3 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Apresentam-se aqui alguns conceitos da teoria de conjuntos *fuzzy* que serão necessários para o desenvolvimento e compreensão do modelo proposto (capítulo 5).

A teoria de conjuntos fuzzy é eficiente para modelar a incerteza na definição de parâmetros e tem resultados nas mais variadas aplicações [17] [18] [19]. Esta teoria, que considera a subjetividade e a experiência dos profissionais, é capaz de capturar informações imprecisas, descritas em linguagem natural, e convertê-las para um formato numérico, visando efetuar um raciocínio aproximado, com proposições imprecisas, através de conjuntos fuzzy.

O conceito de conjuntos fuzzy foi inicialmente introduzido por Zadeh [20] quando ele observou a impossibilidade de modelar sistemas com fronteiras mal definidas segundo as abordagens matemáticas rígidas e precisas dos métodos clássicos, como, por exemplo, a teoria da probabilidade.

3.1. Conceitos de Lógica Fuzzy

3.1.1. Conjuntos Fuzzy

Um conjunto fuzzy é definido por uma função chamada de **função de pertinência**. Cada função de pertinência define um conjunto fuzzy, A, do conjunto universal, U, através da atribuição de um grau de pertinência, $\mu_A(x)$, entre 0 e 1 para cada elemento x de U. Este é o grau com o qual x pertence a A:

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1] \tag{3.1}$$

Um conjunto fuzzy pode ser interpretado como a ponte que liga o conceito impreciso à sua modelagem numérica, atribuindo-se a cada indivíduo no universo um valor entre 0 e 1, que representa o grau de pertinência deste indivíduo ao conjunto fuzzy.

Um conjunto fuzzy é dito normalizado se o valor máximo (ou supremum) é 1:

$$\sup_{x \in U} \mu_A(x) = 1 \tag{3.2}$$

Um conjunto fuzzy que não é normal é chamado de subnormal. Duas características importantes de conjuntos fuzzy são:

- O **suporte** de *A*: é a parte de U sobre a qual a função de pertinência de *A* não é nula. A sua notação é supp(A) e verifica:

$$\text{supp}(A) = \{x \in U \,/\, \mu_A(x) \neq 0)\} \tag{3.3}$$

- O **núcleo** de *A*: ele não é vazio na condição de que o conjunto fuzzy *A* seja normalizado. A sua notação é nuc(A) e verifica:

$$\text{nuc}(A) = \{x \in U \,/\, \mu_A(x) = 1)\} \tag{3.4}$$

Uma propriedade importante dos conjuntos fuzzy é a sua habilidade de expressar transições graduais de pertinência para não-pertinência. Isto permite a captura, pelo menos de forma grosseira, do sentido de expressões em linguagem natural que são na maioria das vezes vagas. Conjuntos *crisp* são inadequados para este fim.

A Figura 4 ilustra as componentes de um conjunto fuzzy [17] [19] [21].

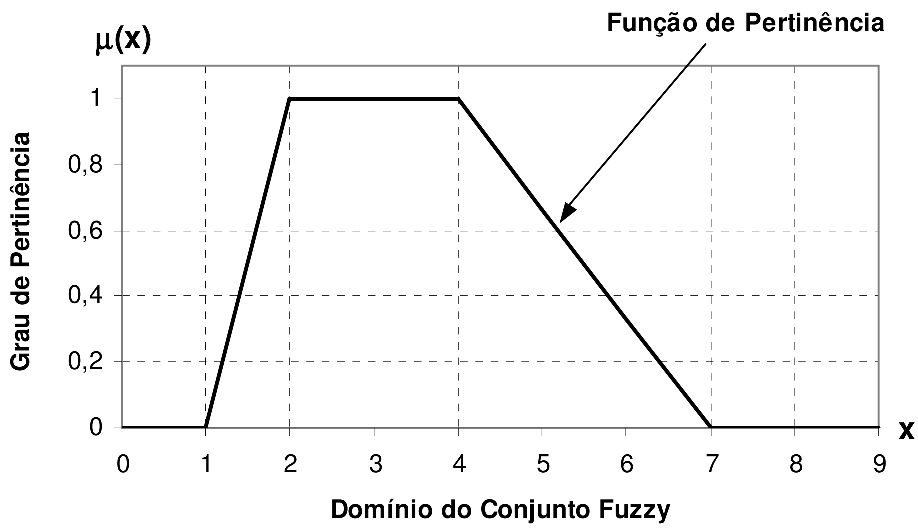


Figura 4 – Componentes de um Conjunto Fuzzy

3.1.2. Conjunto Singleton

Um conjunto fuzzy é chamado de singleton se seu suporte é um único ponto em U e com de grau de pertinência igual a 1, $\mu(x) = 1$.

A Figura 5 ilustra um conjunto singleton de domínio 4.

