3
Modelo Econométrico

3.1
Introdução

Neste capítulo, descreve-se o modelo VAR estacionário em covariâncias sujeito às restrições de SCCF. Em seguida, mostra-se o modelo VAR não estacionário com restrições de cointegração e restrições de curto-prazo do tipo WF.

3.2
Modelo VAR estacionário com SCCF

Nesta seção, demonstra-se o procedimento de estimação de um modelo VAR com restrições de SCCF. Hansen (1993) e Tsay (1993) (comentários do artigo Engle e Kozicki, 1993) apontaram que as restrições de SCCF impostas sobre os parâmetros das matrizes do modelo VAR são equivalentes às restrições de posto-reduzido. Para mostrar isto, reescrevemos o modelo VAR como uma regressão de posto-reduzido e em seguida estimamos os parâmetros conforme o procedimento de Anderson (1951).

Considere o modelo VAR estacionário em covariância de ordem p:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + ... + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., T \tag{3-1}$$

em que os erros satisfazem:

– $\varepsilon_t \sim Normal\,(0, \Omega)$,
– $E\,(\varepsilon_t) = 0$;
– $E\,(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \{\Omega$, se $t = \tau$ e $0_{n \times n}$, se $t \neq \tau$, onde Ω é não singular$\}$.

Seja $X_{t-1} = [y'_{t-1}, ...y'_{t-p}]'$ e $\Phi = [A_1, ..., A_p]$, portanto temos:

$$y_t \;\; = \Phi X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., T \tag{3-2}$$

Definição 3.1 *O modelo (3-2) apresenta Correlação Serial de Características Comuns (Serial Correlation Common Feature-SCCF) se existe uma matriz* $\tilde{\beta}$ *de* $(n \times s)$ *e posto* s*, cujas colunas geram o espaço denominado espaço co-característico, tal que* $\tilde{\beta}' y_t = \tilde{\beta}' \varepsilon_t$*, onde* $\tilde{\beta}' \varepsilon_t$ *é um vetor* $s-$*dimensional que é um processo de inovação com respeito à informação ao período* t*, dado por* $\{y_{t-1},\ y_{t-2}, ..., y_1\}$.

Conseqüentemente, existe SCCF se a matriz $\tilde{\beta}$, denominada matriz de vetores co-característicos, satisfaz a seguinte hipótese:

Proposição 3.2 $\tilde{\beta}'\ A_i = 0_{s \times n} \qquad i = 1, ..., p$

3.2.1 Representação do modelo VAR estacionário como uma regressão de posto reduzido

Sobre a hipótese 3.2, o modelo (3-2) tem $posto(\Phi) < n$ (modelo de posto reduzido contido em (2-1)). Dessa forma, a matriz Φ pode ser escrita como o produto de duas matrizes de posto reduzido:

$$\Phi = A\Psi = A[\Psi_1, ..., \Psi_p] \tag{3-3}$$

em que:

– A é uma matriz de dimensão $n \times (n-s)$ e posto $(n-s)$;

– Ψ é uma matriz de dimensão $(n-s) \times n \times p$;

– $\Psi_i, i = 1, ..., p$ são matrizes de $(n-s) \times n$, e posto $(n-s)$.

Logo:

$$y_t \ = A\Psi X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., T \tag{3-4}$$

Como A tem posto $n-s$ então existem s vetores independentes nas colunas de $\tilde{\beta}$ $(n \times s)$, $\tilde{\beta} = A_{\perp}$ ortogonal a A tal que $\tilde{\beta}' y_t = \tilde{\beta}' \varepsilon_t$ é ortogonal ao passado de y_t.

3.2.2
Estimação do modelo de posto-reduzido

Para estimar as matrizes de coeficientes A e Ψ do modelo de posto-reduzido (3-4), considerou-se o procedimento de Anderson (1951) (ver também Anderson, 1988, Johansen, 1995).

