

3

Probabilidade de Bloqueio em Redes Parciais

Esta seção descreve dois modelos analíticos utilizados na literatura para aproximação do cálculo da probabilidade de bloqueio. Estes modelos calculam, inicialmente, a probabilidade de bloqueio sobre uma única rota e, posteriormente, sobre todas as rotas, de modo a obter uma medida do bloqueio médio numa dada topologia. O modelo apresentado em 3.1 não distingue as duas possíveis situações que resulta no bloqueio de uma chamada; no modelo em 3.2, o autor preocupa-se apenas com o bloqueio devido a ausência de dispositivos de conversão.

3.1

Cálculo da probabilidade de bloqueio – Modelo 1 (Base)

O modelo matemático proposto em [1] foi utilizado como ferramenta de cálculo da probabilidade de bloqueio média de uma rede e leva em consideração a conversão parcial de comprimento de onda.

3.1.1

Parâmetros do sistema

A seguir, um conjunto de considerações e assertivas sobre a rede:

- ▼ Uma rede WDM de topologia arbitrária é um grafo que consiste de N nós e J enlaces ópticos (arestas). Cada nó é referenciado por um número inteiro contido no intervalo $[1, N]$ enquanto que a numeração que referencia cada enlace está contido no intervalo $[1, J*2]$;
- ▼ Considera-se enlaces ópticos bidirecionais. Cada enlace óptico é composto por duas fibras unidirecionais que suporta W comprimentos de onda em cada uma das direções;

- ▼ Para cada par origem-destino (o, d) , o processo estocástico que modela a chegada das solicitações de abertura de conexão é um processo de Poisson de taxa $A_{(o,d)}$;
- ▼ Para cada conexão óptica estabelecida com sucesso, o tempo de duração da conexão segue uma distribuição exponencial decrescente com média unitária;
- ▼ Cada WCR possui um dentre dois possíveis estados, definido pela disponibilidade ou não de conversores ópticos: (1) quando os conversores que compõem o WCR estão atendendo a outras conexões, ou seja, quando o WCR não possui conversor livre e (2) quando o roteador possui pelo menos um conversor livre.

Se a rota utilizada para cursar o tráfego da conexão $R_{(o,d)}$ possui D WCRs (excluindo os nós de ingresso e egresso na rede), esta conexão pode ser estabelecida considerando um entre 2^D possíveis estados de conversão X . Para cada estado de conversão X , pode haver E_X WCRs com pelo menos um conversor livre, de tal forma que $0 \leq E_X \leq D$. Para cada um dos possíveis estados de conversão X_i ($0 \leq i \leq 2^D - 1$), a rota $R_{(o,d)}$ é dividida em $E_X + 1$ segmentos, representados por $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{E_X}$, respectivamente. Cada segmento deve, obrigatoriamente, utilizar o mesmo comprimento de onda em todos os enlaces que o compõe.

Seja o parâmetro $u_{S_k}(i)$ que representa a probabilidade de existir i comprimentos de onda comuns livres em todos os enlaces que compõem o segmento S_k . Uma conexão óptica será estabelecida se e somente se em cada um dos segmentos possuir pelo menos um mesmo comprimento de onda livre em todos os enlaces.

A figura abaixo ilustra uma rota composta de 4 hops e 2 WCRs. Observe que, considerando que cada WCR possui pelo menos um conversor livre, o estabelecimento de uma conexão óptica só será efetuada se nos enlaces S'_{11} e S'_{12} que compõe o segmento S_1 existir pelo menos um mesmo comprimento de onda livre.

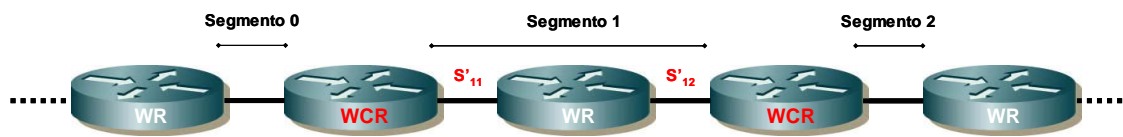


Figura 3.1 – Rota segmentada

Para o estado de conversão em que os 2 WCRs não possuem conversor livre, a conexão só será estabelecida se em todos os enlaces existir pelo menos um mesmo comprimento de onda livre. Neste caso, a conexão é composta de um único segmento.