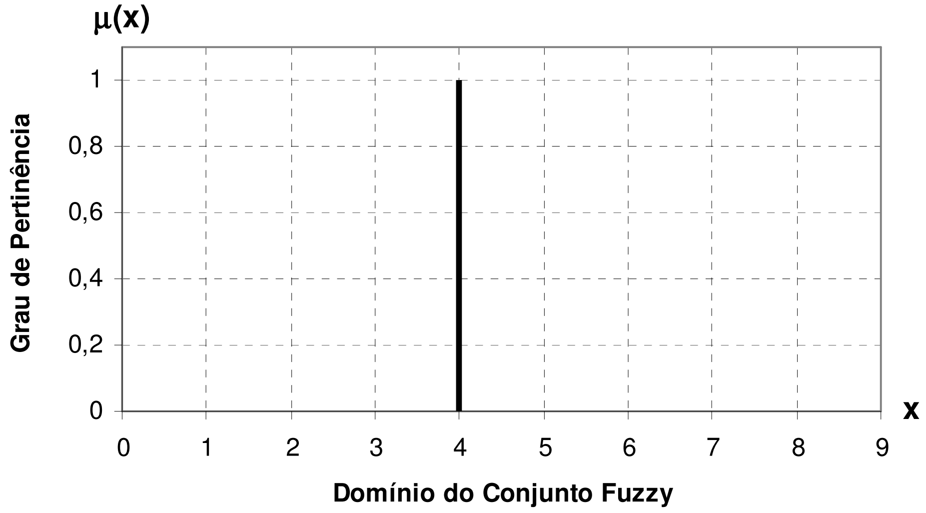


Figura 5 – Exemplo de um Conjunto Singleton

3.1.3. Conjunto α-cut

Para todo valor α do intervalo [0,1], é definido o α-cut A_α (ou corte no nível α) de um conjunto fuzzy *A* de U como o sub-conjunto:

$$A_\alpha = \{x \in U \,/\, \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{3.5}$$

O α-cut pode ser interpretado como o conjunto fuzzy que apresenta uma restrição ou um limite imposto ao domínio do conjunto baseado no valor do α. Assim, o conjunto resultante contém todos os elementos do domínio que possuem um grau de pertinência, $\mu(x)$ superior ou igual ao valor de α.

Qualquer conjunto fuzzy *A* forma uma família aninhada (*nested family)* de conjuntos, isto é:

$$A_\alpha \subset A_\beta \text{ quando } \alpha > \beta \tag{3.6}$$

A Figura 6 ilustra um conjunto α-cut com α = 0,2.

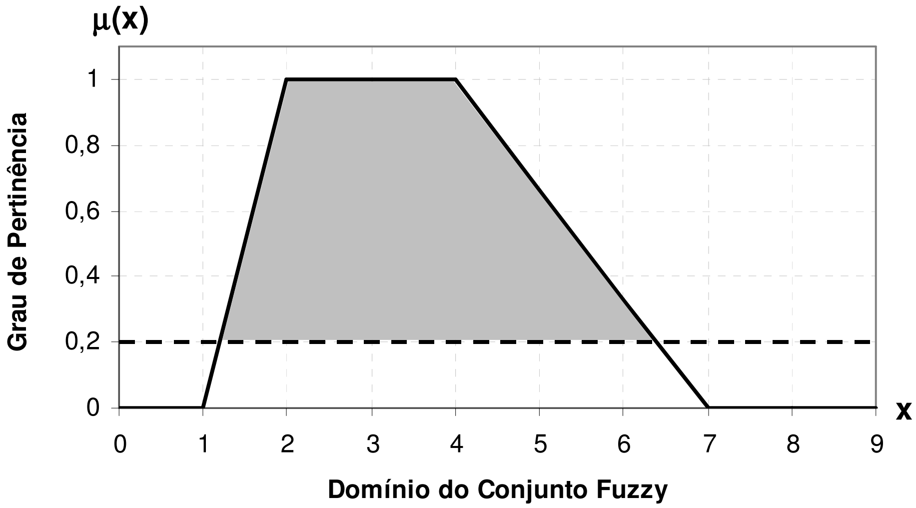


Figura 6 – Exemplo de Conjunto α-Cut

3.2. Conceitos de Números Fuzzy

3.2.1. Intervalos

Quando um intervalo é definido a partir de um número real R, este intervalo é chamado de um subconjunto de R. Por exemplo, se um intervalo é denotado como $A = [a_1, a_3]$, $a_1, a_3 \in R$, $a_1 < a_3$, pode-se interpretá-lo como um tipo de conjunto. Um intervalo também pode ser expresso através de uma função de pertinência (Figura 7):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ 1, & a_1 \le x \le a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases} \tag{3.7}$$