Considere os parâmetros $\{A, \Psi, \Omega\}$ a estimar. O logaritmo da função verossimilhança é dado por:

$$\log L\,(A, \Psi, \Omega) = -\frac{1}{2}T\log|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - A\Psi X_{t-1})'\Omega^{-1}(y_t - A\Psi X_{t-1}) \quad (3\text{-}5)$$

e as matrizes dos segundos momentos são:

$$\begin{gathered} m_{00} = \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t y_t' \\ m_{11} = \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}X_{t-1}' \\ m_{01} = \tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t X_t' \quad \text{e} \quad m_{10} = m_{01}' \end{gathered}$$

Para Ψ fixo, é possível estimar A e Ω em (3-4) rodando a regressão de y_t em ΨX_{t-1}.

$$\begin{aligned} \hat{A}(\Psi) &= m_{01}\Psi(\Psi' m_{11}\Psi)^{-1} \\ \hat{\Omega}(\Psi) &= m_{00} - m_{01}\Psi(\Psi' m_{11}\Psi)^{-1}\Psi' m_{10} \\ &= m_{00} - \hat{A}(\Psi)(\Psi' m_{11}\Psi)\hat{A}(\Psi)' \end{aligned}$$

Ao substituir estas estimativas em (3-5), encontra-se:

$$\begin{aligned} L_{\max}^{-2/T}\left(\hat{A}(\Psi), \Psi, \hat{\Omega}(\Psi)\right) &= L_{\max}^{-2/T}(\Psi) \\ &= \left|\hat{\Omega}(\Psi)\right| \\ &= |m_{00} - m_{01}\Psi(\Psi' m_{11}\Psi)^{-1}\Psi' m_{10}| \end{aligned}$$

Esta relação se reduz para[1]:

$$L_{\max}^{-2/T}\left(\hat{A}(\Psi), \Psi, \hat{\Omega}(\Psi)\right) = |m_{00}|\,\frac{|m_{00} - m_{01}\Psi(\Psi' m_{11}\Psi)^{-1}\Psi' m_{10}|}{|\Psi' m_{11}\Psi|} \quad (3\text{-}6)$$

[1]Para mais detalhes, veja Johansen (1995).

Assim a maximização da função (3-5) é equivalente à minimização do termo do lado direito da equação (3-6). Este termo é minimizado resolvendo o problema: $\left|\lambda m_{11} - m_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0$. Os primeiros autovetores correspondem às $n-s$ maiores autovalores que compõem a $(n-s)\times n \times p$ matriz retangular Ψ.

Portanto, podemos escrever Ψ como:

$$\Psi = (\hat{v}_1, ..., \hat{v}_{n-s})\varphi$$

em que

− $(\hat{v}_1, ..., \hat{v}_{n-s})$ são os autovetores correspondentes às $n-s$ maiores autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_{n-s}$ de $\left|\lambda m_{11} - m_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0$.

− e φ é uma matriz de dimensão $(n-s)\times(n-s)$ que pode ser usada como dispositivo de normalização.

Por exemplo, se se pretende realizar a seguinte normalização $\Psi = (I_{n-s}, \Psi_2')'$, pode-se escolher φ como a inversa da matriz que consiste das primeiras $n-s$ filas de $(\hat{v}_1, ..., \hat{v}_{n-s})$.

Resumindo, os parâmetros estimados de (3-5) são dados por:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi} &= (\hat{v}_1, ..., \hat{v}_{n-s})\varphi\\ \hat{A}(\Psi) &= m_{01}\hat{\Psi}(\hat{\Psi}' m_{11}\hat{\Psi})^{-1}\\ \hat{\Omega}(\Psi) &= m_{00} - \hat{A}(\Psi)(\Psi' m_{11}\Psi)\hat{A}(\Psi)'\end{aligned}$$

3.3 Modelo VAR com restrições de curto-prazo e longo-prazo

Nesta seção, mostramos como as restrições de curto-prazo e de longo-prazo são acrescentadas ao modelo em estudo. Para tal, é considerado o vetor autoregressivo Gaussiano de ordem p, conhecido como VAR(p), tal que:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + ... + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3-7}$$

em que:

− y_t é um vetor que contém n variáveis integradas de ordem um, $I(1)$;

− A_i, $i = 1, \ldots, p$ são matrizes de dimensão $n \times n$;

− $\varepsilon_t \sim Normal\,(0, \Omega)$;

− $E\,(\varepsilon_t) = 0$;

$-$ $E(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \{\Omega,$ se $t = \tau$ e $0_{n \times n}$, se $t \neq \tau$, em que Ω é não singular$\}$.
$-$ $y_0, y_{-1}, ..., y_{1-p}$ valores iniciais conhecidos.