É razoável afirmar que, a medida que aumenta-se o número de enlaces que compõe um segmento, a probabilidade de encontrar um mesmo comprimento de onda livre diminui. O modelo proposto em [1] confirma este fato.

- ▼ A probabilidade de bloqueio da conexão $R_{(o,d)}$ é representada por

$$B_{R_{(o,d)}} \text{ (ou somente } B_R \text{)}.$$

3.1.2

Cálculo da Probabilidade de Bloqueio

A probabilidade de bloqueio da rede leva em consideração a taxa de chegada $A_{(o,d)}$'s de cada conexão e as respectivas probabilidades de bloqueio $B_{R_{(o,d)}}$'s. Basicamente, é a razão entre o somatório de todo o tráfego bloqueado e o somatório de todo o tráfego ofertado a rede.

$$B = \frac{\sum_{o,d} A_{(o,d)} \cdot B_{R_{(o,d)}}}{\sum_{o,d} A_{(o,d)}} \quad \text{(equação 3.1)}$$

A probabilidade de bloqueio de uma conexão $R_{(o,d)}$ leva em consideração todos os possíveis estados de conversão capazes de cursar o tráfego relativo a esta conexão e, para cada estado de conversão, existe uma probabilidade de ocorrência

$P(X)$ associada. Esta probabilidade de bloqueio pode ser calculada utilizando o Teorema da Probabilidade Total.

$$B_R = \sum_X \{B_{R,X} \cdot P(X)\}$$

O cômputo de B_R é feito calculando $B_{R,X}$ e $P(X)$.

3.1.2.1

Calculando $B_{R,X}$

A probabilidade de bloqueio associada ao estado de conversão X ($B_{R,X}$) pode ser calculada da seguinte maneira:

$$B_{R,X} = 1 - P_{Suc,X}$$

onde,

$P_{Suc,X}$ (Probabilidade de Sucesso no estabelecimento da rota referente ao estado de conversão X = Probabilidade de existir pelo menos um mesmo comprimento de onda livre em todos os segmentos definidos pelo estado de conversão X) = $P_{Suc,X_{S_0}}$ e $P_{Suc,X_{S_1}}$ e $P_{Suc,X_{S_2}}$ e ... e $P_{Suc,X_{S_{Ex}}}$,

$P_{Suc,X_{S_K}}$ = Probabilidade de existir pelo menos um mesmo comprimento de onda livre em todos os enlaces que compõe o segmento K ,

e

$$P_{Suc,X_{S_K}} = 1 - u_{S_K}(0).$$

Logo,

$$B_{R,X} = 1 - \prod_{k=0}^{E_X} [1 - u_{S_k}(0)]$$

Para o cálculo de $B_{R,X}$, é necessário descobrir a probabilidade de não existir comprimento de onda comum livre nos enlaces que compõe cada segmento da conexão, probabilidade representada pelo termo $u_{S_k}(0)$.

Seja X_j a variável aleatória que descreve o número de comprimentos de onda livres no j -ésimo enlace. O modelo de aproximação assume que X_i e X_j são independentes, quando i e j são enlaces diferentes, e que o processo de chegada de novas solicitações de conexão no j -ésimo enlace é um processo de Poisson de taxa α_j . Seja definido o termo $q_j(m_j)$ como sendo a probabilidade de que m_j comprimentos de onda estejam livres no j -ésimo enlace.

