5
Experimento Monte-Carlo

5.1
Introdução

A simplicidade do Método Monte-Carlo permite que se utilize o experimento satisfatoriamente e com certa popularidade em áreas como física, processamento de imagens, avaliação de derivativos em finanças e econometria. Neste trabalho, usamos o método Monte-Carlo para a simulação de modelos de séries de tempo.

Para ilustrar o método Monte-Carlo, considere o seguinte processo estocástico univariado (see, Li e Winker, 2000):

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1.....T \tag{5-1}$$

Dados os parâmetros α_0 e α_1 (assumidos conhecidos) e um valor inicial x_0, uma amostra de tamanho T para a variável x_t pode ser simulada baseando-se em uma seqüência de ε_t de tamanho T. Por exemplo, a partir de um valor inicial $x_0 = 0$, sorteia-se 1 000 valores de $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{1\ 000})$ e, por meio do processo (5-1), gera-se amostra univariada $x = (x_1, ..., x_{1\ 000})$ de 1 000 observações.

Usualmente uma única realização da amostra não é suficiente, tendo em vista que estamos interessados na distribuição de x_t ou alguma outra estatística derivada da sua distribuição. Para se obter mais do que uma realização de x_t, para cada tamanho de amostra T, geram-se N realizações de ε_{it} $(i = 1, ..., N,\ t = 1, ..., T)$. Em outras palavras, para cada i tem-se amostra de tamanho T. No algoritmo do programa, são gerados $i = 100\ 000$ realizações de $T = 1\ 000$ observações cada uma.

5.2
Construção do processo gerador de dados do modelo VAR

A construção do experimento Monte-Carlo é o coração da análise na estimação e previsão dos modelos VAR em amostras pequenas. Um dos pontos críticos relativos à simulação Monte-Carlo é a construção do processo gerador de dados do modelo VAR sujeito às restrições de cointegração e do tipo WF.

Para construir o processo gerador de dados, considera-se o modelo VAR com os seguintes parâmetros:

- Número de variáveis $n = 3$;
- Ordem de defasagem do modelo $p = 3$;
- Número de vetores de cointegração $r = 1$;
- Número de vetores do espaço co-característico $s = 2$;

As matrizes cujas colunas gerarão os espaços de cointegração e co-característicos, β e $\tilde{\beta}$ respectivamente, são:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.2 \\ -1.0 \end{bmatrix}_{n\times r}, \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 \\ 0.0 & 1.0 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}_{n\times s}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1.0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1.0 \end{bmatrix} \right)$$

Considere o modelo VAR(3):

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + A_3 y_{t-3} + \varepsilon_t \tag{5-2}$$

É possível escrever a representação VECM como uma função dos parâmetros do modelo VAR na forma:

$$\Delta y_t = (A_1 + A_2 + A_3 - I_3) y_{t-1} - (A_2 + A_3)\Delta y_{t-1} - A_3 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{5-3}$$

Os parâmetros de (5-3) devem satisfazer simultaneamente às restrições de cointegração, WF e estacionariedade abaixo:

a) Restrições de cointegração:

(i) $\alpha\beta' = (A_1 + A_2 + A_3 - I_3)$:

b) Restrições do tipo WF:

(ii) $\tilde{\beta}' A_3 = 0$

(iii) $\tilde{\beta}'(A_2 + A_3) = 0$

c) Condição de estacionariedade.

O modelo (5-3) pode ser escrito como um VAR(1):

$$\xi_t = F\ \xi_{t-1} + v_t \tag{5-4}$$

$$\xi_t = \begin{bmatrix} \triangle y_t \\ \triangle y_{t-1} \\ \beta' y_t \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -(A_2 + A_3) & -A_3 & \alpha \\ I_3 & 0 & 0 \\ -\beta(A_2 + A_3) & -\beta' A_3 & \beta'\alpha + 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \beta'\varepsilon_t \end{bmatrix}$$

O modelo (5-4) satisfaz a condição de estacionariedade em covariância caso todos os autovalores da matriz F encontrem-se fora do círculo unitário.

Um ponto inicial do experimento Monte-Carlo pode consistir na construção da matriz F e na verificação de que seus autovalores estão dentro do círculo unitário. Esta estratégia pode resultar em ampla gama de valores que satisfazem esta condição para a matriz F podendo ter um custo computacional alto.

Neste trabalho, adota-se procedimento alternativo que consiste em encontrar solução analítica dos parâmetros do modelo como função dos autovalores. Ou seja, baseados na escolha de certos autovalores fixados no intervalo de zero (0) a um (1), resolvemos o sistema para encontrar os parâmetros do modelo. No Apêndice, apresentamos discussão mais detalhada sobre a escolha dos parâmetros livres incluindo a solução analítica.

Na construção das séries sintéticas, construímos 100 processos geradores de dados e para cada processo geramos 1000 amostras de 1000 observações cada uma. Para reduzir o impacto dos valores iniciais, tomamos as últimas 100 ou 200 observações. Todos os experimentos são realizados no pacote computacional Matlab.