O modelo (3-7) pode ser reescrito como:

$$\Pi(L)\; y_t = \varepsilon_t \tag{3-8}$$

em que L representa o operador *lag* e:

$$\Pi(L) = I_n - \textstyle\sum_{i=1}^{p} A_i L^i$$
$$\text{quando L} = 1 \quad \Pi(1) = I_n - \textstyle\sum_{i=1}^{p} A_i$$

3.4 Restrições de longo-prazo

As restrições de longo-prazo referem-se à existência de cointegração. A seguinte hipótese é considerada:

Hipótese 3.3: *A matriz* $\Pi(\cdot)$ *de dimensão* $(n \times n)$ *satisfaz: 1. Posto* $(\Pi(1)) = r$, $0 < r < n$, *tal que* $\Pi(1)$ *pode ser representado como* $\Pi(1) = -\alpha\beta'$, em que α *e* β *são matrizes de posto* r e *dimensão* $(n \times r)$.

2. A equação característica $|\Pi(L)| = 0$ *tem* $n - r$ *raízes iguais a* 1 *e as outras fora do círculo unitário.*

A hipótese 3.3 implica que y_t é cointegrado de ordem $(1,1)$. Os elementos de α são os coeficientes de ajustamento e os vetores colunas de β geram o espaço de cointegração.

3.4.1 Modelo Vetorial de Correção de Erros - VECM

Decompondo a matriz polinomial $\Pi(L) = \Pi(1)L + \Pi^*(L)\Delta$, em que $\Delta \equiv (1 - L)$ é o operador diferença, obtemos o Modelo Vetorial de Correção de Erros (*Vetor Error Correction Model* $-$ VECM):

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-2} + ... + \Gamma_{p-1}\Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \tag{3-9}$$

em que:

$$\alpha\beta' = -\Pi(1)$$
$$\Gamma_j = -\textstyle\sum_{k=j+1}^{p} A_k \qquad j = 1, ..., p-1$$
$$\Gamma_0 = I_n$$

3.5 Restrições de curto-prazo

O modelo VAR(p) pode adicionalmente incluir restrições de curto-prazo como descrito por Vahid e Engle (1993). Consideram-se dois tipos de restrições: SCCF e WF. As restrições de SCCF impostas no VECM implicam restrições sobre todos os parâmetros das matrizes coeficientes, enquanto que as restrições de WF impõem restrições em todas as matrizes coeficientes menos na matriz do termo que leva em conta o espaço de cointegração.

3.5.1 Restrição SCCF

Definição 3.3 *O modelo (3-9) apresenta Correlação Serial de Características Comuns (Serial Correlation Common Feature-SCCF) se existe uma matriz* $\tilde{\beta}$ *de* $(n \times s)$ *e posto* s*, cujas colunas geram o espaço denominado espaço co-característico, tal que* $\tilde{\beta}'(\Delta y_t) = \tilde{\beta}'\varepsilon_t$*, onde* $\tilde{\beta}'\varepsilon_t$ *é um vetor* $s-$*dimensional que é um processo de inovação com respeito à informação ao período* t*, dado por* $\{y_{t-1},\ y_{t-2}, ..., y_1\}$.

Conseqüentemente, existe SCCF no VECM se a matriz co-característica $\tilde{\beta}$ satisfaz as seguintes hipóteses:

Hipótese 3.4: $\tilde{\beta}'\,\Gamma_j = 0_{s\times n} \qquad j = 1, ..., p-1$

Hipótese 3.5: $\tilde{\beta}'\,\alpha\beta' = 0_{s\times n}$

3.5.2 Restrição WF

Hecq, Palm e Urbain (2005) analisaram outro tipo de restrição de características cíclicas comuns, denominado características cíclicas comuns da forma fraca, WF. Esta restrição pode ser vista como uma extensão da forma SCCF, no caso em que as restrições de cointegração sejam consideradas.