Se $a_1 = a_3$, este indica um ponto, ou seja, $[a_1, a_1] = a_1$

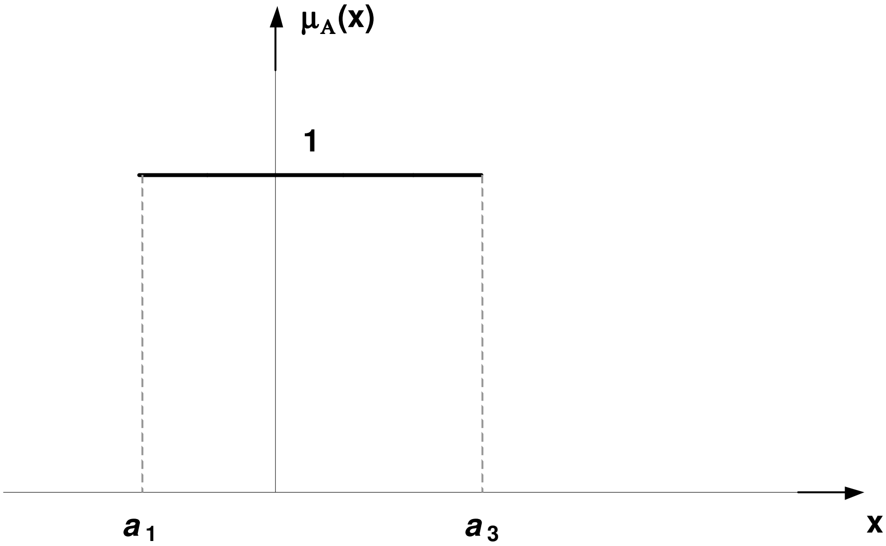


Figura 7 – Exemplo de Intervalo com A = [a_1, a_3]

3.2.2. Número Fuzzy

O número fuzzy é um caso especial de conjunto fuzzy que define um intervalo fuzzy nos números reais, R. Para um número real cujo valor preciso não é conhecido com exatidão, este número é definido através de um intervalo fuzzy. Um intervalo fuzzy é geralmente representado por dois pontos extremos a_1 e a_3 (um valor mínimo e um valor máximo) e um ponto médio a_2 (o valor mais possível) como (a_1, a_2, a_3), também ilustrado na Figura 8.

Sendo os números fuzzy mais comuns os triangulares e os trapezoidais, os graus de pertinência formam funções com equações simples.

A operação de α-cut também pode ser aplicada a números fuzzy. Denotando-se como A_α o intervalo α-cut de um número fuzzy A, este intervalo é definido como:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] \tag{3.8}$$

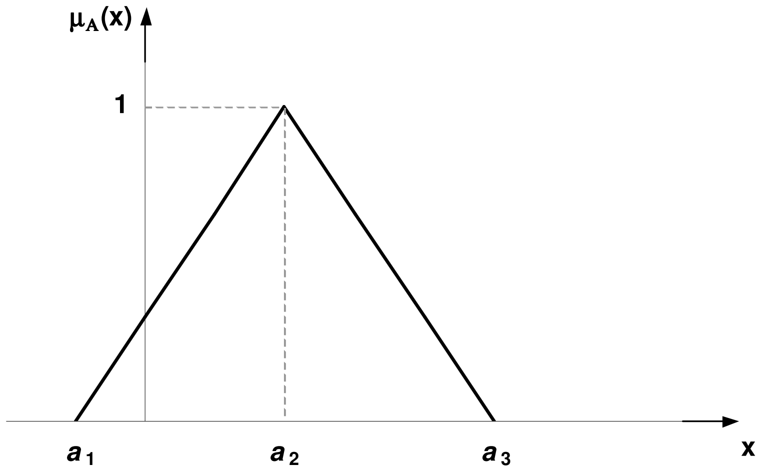


Figura 8 – Ilustração gráfica do número fuzzy $A = (a_1, a_2, a_3)$

É também possível estabelecer qualquer intervalo *crisp* dentro de um número fuzzy associado a um α-cut qualquer, como ilustrado na Figura 9.