Considerando esta aproximação, o comportamento de chegada e atendimento das requisições em cada enlace podem ser representados por um sistema que, na teoria de filas, é um sistema do tipo M/M/m/m, e descrito por um processo de nascimento e morte com um número finito de estados, como ilustrado a seguir:

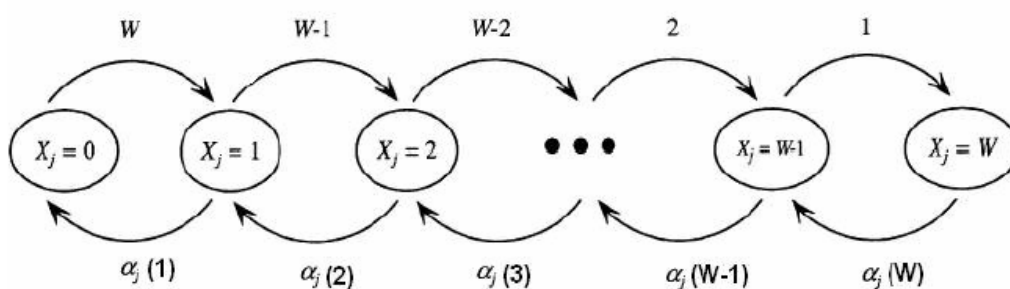


Figura 3.2 – Processo de nascimento e morte de comprimentos de onda no j -ésimo enlace

Dos resultados deste sistema de filas para um processo de Poisson, tem-se:

$$q_j(m_j) = P(X_j = m_j) = \frac{\prod_{i=1}^{m_j} (W - i + 1)}{\alpha_j^{m_j}} \cdot P(X_j = 0) \quad (\text{equação 3.2})$$

onde

$$q_j(0) = P(X_j = 0) = \left[1 + \sum_{m_j=1}^W \frac{\prod_{i=1}^{m_j} (W - i + 1)}{\alpha_j^{m_j}} \right]^{-1} \quad (\text{equação 3.3})$$

De acordo com a hipótese referenciada no artigo, relativo ao tráfego transportado no j -ésimo enlace, determina-se α_j através da seguinte equação:

$$\alpha_j (1 - q_j(0)) = \sum_{\substack{(o,d) \text{ cuja conexão} \\ R_{o,d} \text{ atravessa enlace } j}} A_{o,d} (1 - B_{R_{o,d}}) \quad (\text{equação 3.4})$$

Seja S_k um segmento composto de dois enlaces, j_1 e j_2 . A probabilidade que j_1 tenha x comprimentos de onda livre é igual a $q_{j_1}(x)$ e, da mesma forma, a probabilidade que j_2 tenha y comprimentos de onda livre é $q_{j_2}(y)$. Dado $q_{j_1}(x)$ e $q_{j_2}(y)$, a probabilidade de existir i comprimentos de onda comuns livres no segmento S_k é representado pelo termo $p(i/x, y)$, e pode ser calculado da seguinte forma:

$$p(i/x, y) = \begin{cases} \beta(x, y, i), & \text{se } \begin{cases} i \leq \min(x, y) \\ x + y - i \leq W \\ 0 \leq x, y \leq W \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde

$$\beta(x, y, i) = \frac{\binom{y}{i} \binom{W-y}{x-i}}{\binom{W}{x}}.$$

*** Nota: no artigo constava a seguinte condição: $1 \leq x, y \leq W$. Porém, após análise, observou-se que o correto é considerar a condição descrita acima.*

A probabilidade $u_{S_k}(i)$, para um segmento composto de dois enlaces, é dada por:

$$u_{S_k}(i) = \sum_{x=0}^W \sum_{y=0}^W \{p(i/x, y) \cdot q_{j_1}(x) \cdot q_{j_2}(y)\}$$

Suponha que o segmento S_k é composto pelos enlaces $\{j_1, j_2, \dots, j_h\}$, onde h é maior que dois. Utiliza-se o sub-segmento S'_k para representar os $(h-1)$ segmentos $\{j_1, j_2, \dots, j_{h-1}\}$.