Definição 3.4 *O modelo (3-9) apresenta Correlação Serial de Características Comuns da Forma Fraca (WF) se existe uma matriz* $\tilde{\beta}$ *de* $(n \times s)$ *e posto* s*, cujas colunas geram o espaço denominado, espaço co-característico, tal que* $\tilde{\beta}'(\Delta y_t - \alpha\beta' y_{t-1}) = \tilde{\beta}'\varepsilon_t$ *, onde* $\tilde{\beta}'\varepsilon_t$ *é um vetor* $s-$*dimensional que é um processo de inovação com respeito à informação ao período* t*, dado por* $\{y_{t-1},\ y_{t-2}, ..., y_1\}$.

Consequentemente, existe WF no VECM se a matriz co-característica $\tilde{\beta}$, satisfaz a seguinte hipótese:

Hipótese 3.6: $\tilde{\beta}' \, \Gamma_j = 0_{s\times n} \quad for \quad j = 1, ..., p-1$

Note que quando WF é considerada, a hipótese 3.6 não necessariamente é satisfeita, portanto, não é possível assegurar que $\tilde{\beta}'\alpha = 0_{s\times n}$. Em outras palavras, WF impõe uma estrutura mais geral em relação às restrições cíclicas comuns. As restrições do tipo WF são convenientes pois permitem o estudo de cointegração e características cíclicas comuns sem impor a restrição $r+s \leq n$.

3.6 Representação do VECM como uma estrutura de posto-reduzido

Quando o VECM está sujeito às restrições de curto-prazo do tipo WF, todas as matrizes de parâmetros, exceto a matriz de longo prazo, serão de posto reduzido. Portanto, o VECM pode ser representado como uma estrutura de posto-reduzido.

Seja $X_{t-1} = [\Delta y'_{t-1}, ...\Delta y'_{t-p+1}]'$ e $\Phi = [\Gamma_1, ..., \Gamma_{p-1}]$, e substituindo em (3-9) obtemos:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \Phi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3-10}$$

Se a hipótese 3.6 é satisfeita, as matrizes $\Gamma_i, i = 1, ..., p$ serão todas de posto $(n-s)$. Portanto, é possível escrever Φ como:

$$\Phi = A\Psi = A[\Psi_1, ..., \Psi_{p-1}] \tag{3-11}$$

em que:

- A é uma matriz de dimensão $n \times (n-s)$ e posto $(n-s)$;
- Ψ é de dimensão $(n-s) \times n(p-1)$;
- $\Psi_i, i = 1, ..., p-1$ são matrizes de dimensão $(n-s) \times n$ e posto $(n-s)$.

Dada a hipótese 3.6, existe uma matriz $\tilde{\beta}$ de dimensão $n \times s$ tal que $\tilde{\beta}' A = 0$. Isto é, $A = \tilde{\beta}_\perp$ onde $\tilde{\beta}_\perp$ é uma matriz de dimensão $n \times (n-s)$ e posto $(n-s)$ ortogonal ao complemento de $\tilde{\beta}$ com $rank(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}_\perp) = n$.

Reescrevendo o modelo (3-10), temos:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \tilde{\beta}_\perp \left(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{p-1}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \tilde{\beta}_\perp \Psi X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3-12}$$

A representação (3-12) será usada para estimar o VECM sujeito à restrição do tipo WF por meio do algoritmo conhecido como algoritmo *switching* mostrado adiante na seção 4.2.

3.7
Análise de Correlações Canônicas

A estimação do VECM com restrições do tipo WF ocorre mediante a utilização do algoritmo *switching* que segue o procedimento de estimação da regressão de posto-reduzido como sugerido por Anderson (1951).

