



Alexandre Roberto Rentería

**ESTIMAÇÃO DE PROBABILIDADE FUZZY
A PARTIR DE DADOS IMPRECISOS**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Orientador: Ricardo Tanscheit

Rio de Janeiro, setembro de 2006



Alexandre Roberto Rentería

**Estimação de Probabilidade Fuzzy a
partir de Dados Imprecisos**

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Tanscheit
Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Profa. Marley Maria Bernardes Rebuszi Vellasco
Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Weiler Finamore
Centro de Estudos em Telecomunicações - PUC-Rio

Prof. Juan Guillermo Lazo Lazo
Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Alexandre Gonçalves Evsukoff
UFRJ

Prof. Pedro Henrique Gouvêa Coelho
UERJ

Prof. José Franco Machado do Amaral
UERJ

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 21 de setembro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre Roberto Rentería

Graduou-se em Engenharia Elétrica, ênfase em eletrônica, pela PUC-Rio em 1999. Em 2002, obteve o título de mestre em Engenharia Elétrica em Métodos de Apoio à Decisão pela PUC-Rio. É membro do grupo de estudo em Inteligência Computacional do DEE/PUC-Rio. Vem realizando diversos projetos de pesquisa na área de automação industrial e instrumentação eletrônica desde 1999. Seus interesses incluem modelos matemáticos de incerteza e a aplicação da Teoria da Informação em sistemas inteligentes e em métodos de seleção de atributos.

Ficha Catalográfica

Rentería, Alexandre Roberto

Estimação de probabilidade fuzzy a partir de dados imprecisos / Alexandre Roberto Rentería ; orientador: Ricardo Tanscheit. – 2006.

94 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia elétrica)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Probabilidade fuzzy. 3. Probabilidade imprecisa. 4. Janela de parzen. 5. Número fuzzy. 6. Incerteza de medição. 7. Estimação de probabilidade. 8. Estimação não-paramétrica. I. Tanscheit, Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia elétrica. III Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Ricardo Tanscheit, sem cuja paciência e dedicação não teria sido possível realizar este trabalho.

Ao Professor Moisés Szwarcman, pelo apoio e compreensão.

À Professora Marley Vellasco, pelas importantes contribuições.

Aos meus pais e meus irmãos.

À minha amiga Babou, que me acompanhou durante a redação deste trabalho.

À PUC-Rio e à Vice-Reitoria Acadêmica, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Rentería, Alexandre Roberto; Tanscheit, Ricardo. **Estimação de probabilidade fuzzy a partir de dados imprecisos**. Rio de Janeiro, 2006. 94p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Existem três tipos de incerteza: a de natureza aleatória, a gerada pelo conhecimento incompleto e a que ocorre em função do conhecimento vago ou impreciso. Há casos em que dois tipos de incerteza estão presentes, em especial nos experimentos aleatórios a partir de dados imprecisos. Para modelar a aleatoriedade quando a distribuição de probabilidade que rege o experimento não é conhecida, deve-se utilizar um método de estimação não-paramétrico, tal como a janela de *Parzen*. Já a incerteza de medição, presente em qualquer medida de uma grandeza física, dá origem a dados imprecisos, tradicionalmente modelados por conceitos probabilísticos. Entretanto, como a probabilidade se aplica à análise de eventos aleatórios, mas não captura a imprecisão no evento, esta incerteza pode ser melhor representada por um número *fuzzy* segundo a transformação probabilidade-possibilidade superior. Neste trabalho é proposto um método de estimação não-paramétrico baseado em janela de *Parzen* para estimação da probabilidade *fuzzy* a partir de dados imprecisos.

Palavras-chave

Probabilidade fuzzy; probabilidade imprecisa; probabilidade incerta; número fuzzy; incerteza de medição; estimação de probabilidade; estimação não-paramétrica; janela de Parzen

Abstract

Rentería, Alexandre Roberto; Tanscheit, Ricardo. **Fuzzy probability estimation from imprecise data**. Rio de Janeiro, 2006. 94p. Doctoral Thesis – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

There are three kinds of uncertainty: one due to randomness, another due to incomplete knowledge and a third one due to vague or imprecise knowledge. Sometimes two kinds of uncertainty occur at the same time, especially in random experiments based on imprecise data. To model randomness when the probability distribution related to an experiment is unknown, a non-parametric estimation method must be used, such as the Parzen window. Uncertainty in measurement originates imprecise data, traditionally modelled through probability concepts. However, as probability applies to random events but does not capture their imprecision, this sort of uncertainty is better represented by a fuzzy number, through the superior probability-possibility transformation. This thesis proposes a non-parametric estimation method based on Parzen window to estimate fuzzy probability from imprecise data.

Keywords

Fuzzy probability; imprecise probability; uncertain probability; fuzzy number; uncertainty in measurement; probability estimation; non-parametric estimation; Parzen window.