Considerando então que o segmento S_k é composto pelo sub-segmento S'_k e pelo enlace j_h , a análise acima pode ser estendida e $u_{S_k}(i)$ é obtido através da seguinte equação recursiva:

$$u_{S_k}(i) = \sum_{x=0}^W \sum_{y=0}^W \{p(i/x, y) \cdot u_{S'_k}(x) \cdot q_{j_h}(y)\}$$

3.1.2.2

Calculando P(X)

Uma vez calculado o termo $u_{S_k}(i)$, resta calcular a probabilidade de ocorrência de cada um dos estados de conversão $X (P(X))$.

Conforme mencionado anteriormente, $P(X)$ leva em consideração o estado de conversão de cada WCR que suporta a conexão a qual deseja-se conhecer a probabilidade de bloqueio. O estado de conversão de cada WCR é representado por um entre dois possíveis estados conforme mencionado em [3.1.1].

Seja p_n a probabilidade que o n -ésimo WCR na conexão não possua conversor de comprimento de onda livre, define-se então o seguinte termo:

$$Y(n) = \begin{cases} 1 - p_n & ; \text{ se o } n\text{-ésimo WCR possui conversor livre;} \\ p_n & ; \text{ se o } n\text{-ésimo WCR não possui conversor livre.} \end{cases}$$

Logo, $P(X)$ pode ser obtido a partir do seguinte produtório, que considera a configuração de cada WCR na rota:

$$P(X) = \prod_{n=1}^D Y(n)$$

Para finalizar, basta calcular o valor da variável p_n . Quando uma conexão óptica é estabelecida, uma entre duas possíveis configurações pode ocorrer: (1) o mesmo comprimento de onda é alocado em todos os segmentos da conexão ou (2) os comprimentos de onda alocados em cada segmento diferem de segmento para segmento. Somente o caso (2) vai exigir a utilização de conversores de comprimento de onda.

Seja T_n o número total de conexões que atravessam o n -ésimo WCR, $u_{R_{(o,d)}}(0)$ a probabilidade que não exista comprimento de onda comum livre em todos os enlaces da conexão $R_{(o,d)}$ e Z_n o número de conversores no n -ésimo WCR, então:

$$T_n = \sum_{\substack{\text{todas as conexões } R_{(o,d)} \text{ que} \\ \text{atravessam o } n\text{-ésimo WCR}}} \{A_{(o,d)}(1 - B_R)u_{R_{(o,d)}}(0)\}$$

$$p_n = \left[1 + \sum_{j=1}^{Z_n} \frac{\prod_{i=1}^j (Z_n - i + 1)}{T_n^j} \right]^{-1}$$

A equação acima é uma aproximação. Modela o comportamento de chegada, no n -ésimo WCR, das requisições que exigem conversão de comprimento de onda, como um processo de Poisson com taxa T_n . Na teoria de filas, é um sistema do tipo M/M/m/m com Z_n servidores, que resulta na equação descrita.

Face ao exposto, o algoritmo que calcula a probabilidade de bloqueio média em uma rede parcial segue os seguintes passos:

- 1º. Inicializa-se todos os B_R 's e todos os $q_j(0)$'s como sendo zero;
- 2º. Determinar α_j via (equação 3.4) para todos os enlaces;
- 3º. Determinar $q_j(m_j)$ via (equação 3.3) e (equação 3.2) para todos os enlaces;
- 4º. Determinar B_R de todas as conexões;
- 5º. Determinar B . Se o valor corrente de B convergir com o anterior, o processo é terminado. Caso contrário, retorna-se ao segundo passo.

Nota: a convergência no quinto passo quer dizer que a diferença absoluta entre o valor corrente e o antigo é menor que algum valor muito pequeno.

3.2

Cálculo da probabilidade de bloqueio – Modelo 2 (Xi, Arakawa e Murata)

O esquema de alocação proposto em [17], que emprega o modelo matemático apresentado pelos mesmos autores em [26], é utilizado como ferramenta de avaliação do fenômeno de bloqueio de chamadas em uma rede óptica, para o caso específico de bloqueio devido a indisponibilidade de dispositivos de conversão.