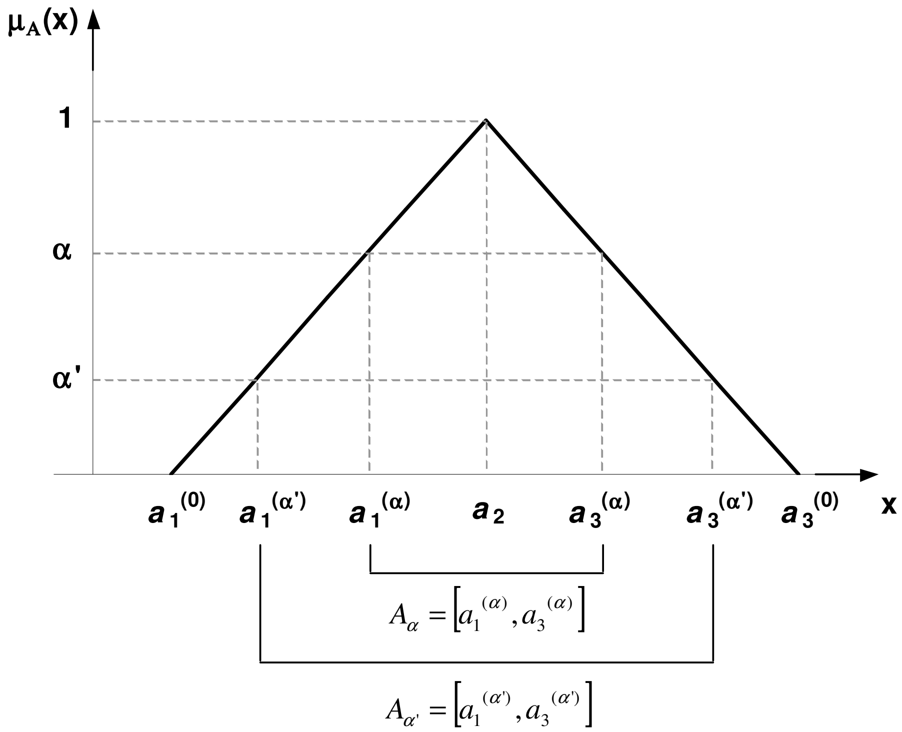


Figura 9 - α-cut de um número fuzzy: α' < α → $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$

Para que um conjunto fuzzy seja definido como um número fuzzy, este deve obedecer às seguintes condições:

- Estar definido nos números reais;
- A função de pertinência deve ser contínua;
- O conjunto fuzzy deve ser normalizado;
- O conjunto fuzzy deve ser convexo.

Logo, um número fuzzy deve ser normalizado e convexo. A condição de normalização implica que o valor máximo do grau de pertinência é 1, conforme a eq. (3.9):

$$\exists x \in R, \qquad \mu_A(x) = 1 \tag{3.9}$$

A condição de convexidade significa que a linha traçada por um α-cut é contínua e o intervalo α-cut satisfaz às seguintes relações:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] \tag{3.10}$$

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_1^{(\alpha)},\ a_3^{(\alpha')} \geq a_3^{(\alpha)}) \tag{3.11}$$

A condição de convexidade também pode ser escrita como na eq. (3.12):

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow A_\alpha \subset A_{\alpha'} \tag{3.12}$$

3.2.3. Número Fuzzy Triangular

Dentre as diversas formas de números fuzzy, o número fuzzy triangular é o mais utilizado. É representado por três pontos e expresso por $A = (a_1, a_2, a_3)$. Esta representação é interpretada como funções de pertinência, eq. (3.13).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x > a_3 \end{cases} \tag{3.13}$$

A Figura 10 ilustra um número fuzzy triangular: no eixo x estão os valores da variável, a_1, a_2 e a_3; no eixo y está representado o grau de pertinência para cada valor de x. O número fuzzy triangular é utilizado quando o parâmetro em análise possui uma faixa de variação e um número dentro desta faixa possui uma possibilidade de ocorrência num único pico maior do que os outros.

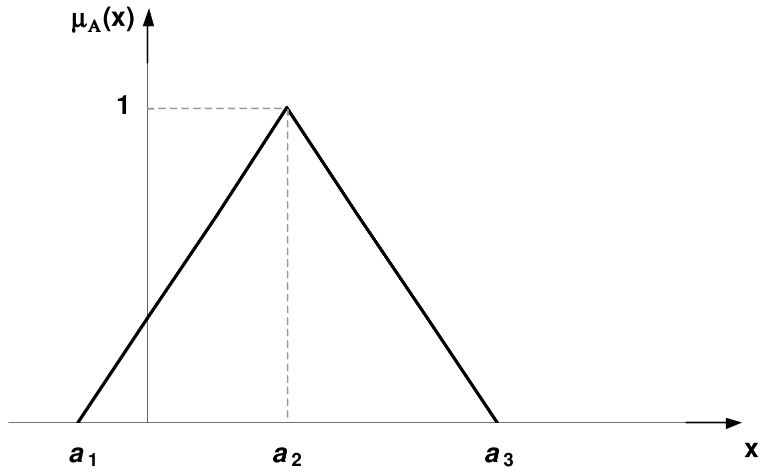


Figura 10 – Número fuzzy triangular $A = (a_1, a_2, a_3)$

A este número fuzzy triangular é aplicada uma operação de α-cut. Seja A_α um intervalo crisp de um número fuzzy triangular, obtido através de uma operação de α-cut, $\forall \alpha \in [0,1]$. Da eq. (3.13) obtêm-se:

$$\frac{a_1^{(\alpha)} - a_1}{a_2 - a_1} = \alpha, \quad \frac{a_3 - a_3^{(\alpha)}}{a_3 - a_2} = \alpha$$

Assim:

$$a_1^{(\alpha)} = (a_2 - a_1)\alpha + a_1,$$
$$a_3^{(\alpha)} = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$$

Logo:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] = \left[(a_2 - a_1)\alpha + a_1,\ -(a_3 - a_2)\alpha + a_3\right] \quad (3.14)$$

A seguir é apresentado um exemplo para ilustrar o intervalo α-cut ou intervalo possibilístico.

