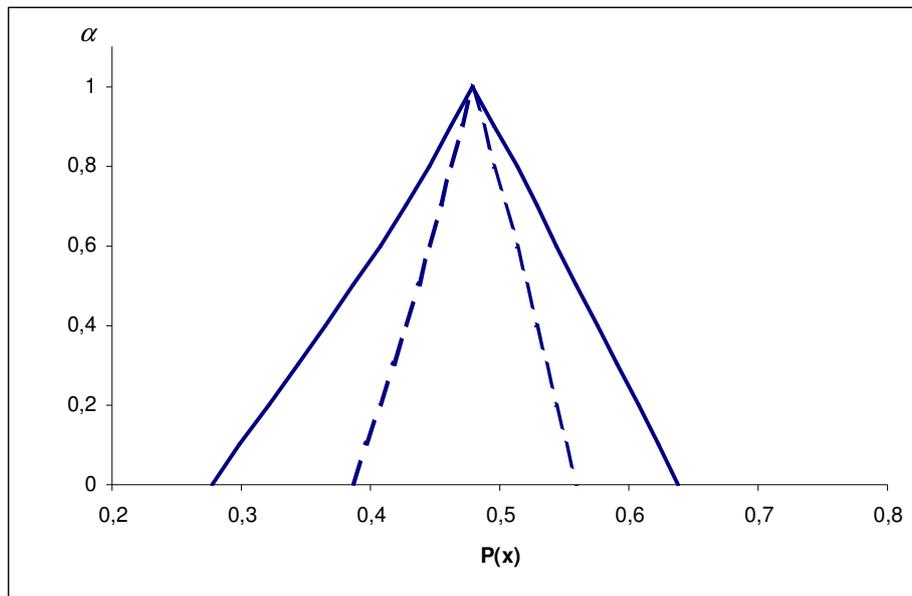


Figura 26 -  $\bar{P}[10, 15]$  estimadas a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0

Assim como no exemplo anterior, observa-se que quanto menor é a incerteza nos valores das amostras, menor é a incerteza no valor da probabilidade de um evento. Além disso, observa-se que o valor das duas estimativas é o mesmo para  $\alpha = 1$ , e este valor corresponde ao valor da estimativa por janela de *Parzen* se as incertezas nas amostras forem ignoradas. Esta observação é verdadeira tanto para a estimação com 100 amostras quanto para a estimação com 1000 amostras.

A probabilidade de se obter um valor no intervalo  $[10, 15]$  para uma função densidade de probabilidade normal de média  $\mu = 10$  e variância  $\sigma^2 = 5$  é:

$$P[10,15] = \left\{ \int_0^{\sqrt{5}} f(x; 0, 1) dx \right\}$$

$$\approx 0,4873$$

A Tabela 8 apresenta a evolução das estimativas obtidas em função do número de amostras quando  $\alpha = 1$ .

Tabela 8 - Evolução da estimativa em função do número de amostras (exemplo 2)

	100 amostras	1000 amostras	$P[10, 15]$
$\bar{P}[10, 15]_{[1]}$	0,55141	0,47904	0,4873

Assim como no exemplo anterior, observa-se que quando o número de amostras aumenta, o valor da estimativa  $\bar{P}[10, 15]_{[1]}$  se aproxima do valor de  $P[10, 15]$ .

Portanto, através destes dois exemplos, nota-se que as estimativas fornecidas pelo modelo proposto têm o mesmo comportamento que as estimativas através de uma janela de *Parzen*, isto é, o valor da estimativa se aproxima do valor teórico quando o número de amostras aumenta. Além do mais, quando  $\alpha = 1$ , o valor da estimativa do modelo proposto corresponde ao valor da estimativa obtido pela janela de *Parzen*. Desta forma, o modelo proposto resulta em um modelo generalizado de estimação por janela de *Parzen* a partir de dados imprecisos.

Os dois exemplos acima também permitem observar um comportamento esperado: quando a incerteza de medição das amostras diminui, o suporte do número fuzzy que modela a probabilidade imprecisa também diminui. Ou seja, amostras com grande incerteza de medição levam à probabilidades com grande imprecisão.