De acordo com os autores, o objetivo principal é prover uma ferramenta qualitativa de comparação cujo modelo matemático *simplificado* seja capaz de distinguir entre uma boa solução de alocação de conversores de uma solução ruim. Este modelo não se preocupa em precisar quantitativamente a probabilidade

média de bloqueio de uma rede. Como consequência, o modelo *simplificado* possui assertivas de tráfego mais simplistas, e o tratamento analítico é mais simples, exigindo um esforço computacional menor.

3.2.1

Parâmetros do sistema

A probabilidade de bloqueio de uma conexão $R_{(o,d)}$ representada por $B_{R_{(o,d)}}$ (ou somente B_R) pode ser decomposta em duas partes mutuamente exclusivas:

i) $B_{CO}^R =$ probabilidade de bloqueio provocado pela ausência de comprimento de onda em um dos enlaces que compõe a rota;

ii) $B_{WC}^R =$ probabilidade de bloqueio provocado pela ausência de conversor de comprimento de onda.

Sendo assim, a probabilidade de bloqueio B_R de uma conexão é representada pela seguinte equação:

$$B_R = B_{CO}^R + B_{WC}^R \quad (\text{equação 3.5})$$

Desenvolvendo a probabilidade de bloqueio total da rede expressa na equação 3.1 obtém-se:

$$B = \frac{\sum_{o,d} A_{(o,d)} \cdot B_{CO}^R}{\sum_{o,d} A_{(o,d)}} + \frac{\sum_{o,d} A_{(o,d)} \cdot B_{WC}^R}{\sum_{o,d} A_{(o,d)}} \quad (\text{equação 3.6})$$

Como o objetivo é prover uma ferramenta qualitativa de comparação, desconsidera-se a parcela relativa ao bloqueio provocado pela indisponibilidade de comprimento de onda.

A (equação 3.6) se reduz a:

$$B = \frac{\sum_{o,d} A_{(o,d)} \times B_{WC}^R}{\sum_{o,d} A_{(o,d)}}$$

onde

$$B_{WC}^* = \sum_{o,d} A_{(o,d)} \times B_{WC}^R \quad (\text{equação 3.7})$$

3.2.2

Probabilidade de Bloqueio de uma Conexão

Supondo o exemplo da Figura 3.1, em que rota que suporta a conexão $B_{R(o,d)}$ é composta de 3 nós intermediários e 4 hops, e que a probabilidade de sucesso no estabelecimento da conexão $R_{(o,d)}$ é dado por \bar{B}_R , a probabilidade $B_{R(o,d)}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$B_{R(o,d)} = 1 - \bar{B}_R$$

onde

$$\bar{B}_R = \bar{B}_{R_1} \times \bar{B}_{R_2} \times \bar{B}_{R_3}$$

ou ainda

$$\bar{B}_R = (1 - B_{R_1}) \times (1 - B_{R_2}) \times (1 - B_{R_3})$$

Logo,

$$B_{R(o,d)} = 1 - (1 - B_{R_1}) \times (1 - B_{R_2}) \times (1 - B_{R_3})$$

$$B_{R(o,d)} = 1 - \prod_{k=1}^3 [1 - B_{R_k}]$$

Estendendo para um caso geral quando a rota é composta por H hops:

$$B_{R(o,d)} = 1 - \prod_{k=1}^{H-1} [1 - \bar{B}_{R_k}] \quad (\text{equação 3.8})$$

Substituindo a (equação 3.8) em (equação 3.7) tem-se:

$$B_{WC}^* = \sum_{o,d} A_{(o,d)} - \left[\sum_{o,d} A_{(o,d)} \times \prod_{k=1}^{H-1} [1 - \bar{B}_{R_k}] \right]$$

3.2.3

Probabilidade de Bloqueio em um Roteador Intermediário

Seja uma seção consistindo de um roteador n com c_n WC's livres e dois enlaces: de entrada u e de saída v , com w_u e w_v comprimentos de onda livres, respectivamente. A probabilidade de um roteador bloquear uma chamada proveniente do enlace u para o enlace de saída v devido a ausência de WC é representado por $B(u \rightarrow v \therefore n)$.

