A
Parâmetros de Contato

A.1
Teoria de Contato de Hertz: Modelo Elástico Linear

Hà mais de cem anos atrás, Hertz (1882) estudou o crescimento da área de contato como uma função da força normal N aplicada, baseado num modelo elástico linear. Segundo Xydas et al. [38], Hertz levou a cabo experimentos usando lentes de vidro esféricas contra placas de vidro. Usando os resultados experimentais, concluiu que o raio de contato r_c é proporcional à força normal aplicada elevada à potência $\frac{1}{3}$, ou seja: $r_c \propto N^{\frac{1}{3}}$, o que é consistente com os resultados analíticos que derivou baseado no modelo elástico linear.

No caso mais simples, K_C e C_C podem ser considerados constantes, e o amortecimento de contato C_C sempre é expresso como um múltiplo da rigidez de contato: $C_C = \beta K_C$. Valores referenciais desses parâmetros para o aço são adotados como $K_C = 1 \times 10^8 N/m$, baseado na teoria de contato de Hertz, [44]. Também, o coeficiente de proporcionalidade entre a rigidez e o amortecimento de contato é assumido como $\beta = 1 \times 10^{-7} s$.

A.2
Lei da Potência: Modelo Elástico Não Linear

Este modelo é empregado para incluir materiais não lineares, como o silicone, por exemplo. A relação geral entre o raio de contato r_c e a força normal N aplicada é expressada através de [38]:

$$r_c \propto N^{\frac{n}{2n+1}} \tag{A-1}$$

sendo n um expoente de tensão (*strain-hardening factor*) que depende do material. Em geral $0 \leq n \leq 1$, porém, para materiais elásticos lineares $n = 1$ o que corresponde à teoria de contato de Hertz.

Quando o material da viga é silicone, os parâmetros K_C e C_C não podem ser considerados constantes. Um estudo experimental realizado por Hyun-Yong Han et al. [37] revela que a rigidez de contato do silicone satisfaz a seguinte equação:

$$K_C(x) = ax^b \tag{A-2}$$

sendo $a = 1,037$ e $b = 0,827$ parâmetros constantes encontrados por Hyun-Yong Han. Na Eq. (A-2) a rigidez está em N/mm e a penetração x em milímetros; para as simulações numéricas adota-se essa equação.

B
Características e Propriedades do Silicone

Os silicones são polímeros inorgânicos formados por um núcleo de silício e oxigênio (...-Si-O-Si-O-Si-O-...). Pela variação no tamanho dessa cadeia, pode-se manipular as características do material que podem variar desde uma consistência totalmente sólida, até um líquido viscoso. Para determinar o módulo de elasticidade do silicone, foram realizados testes experimentais de tração e de flexão, Fig. B.1. Essas propriedades foram calculadas usando as equações da deformação estática [7], em tração e em flexão, e são mostradas na Tab. 4.4. Além disso, a densidade e o coeficiente

Figura B.1: Provas de tração e flexão estática do silicone.

de atrito também foram calculados experimentalmente e os detalhes são explicados próximos parágrafos. Vale ressaltar que os valores obtidos estão dentro dos limites indicados por outras referências:

– Dow Corning.[1]

– Ides - The Plastic Web.[2]

[1] www.dowcorning.com/content/rubber/rubberprop/rubber_mechanical.asp
[2] www.ides.com/generics/Silicone/Silicone_typical_properties.htm

B.1
Cálculo das Propriedades do Silicone

As características do silicone usado para obter as propriedades mecânicas são: comprimento $0,3m$, diâmetro $11\times10^{-3}m$ e massa $m_s = 29\times 10^{-3}kg$. O cálculo da densidade é direta e resulta: $\rho_s = \frac{m_s}{V} = 1017,2kg/m^3$

B.1.1
Rigidez à Flexão

A equação da flecha estática $f(x)$ de uma viga em balanço, com carga uniformemente distribuída $w_0 = \frac{m_s g}{L} = 0,9483N/m$ está dada através de [7]:

$$f(x) = \frac{w_0 x^2}{24EI}(x^2 + 6L^2 - 4Lx)$$

A flecha máxima da viga resulta $f(x = L) = \frac{w_0 L^4}{8EI}$. No teste, com $L = 0,26m$, a flecha máxima medida resulta $0,048m$, Fig. B.1, com isso: $EI = 1,13 \times 10^{-2}N$.

B.1.2
Rigidez à Tração

Um teste simples é realizado para obter a rigidez à tração, Fig. B.1, e os dados obtidos são mostrados na Tab. B.1. A deformação estática axial

Tabela B.1: Teste de tração do silicone.