<u>Exemplo</u>: seja o número fuzzy triangular $A = (-5, -1, 1)$ mostrado na Figura 11, onde a função de pertinência é dada pela eq. (3.15) abaixo:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \dfrac{x+5}{4}, & -5 \le x \le -1 \\ \dfrac{1-x}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \tag{3.15}$$

Analiticamente o intervalo α-cut deste número fuzzy é:

$$\frac{x+5}{4} = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = 4\alpha - 5$$

$$\frac{1-x}{2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = -2\alpha + 1$$

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] = \left[4\alpha - 5,\ -2\alpha + 1\right] \tag{3.16}$$

Se α = 0,5, a partir da eq. (3.16) obtém-se $A_{0,5}$:

$$A_{0,5} = \left[a_1^{(0,5)}, a_3^{(0,5)}\right] = \left[-3,\ 0\right]$$

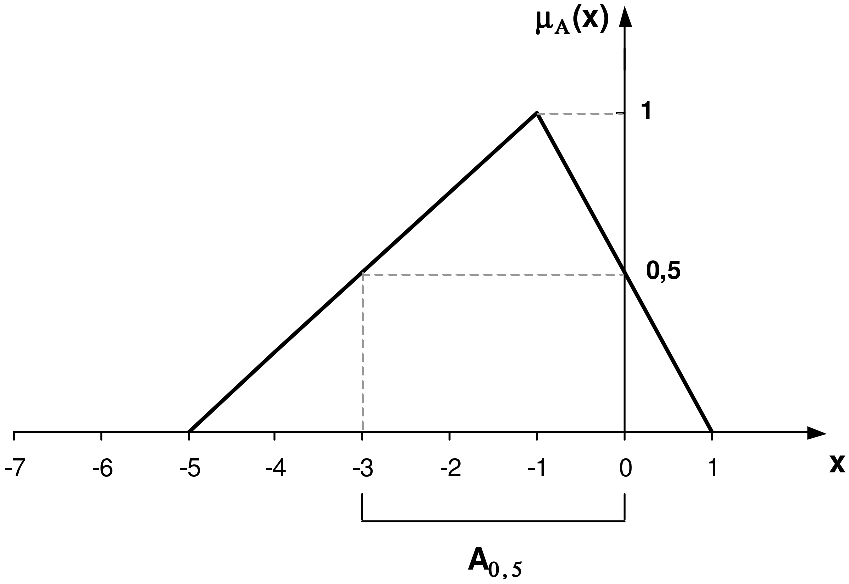


Figura 11 – Intervalo α = 0,5 cut do número fuzzy triangular *A* = (-5, -1, 1)

3.2.4. Aritmética de Intervalos

Operações com números fuzzy podem ser generalizadas a partir das operações de intervalos *crisp*. A seguir são apresentadas brevemente as definições das principais operações intervalares, considerando A e B como números expressos como intervalos [22], [23], [24], de modo que:

$$\forall a_1, a_3, b_1, b_3 \in R$$

$$A = [a_1, a_3], \quad B = [b_1, b_3]$$

i) **Adição**: a adição de dois intervalos definidos nos números reais é, eq. (3.17):

$$A + B = [a_1, a_3]\,(+)\,[b_1, b_3] = [a_1 + b_1,\ a_3 + b_3] \tag{3.17}$$

ii) **Subtração**:

$$A - B = [a_1, a_3]\,(-)\,[b_1, b_3] = [a_1 - b_3,\ a_3 - b_1] \tag{3.18}$$

iii) **Multiplicação**:

$$A \bullet B = [a_1, a_3]\,(\bullet)\,[b_1, b_3]$$

$$A \bullet B = [a_1 \bullet b_1 \wedge a_1 \bullet b_3 \wedge a_3 \bullet b_1 \wedge a_3 \bullet b_3,\ a_1 \bullet b_1 \vee a_1 \bullet b_3 \vee a_3 \bullet b_1 \vee a_3 \bullet b_3]$$

isto é:

$$A \bullet B = [\min\{a_1 \bullet b_1, a_1 \bullet b_3, a_3 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3\},\ \max\{a_1 \bullet b_1, a_1 \bullet b_3, a_3 \bullet b_1, a_3 \bullet b_3\}] \tag{3.19}$$

iv) **Divisão**:

$$A / B = [a_1, a_3]\,(/)\,[b_1, b_3]$$

$$A / B = [a_1 / b_1 \wedge a_1 / b_3 \wedge a_3 / b_1 \wedge a_3 / b_3,\ a_1 / b_1 \vee a_1 / b_3 \vee a_3 / b_1 \vee a_3 / b_3]$$

isto é:

$$A / B = [\min\{a_1 / b_1, a_1 / b_3, a_3 / b_1, a_3 / b_3\},\ \max\{a_1 / b_1, a_1 / b_3, a_3 / b_1, a_3 / b_3\}] \tag{3.20}$$

excluindo o caso de $b_1 = 0$ ou $b_3 = 0$.

v) **Inversa de um intervalo**:

$$A^{-1} = {}^{1}\!/_{A} = [a_1, a_3]^{-1}$$

$$A^{-1} = \left[{}^{1}\!/_{a_1} \wedge {}^{1}\!/_{a_3},\ {}^{1}\!/_{a_1} \vee {}^{1}\!/_{a_3} \right]$$

isto é:

$$A^{-1} = \left[\min\left\{ {}^{1}\!/_{a_1}, {}^{1}\!/_{a_3} \right\},\ \max\left\{ {}^{1}\!/_{a_1}, {}^{1}\!/_{a_3} \right\} \right] \tag{3.21}$$

excluindo o caso de $a_1 = 0$ ou $a_3 = 0$.

vi) **Multiplicação de um intervalo por um escalar**:

$$\forall \lambda \in R$$

$$se \quad \lambda > 0$$

$$\lambda A = \lambda [a_1, a_3] = [\lambda a_1, \lambda a_3] \tag{3.22}$$

$$se \quad \lambda < 0$$
$$\lambda A = \lambda[a_1, a_3] = [\lambda a_3, \lambda a_1] \tag{3.23}$$

3.2.5. Aritmética Fuzzy

O conceito de números fuzzy pode ser apresentado de diversas maneiras. Neste trabalho, um número fuzzy é considerado como uma extensão do conceito de intervalo de confiança. Esta extensão é baseada numa idéia natural e simples: ao invés de considerar o intervalo de confiança em um único nível, ele é considerado em vários níveis e mais especificamente entre os níveis 0 e 1. O intervalo de confiança máximo é considerado igual a 1 e o mínimo igual a 0. O nível de pertinência α, para α ∈ [0, 1], fornece um intervalo de confiança $A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right]$, que é uma função monótona decrescente de α. Isto quer dizer que:

para todo α, α' ∈ [0, 1]

se $(\alpha' > \alpha) \Rightarrow A_{\alpha'} \subset A_\alpha$

ou

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow \left[a_1^{(\alpha')}, a_3^{(\alpha')}\right] \subset \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right]$$

Desta forma, pode-se aplicar a teoria da aritmética intervalar para definir as operações com números fuzzy, onde cada intervalo possibilístico definido por um α-cut pode ser tratado independentemente pela aritmética intervalar.

3.2.5.1. Operações do Intervalo α-cut

Os intervalos α-cut de um número fuzzy $A_\alpha = [a_1, a_3]$ podem ser referenciados como um conjunto *crisp*.

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] \ \forall \alpha \in [0,1] \ a_1, a_3, a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} \in R$$

Desta forma A_α é um intervalo *crisp*. Logo, as operações vistas na seção 3.2.4 podem ser aplicadas para o intervalo α-cut, A_α.

Se o intervalo α-cut, B_α, de um número fuzzy B é definido por:

$$B = [b_1, b_3],\ b_1, b_3 \in R$$
$$B_\alpha = \left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right],\ \forall \alpha \in [0,1], b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)} \in R,$$

as operações entre A_α e B_α podem ser descritas da seguinte forma:

$$A_\alpha + B_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right](+)\left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right] = \left[a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} + b_3^{(\alpha)}\right]$$

$$A_\alpha - B_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right](-)\left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right] = \left[a_1^{(\alpha)} - b_3^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}\right]$$

Isto é, para cada grau de pertinência do número fuzzy é estabelecido um α-cut, criando-se intervalos α-cut. Logo, as operações com o número fuzzy serão realizadas para cada nível, cada α-cut, segundo a aritmética intervalar. Estas operações podem ser estendidas para multiplicação, divisão, etc.

Pode-se concluir que as operações com números fuzzy seguem as mesmas propriedades das operações intervalares. A diferença é que, com os números fuzzy, as operações são realizadas para cada nível de pertinência. É como se o número fuzzy fosse "fatiado" em diversos números intervalares.