Existe uma conexão formal entre uma regressão multivariada e a análise canônica como notado por Izenman (1975), Box e Tiao (1977), Tso (1980), e Veleu et al. (1986). Quando uma regressão multivariada tiver todas suas matrizes de coeficientes de posto cheio, esta pode ser estimada pelo procedimento usual de Máxima Verossimilhança ou Mínimos Quadrados. Porém, quando as matrizes de coeficientes não são de posto cheio, não é mais possível usar o procedimento tradicional. Neste caso, o modelo é estimado como uma regressão de posto-reduzido de acordo com o procedimento de Anderson (1951). O uso da análise canônica pode ser considerado como um caso especial da regressão de posto-reduzido. Mais especificamente, a estimação dos parâmetros deste modelo é efetuado através da análise canônica[2]. Portanto, usa-se a expressão $CanCorr\{X_t, Z_t|W_t\}$, que denota as correlações canônicas parciais entre X_t e Z_t: ambos os conjuntos concentrados fora do efeito de W_t. O resultado é a obtenção das correlações canônicas que são representadas pelos autovalores, $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \hat{\lambda}_3 .... > \hat{\lambda}_s$.

O teste estatístico de Johansen é baseado em correlações canônicas. No modelo (3-9), utilizamos a expressão $CanCorr\{\Delta y_t, y_{t-1}|W_t\}$ em que $W_t = [\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}, ..., \Delta y_{t+p-1}]$, que resume o procedimento de regressão de posto-reduzido usado na metodologia de Johansen. Obter as correlações canônicas entre Δy_t and y_{t-1} fora do efeito de W_t significa obter um conjunto de autovalores, $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \hat{\lambda}_3 .... > \hat{\lambda}_s$.

[2] Este procedimento de estimação é conhecido como *Full Information Maximum Likelihood* - FIML

Para testar a significância dos r maiores autovalores, pode ser usado o teste do traço de Johansen(3-13):

$$\xi_r = -T \sum_{i=r+1}^{n} Ln\,(1-\hat{\lambda}_i^2) \qquad\qquad i = 1, ..., n \tag{3-13}$$

em que os autovalores $0 < \hat{\lambda}_n < ... < \hat{\lambda}_1$ são a solução de (3-14)[3].

$$|\lambda m_{11} - m_{10}^{-1} m_{00} m_{01}| = 0 \tag{3-14}$$

e, $m_{ij},\ i,\ j = 0, 1$ são as matrizes dos segundos momentos dos resíduos $\tilde{u}_{0t}$ e $\tilde{u}_{1t}$.

$$\begin{array}{ll} m_{00} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{u}_{0t}\tilde{u}_{0t}' & m_{10} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{u}_{1t}\tilde{u}_{0t}' \\ m_{01} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{u}_{0t}\tilde{u}_{1t}' & m_{11} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{u}_{1t}\tilde{u}_{1t}' \end{array}$$

Ao rodar, por mínimos quadrados, as regressões multivariadas, obtemos os resíduos $\tilde{u}_{0t}$ e $\tilde{u}_{1t}$ abaixo (3-15) e (3-16) respectivamente (ver, Hecq, 2006b; Johansen, 1995). O resultado do Teste de Johansen é uma estimativa superconsistente de β.

$$\Delta y_t = (\Delta y_{t-1}, ...\Delta y_{t-p+1}) + u_{0t} \tag{3-15}$$

$$y_{t-1} = (\Delta y_{t-1}, ...\Delta y_{t-p+1}) + u_{1t} \tag{3-16}$$

Além disso, é possível usar a aproximação de correlação canônica para determinar o posto do espaço co-característico devido às restrições da WF. Trata-se de um teste para a existência do espaço co-característico na forma de combinações lineares das variáveis nas primeiras diferenças, corrigidos pelos efeitos de longo-prazo, e que resultam em um ruído branco (i.e., $\tilde{\beta}'(\Delta y_t - \alpha\beta' y_{t-1}) = \tilde{\beta}'\varepsilon_t$ em que $\tilde{\beta}'\varepsilon_t$ é um ruído branco).

Adotamos a análise canônica, neste trabalho, para estimar, testar e escolher a ordem lag e posto do modelo VAR sujeito às restrições, como mostrado nas próximas seções.

[3]Ver detalhes em Johansen (1995).