Deslocamento (mm)	1,0	1,8	2,3	3,1	4,0	5,2
Massa (kg)	1,0	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
Peso (N)	9,8	19,6	24,5	29,4	39,2	49,1

δ_s de uma barra L devido ao peso P está dada por: $\delta_s = \frac{PL}{EA}$. Logo, usando o gráfico da Fig. B.2, obtém-se $\frac{EA}{L} = 9810N/m$. Conseqüentemente a rigidez axial resulta: $EA = 1,02 \times 10^3 N$

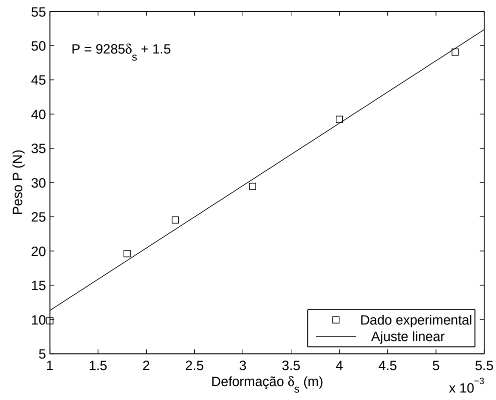

Figura B.2: Teste de tração do silicone.

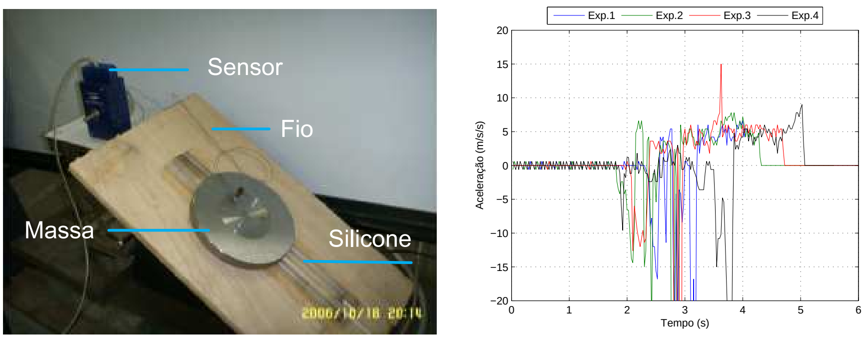

Figura B.3: Provas do plano inclinado.

B.2 Coeficiente de Atrito

Para obter o coeficiente de atrito estático μ_e, entre o silicone e uma superfície de cobre, realiza-se um simples teste, mostrado na Fig. B.3.

O valor do coeficiente de atrito correspondente à situação em que o corpo está na iminência de iniciar o seu movimento. Designa-se por coeficiente de atrito estático e pode ser calculado por: $\mu_e = \tan \alpha_c$. O ângulo crítico medido resulta $\alpha_c \approx 23,11°$, com isso: $\mu_e \approx 0,426$.

Para calcular o coeficiente de atrito cinético μ_c emprega-se a equação: $\sin \alpha_0 - \mu_c \cos \alpha_0 = \frac{a}{g}$. Essa equação resulta das equações do movimento de um corpo que se desliza sobre um plano inclinado que forma um ângulo $\alpha_0 > \alpha_c$ com a horizontal. A aceleração média a do disco, Fig. B.3, medida experimentalmente usando um sensor de rotação PASSPORT, resulta $a \approx 5m/s^2$ quando $\alpha_0 = 50°$. Com isso $\mu_c \approx 0,388$. O disco e o sensor de rotação estão unidos através de um fio de massa desprezível, sendo que o sensor mede a aceleração linear do disco no plano inclinado.

C
Estudo da Convergência

Quando se usam elementos finitos, é necessário estabelecer algum critério sobre a convergência dos resultados numéricos para determinar o número de elementos a serem usados na discretização. No modelo da viga em L, por exemplo, foram obtidos os modos de vibração e freqüências naturais usando diferentes números de elementos na discretização da viga. Portanto, é possível usar o critério das freqüências naturais para saber o número de elementos a usar satisfazendo um erro pré-estabelecido para as freqüências. No entanto, quando estudamos resposta no tempo, o critério das freqüências naturais não é a mais adequada e neste trabalho adota-se o critério sugerido por Sampaio [62].

Para conseguir uma boa aproximação da resposta dinâmica de um sistema é necessária uma medida de convergência, e uma medida da convergência pode ser obtida através do erro relativo, entre uma discretização grosseira e uma fina [62]. Essas medidas do erro, para deslocamentos e/ou velocidades, são computadas em uma posição definida s_d e em um instante dado t_d, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\%erro_{deslocamento} &= 100 \left| \frac{des(s_d, t_d)_{grossa} - des(s_d, t_d)_{fina}}{des(s_d, t_d)_{fina}} \right| \\
\%erro_{velocidade} &= 100 \left| \frac{vel(s_d, t_d)_{grossa} - vel(s_d, t_d)_{fina}}{vel(s_d, t_d)_{fina}} \right|
\end{aligned}
$$

sendo: $des = deslocamento$ e $vel = velocidade$.

A Fig. C.1 mostra a resposta dinâmica para o nó 29 do silicone (caso **b)**) usando vários elementos.