3.2.5.2. Operações com o Número Fuzzy Triangular

Algumas propriedades das operações do número fuzzy triangular estão resumidas abaixo:

i) Os resultados de uma adição ou de uma subtração entre números fuzzy triangulares também são números fuzzy triangulares.

ii) Os resultados da multiplicação ou da divisão não são números fuzzy triangulares.

Freqüentemente, aproximam-se que os resultados operacionais de uma multiplicação ou de uma divisão por números fuzzy triangulares.

Em primeiro lugar serão consideradas a adição e a subtração. Neste caso, não é necessário o uso das funções de pertinência. Sejam os números fuzzy triangulares A e B definidos abaixo:

$A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$

i) **Adição**

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3)(+)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \end{aligned} \quad \text{: número fuzzy triangular} \qquad (3.24)$$

ii) **Subtração**

$$\begin{aligned} A(-)B &= (a_1, a_2, a_3)(-)(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \end{aligned} \quad \text{: número fuzzy triangular} \qquad (3.25)$$

iii) **Imagem Simétrica**

$$-(A) = (-a_3, -a_2, -a_1) \quad \text{: número fuzzy triangular} \qquad (3.26)$$

<u>Exemplo</u>: sejam os números fuzzy triangulares A e B definidos abaixo:

$A = (-3, 2, 4)$ e $B = (-1, 0, 6)$

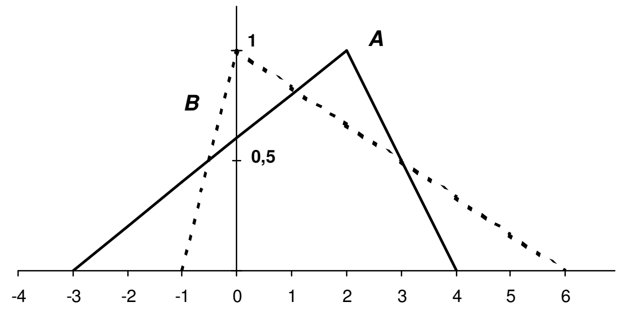
logo:

$A(+)B = (-4, 2, 10)$

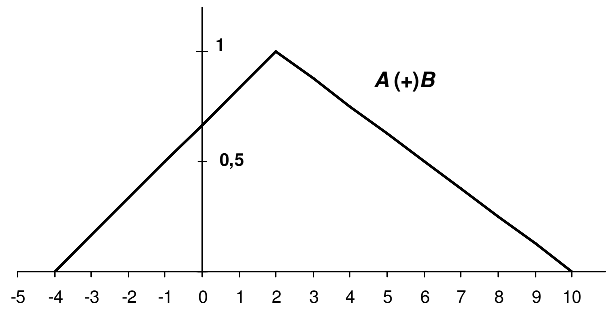
$A(-)B = (-9, 2, 5)$

Os conjuntos fuzzy de *A* e de *B*, assim como os conjuntos fuzzy da soma *A* (+) *B* e da subtração *A* (-) *B* estão ilustrados na Figura 12.

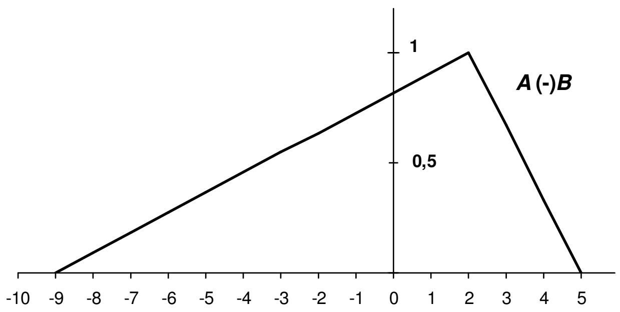
No caso da multiplicação ou da divisão, ao invés de se efetuar o cálculo preciso através das funções de pertinência, o que resultaria em um número fuzzy não triangular, é preferível aproximar o resultado para um número fuzzy triangular.



(a) Números fuzzy triangulares A e B



(b) Soma *A* (+) *B* de números fuzzy triangulares



(c) Subtração *A* (-) *B* de números fuzzy triangulares

Figura 12 – *A* (+) *B* e *A* (-) *B* de números fuzzy triangulares

<u>Exemplo</u>: Aproximação da multiplicação

Sejam os dois números fuzzy triangulares definidos abaixo:

$A = (1, 2, 4)$, $B = (2, 4, 6)$

O primeiro passo é obter os α-cuts dos números fuzzy em questão:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [(2-1)\alpha+1, \quad -(4-2)\alpha+4] \\ &= [\alpha+1, \quad -2\alpha+4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\alpha &= [(4-2)\alpha+2, \quad -(6-4)\alpha+6] \\ &= [2\alpha+2, \quad -2\alpha+6] \end{aligned}$$