Assumindo que a ocupação dos recursos nos enlaces (comprimentos de onda) e a utilização de conversores nos nós intermediários são eventos independentes e que o processo estocástico de chegada das solicitações de conexão é um processo de Poisson, os eventos "utilização de comprimentos de onda" e "utilização de WCs" podem ser representados por um sistema que, na teoria de filas, é um sistema do tipo M/G/K sem fila de espera. Dos resultados deste sistema de filas, para um processo de Poisson, tem-se que a probabilidade do sistema possuir j servidores ocupados é dado por:

$$p_j = \left(\frac{\rho^j}{j!} \right) \times p_0, \quad j = 1, \dots, K$$

e

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^K \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1},$$

onde ρ é a carga do sistema.

Então, a probabilidade do sistema possuir k servidores livres dado que existem K servidores é dado por:

$$q(\rho, K, k) = \frac{\rho^{K-k}}{(K-k)! \times \sum_{i=0}^K \frac{\rho^i}{i!}}, \quad k = 0, \dots, K.$$

Considerando que em cada enlace óptico contém W comprimentos de onda e dado w_u e w_v , então o parâmetro w_{uv} determina o número de comprimentos de onda comuns livre nos enlaces u e v . Considerando ainda a suposição de independência, declarada anteriormente, tem-se que:

$$B(u \rightarrow v : n) = P(w_u > 0, w_v > 0, w_{uv} = 0, c_n = 0)$$

$$B(u \rightarrow v : n) = P(c_n = 0) \times \sum_{i,j=1}^W P(w_{uv} = 0 / w_u = i, w_v = j) \cdot P(w_u = i) \cdot P(w_v = j)$$

(equação 3.9)

Assumindo também que a distribuição dos comprimentos de onda livres estão é aleatória, então:

$$P(w_{uv} = 0 / w_u = i, w_v = j) = \begin{cases} \frac{\binom{W-i}{j}}{\binom{W}{j}}, & \text{se } i + j \leq W \\ 0, & \text{se } i + j > W \end{cases} \quad (\text{equação 3.10})$$

Substituindo a (equação 3.10) em (equação 3.9), tem-se:

$$B(u \rightarrow v : n) = q(\beta_n, C_n, 0) \times \sum_{i=1}^{W-1} \sum_{j=1}^{W-1} \frac{\binom{W-i}{j}}{\binom{W}{j}} \times q(\alpha_u, W, i) \times q(\alpha_v, W, j)$$

Nas subseções seguintes, apresentar-se-ão os cálculos relativos as cargas de cada enlace α e de cada nó β_n .

3.2.4

Cálculo da carga por enlace

A carga em um enlace pode ser obtida adicionando cada uma das cargas relativa a cada uma das conexões que atravessam o enlace. É dada por:

$$\alpha_j = \sum_{\substack{(o,d) \text{ cuja conexão} \\ R_{o,d} \text{ atravessa enlace } j}} A_{o,d} .$$

3.2.5

Cálculo da carga de conversão por nó intermediário (WCR)

Além dos fatores citados ao longo deste trabalho, o ganho em desempenho com a introdução de conversores em um determinado nó está diretamente relacionado com a maneira com que as conexões ópticas concorrem pelos recursos

da rede ao longo de cada nó. Para obter um ganho efetivo, é necessário analisar o relacionamento entre as conexões que atravessam um determinado nó.