Sumário

1	Introdução	13
1.1.	Motivação	13
1.2.	Objetivo	14
1.3.	Estrutura da Tese	14
2	Incerteza	15
2.1.	Conceito geral de Incerteza	15
2.2.	Incerteza como conceito mais amplo	16
2.2.1.	O Paradoxo de Russell	16
2.2.2.	Exemplo das Garrafas	17
2.2.3.	Exemplo de Fang	20
2.3.	Outros modelos de Incerteza	21
2.4.	Incerteza de medição	21
2.4.1.	Introdução	22
2.4.2.	Definições	22
2.4.3.	As causas das incertezas de medições e suas limitações	24
2.4.4.	Medidas quantitativas da incerteza de medição	26
2.4.5.	Avaliações do tipo A e do tipo B	28
2.4.6.	Modelagem matemática	28
3	Teoria dos Conjuntos Fuzzy	30
3.1.	Conceitos de Lógica Fuzzy	30
3.1.1.	Conjuntos Fuzzy	30
3.1.2.	Conjunto Singleton	32
3.1.3.	Conjunto α -cut	32
3.2.	Conceitos de Números Fuzzy	33

3.2.1. Intervalos	33
3.2.2. Número Fuzzy	34
3.2.3. Número Fuzzy Triangular	36
3.2.4. Aritmética de Intervalos	39
3.2.5. Aritmética Fuzzy	41
3.2.5.1. Operações do Intervalo α -cut	41
3.2.5.2. Operações com o Número Fuzzy Triangular	42
4 Teoria da Probabilidade	48
4.1. Definição	48
4.2. Distribuição de probabilidade	49
4.2.1. A Distribuição Normal	49
4.2.2. Intervalo de Confiança	50
4.3. Métodos de Estimação de Probabilidade	50
4.4. Métodos de Estimação Não-Paramétricos	51
4.4.1. Definição	51
4.4.2. Histograma	52
4.4.3. Métodos de Kernel	54
4.4.4. Janela de Parzen	56
5 Modelo Proposto	59
5.1. Notação	59
5.2. Aritmética Fuzzy com Restrições Indispensáveis	60
5.3. Probabilidade Fuzzy	61
5.3.1. Caso Discreto	61
5.3.2. Caso Contínuo	68
5.3.3. Representação Gráfica	74
5.4. Modelando a Incerteza de Medição Através de Números Fuzzy	77
5.5. Janela de Parzen Fuzzy	78
5.6. Exemplos	81
5.6.1. Exemplo 1: Amostras de uma Uniforme	81

5.6.2. Exemplo 2: Amostras de uma Normal	85
6 Conclusão	89
7 Referências Bibliográficas	91

Lista de figuras

Figura 1 – Par de garrafas encontrado pelo homem no deserto	18
Figura 2 – Par de garrafas encontrado pelo homem no deserto (desvendadas)	19
Figura 3 – Gráfico da Probabilidade vs. Possibilidade	21
Figura 4 – Componentes de um Conjunto Fuzzy	31
Figura 5 – Exemplo de um Conjunto Singleton	32
Figura 6 – Exemplo de Conjunto α -Cut	33
Figura 7 – Exemplo de Intervalo com $A = [a_1, a_3]$	34
Figura 8 – Ilustração gráfica do número fuzzy $A = (a_1, a_2, a_3)$	35
Figura 9 - α -cut de um número fuzzy: $\alpha' < \alpha \rightarrow A_{\alpha'} \subset A_{\alpha}$.	35
Figura 10 – Número fuzzy triangular $A = (a_1, a_2, a_3)$	37
Figura 11 – Intervalo $\alpha = 0,5$ cut do número fuzzy triangular $A = (-5, -1, 1)$	39
Figura 12 – $A (+) B$ e $A (-) B$ de números fuzzy triangulares	44
Figura 13 – Multiplicação $A (\bullet) B$ de dois números fuzzy triangulares	46
Figura 14 - Classificação dos métodos de estimação de densidade de probabilidade	51
Figura 15 - Dependência da forma do histograma em função da escolha da origem das células.	54
Figura 16 – influência da largura da janela na estimativa por Janela de <i>Parzen</i>	58
Figura 17 – Elementos de uma densidade de probabilidade uniforme fuzzy	70
Figura 18 – Probabilidades fuzzy obtidas a partir de uma densidade uniforme fuzzy	72
Figura 19 – Representação gráfica de uma Normal de média nula e variância unitária, $f(x; 0, 1)$	75
Figura 20 – Ilustração da desigualdade $\bar{P}[10,12] + \bar{P}[12,15] \supseteq \bar{P}[10,15]$	76

Figura 21 - Conjunto dos intervalos de confiança associados a uma distribuição normal	77
Figura 22 – Aproximação superior do conjunto de intervalos de confiança através de um número fuzzy triangular	78
Figura 23 - $\bar{P}_{[1, 4]}$ estimadas a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	83
Figura 24 - $\bar{P}_{[1, 4]}$ estimadas a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	84
Figura 25 - $\bar{P}_{[10, 15]}$ estimadas a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	86
Figura 26 - $\bar{P}_{[10, 15]}$ estimadas a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	87

Lista de tabelas

Tabela 1 – Probabilidade vs. Possibilidade	20
Tabela 2 - α -cuts das probabilidades fuzzy	76
Tabela 3 - α -cuts da estimativas de $\bar{P}_{[1, 4]}$ a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	82
Tabela 4 - α -cuts da estimativas de $\bar{P}_{[1, 4]}$ a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	84
Tabela 5 – Evolução da estimativa em função do número de amostras (exemplo 1)	85
Tabela 6 - α -cuts da estimativas de $\bar{P}_{[10, 15]}$ a partir de 100 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	85
Tabela 7 - α -cuts da estimativas de $\bar{P}_{[10, 15]}$ a partir de 1000 amostras com incertezas de 0,5 e 1,0	86
Tabela 8 - Evolução da estimativa em função do número de amostras (exemplo 2)	88