Para todo α ∈ [0, 1], multiplica-se A_α e B_α, que são dois intervalos crisp. Observe-se que, para α ∈ [0, 1], todos os elementos de cada intervalo são números positivos. Logo a operação de multiplicação dos dois intervalos é simples.

$$\begin{aligned} A_\alpha(\bullet)B_\alpha &= [\alpha+1, \quad -2\alpha+4](\bullet)[2\alpha+2, \quad -2\alpha+6] \\ &= [(\alpha+1)(2\alpha+2), \quad (-2\alpha+4)(-2\alpha+6)] \\ &= [2\alpha^2+4\alpha+2, \quad 4\alpha^2-20\alpha+24] \end{aligned}$$

É importante observar que, neste ponto, fica claro que o número fuzzy resultante da multiplicação de dois números fuzzy triangulares não é um número fuzzy triangular.

Quando α = 0:

$$A_0(\bullet)B_0 = [2, \quad 24]$$

Quando α = 1:

$$A_1(\bullet)B_1 = [2+4+2, \quad 4-20+24] = [8, \ 8=8]$$

Obtem-se desta forma um número fuzzy triangular que é uma aproximação de $A(\bullet)B$:

$$A(\bullet)B \cong (2, \ 8, \ 24)$$

A Figura 13 apresenta as funções de pertinência dos números fuzzy triangulares *A* e *B*, a função de pertinência não aproximada da multiplicação *A* (•) *B* e a função de pertinência da mesma multiplicação aproximada por um número fuzzy triangular. Observa-se que a diferença entre as duas funções de pertinência de *A* (•) *B* é pequena.

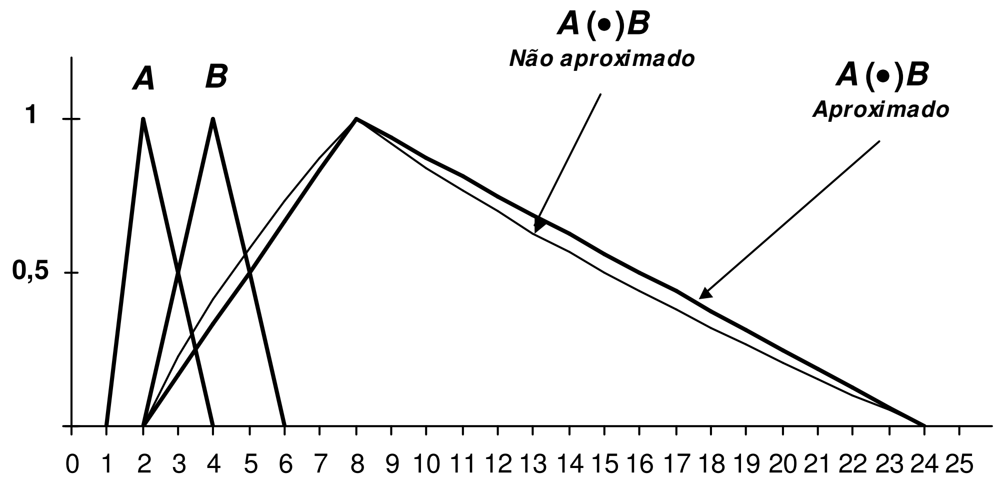


Figura 13 – Multiplicação *A* (•) *B* de dois números fuzzy triangulares

Exemplo: Aproximação da divisão

De modo similar, o resultado aproximado da divisão *A* (/) *B* é expresso através de um número fuzzy triangular. Sejam os dois números fuzzy triangulares *A* e *B* do exemplo anterior e os mesmos intervalos α-cut A_α e B_α. Para todo α ∈ [0, 1], como todos os elementos de cada intervalo são números positivos e não nulos, a divisão $A_\alpha (/) B_\alpha$ é feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_\alpha (/) B_\alpha &= [\alpha + 1, \quad -2\alpha + 4] (/) [2\alpha + 2, \quad -2\alpha + 6] \\ &= [(\alpha + 1)/(-2\alpha + 6), \quad (-2\alpha + 4)/(2\alpha + 2)] \end{aligned}$$

Quando α = 0:

$$\begin{aligned} A_0 (/) B_0 &= [1/6, \quad 4/2] \\ &= [0{,}17, \quad 2] \end{aligned}$$

Quando α = 1:

$$\begin{aligned} A_1 (/) B_1 &= [(1+1)/(-2+6), \quad (-2+4)/(2+2)] \\ &= [2/4, \quad 2/4] \\ &= [0{,}5, \quad 0{,}5] \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Obtém-se desta forma um número fuzzy triangular que é uma aproximação de $A(/)B$:

$$A(/)B \cong (0{,}17,\ \ 0{,}5,\ \ 2)$$