Sejam u_n^r e v_n^r os enlaces associados as interfaces de entrada e saída de uma conexão r em um roteador n , respectivamente ($u_n^r = 0$ indica que a conexão r não ingressa no nó n através da interface u e $v_n^r = 0$ indica que a conexão r não egressa no nó n através da interface v). O relacionamento entre as conexões que atravessam um determinado nó pode ser definido da seguinte forma:

Definição 1: Seja um nó n , duas conexões x e y são ditas ortogonais se e somente se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

- I. $u_n^x \neq u_n^y$ ou $u_n^x = u_n^y = 0$ (ou seja, as conexões x e y ingressam por interfaces diferentes no roteador n ou não atravessam este);
- II. $v_n^x \neq v_n^y$ ou $v_n^x = v_n^y = 0$.

Caso contrário, são ditas como correlatadas.

Conexões ortogonais não disputam por portadoras ópticas para transmissão de informação, de forma que o relacionamento entre elas não exige qualquer facilidade de conversão de comprimento de onda. Esta disputa ocorre somente entre as conexões correlatadas, justificando assim a introdução de dispositivos de conversão que pode refletir em um ganho de desempenho da rede.

Sejam u e v os enlaces associados as interfaces de entrada e saída de uma conexão em um roteador n , as rotas correlatadas podem ser classificadas em 3 grupos distintos:

- i) Grupo A \rightarrow todas as conexões r_A em que $u_n^{r_A} = u$ e $v_n^{r_A} \neq v$ (ou seja, todas as conexões que ingressam pela mesma interface e que egressam por interfaces diferentes). A carga relativa ao Grupo A é dada por

$$A_n^u = \sum_{r_A} A_{r_A} ;$$

ii) Grupo B → todas as conexões r_B em que $u_n^{r_B} \neq u$ e $v_n^{r_B} = v$ (ou seja, todas as conexões que ingressam por entradas distintas e que egressam pela mesma interface). A carga relativa ao Grupo B é dada por

$$A_n^v = \sum_{r_B} A_{r_B} ;$$

iii) Grupo C → todas as conexões r_C em que $u_n^{r_C} = u$ e $v_n^{r_C} = v$ (ou seja, todas as conexões que ingressam e egressam por interfaces comuns). A carga relativa ao Grupo C é dada por $A_n^{uv} = \sum_{r_C} A_{r_C}$.

A figura a seguir ilustra os 3 grupos.

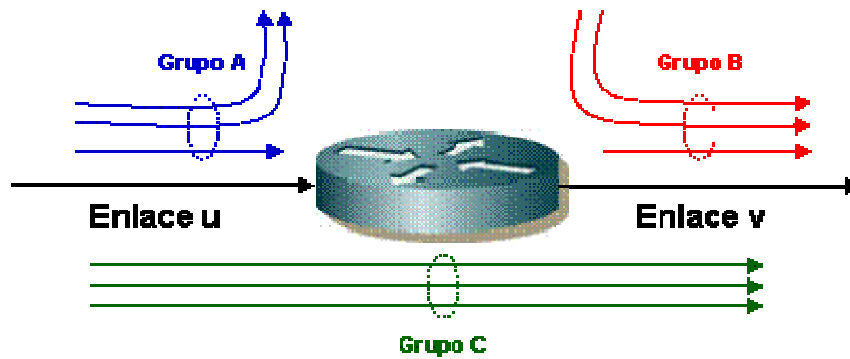


Figura 3.3 – Classificação das conexões correlatadas

Um fato assumido pelos autores em [17] é que todas as conexões relativas ao Grupo C não demandam por conversão óptica. Com esta suposição, a carga de conversão do enlace u para o enlace v é dada por:

$$\beta_n^{uv} = \gamma \cdot \min(A_n^u, A_n^v, A_n^{uv})$$

onde o fator γ é para ajuste da carga.

Sendo assim, a carga de conversão de cada nó pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\beta_n = \gamma \sum_{u \in J} \sum_{v \in J} \beta_n^{uv}$$

$$\beta_n = \gamma \sum_{u \in J} \sum_{v \in J} \min(A_n^u, A_n^v, A_n^{uv}), \quad n \in N.$$

O valor empírico sugerido pelo autor para ajuste da carga corresponde a $\gamma = 1/2W$.