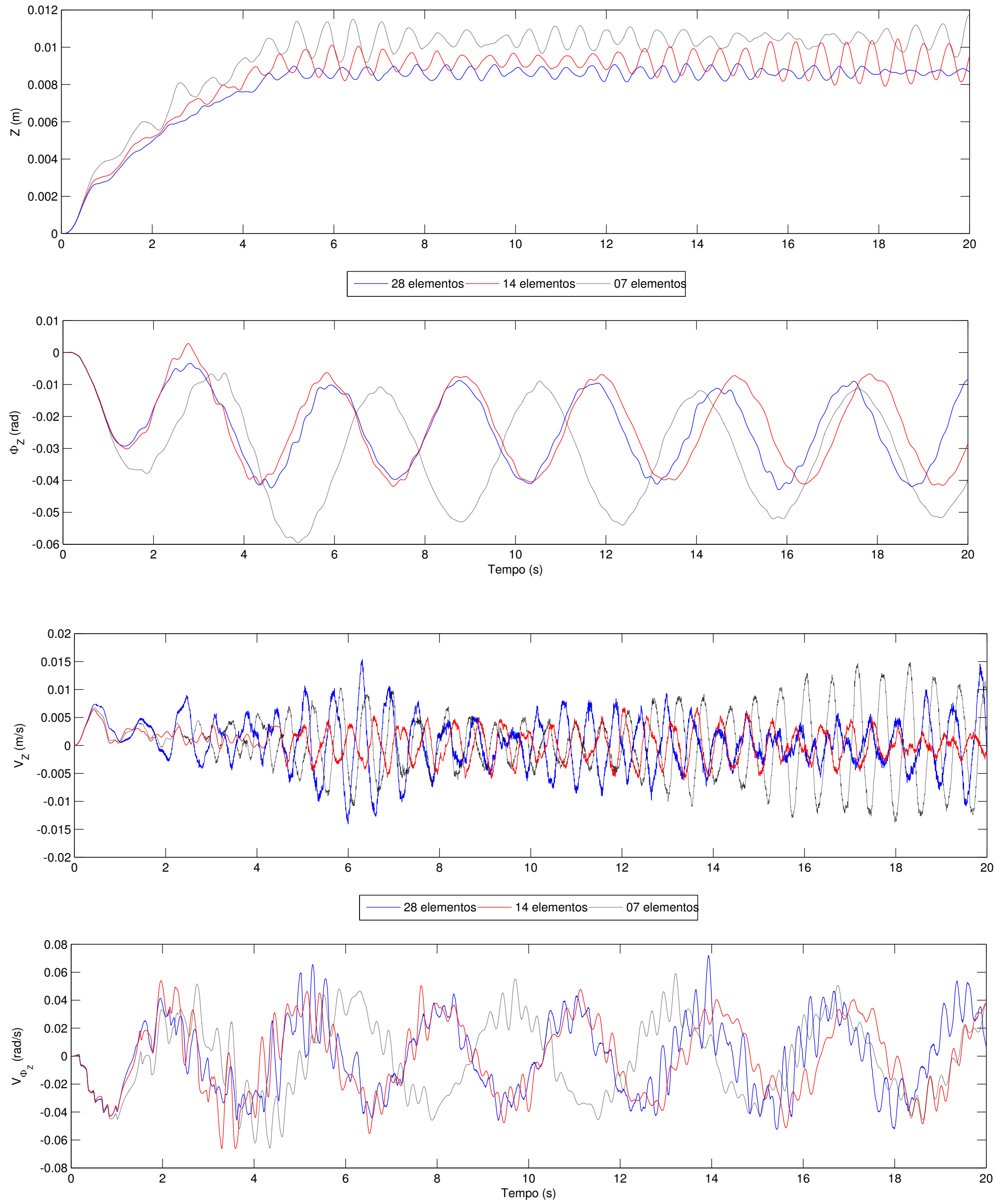

Figura C.1: Resposta dinâmica para vários elementos, caso **b)**.

D
Deslocamentos e Velocidades Virtuais

D.1
Deslocamento virtual

Supondo que uma partícula descansa sobre uma superfície $F(x, y, z) = 0$ num ponto A, e somente pode movimentarse sobre essa superfície, Fig. D.1. Se a partícula se desloca até um ponto B, também na superfície, esse deslocamento é chamado de deslocamento possível, em caso contrário chama-se deslocamento impossível.

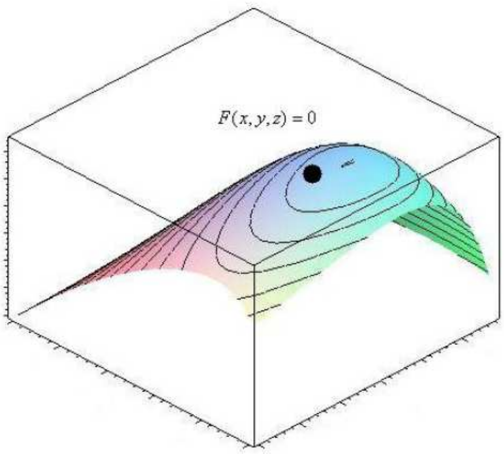

Figura D.1: Movimento de uma partícula sobre uma superfície.

Logo, se a partícula tem uma velocidade $\mathbf{v}$, essa velocidade é chamada de velocidade possível se a partícula se movimenta sobre a superfície, em caso contrario chama-se de velocidade impossível. Portanto, as velocidades possíveis são tangentes à superfície no ponto A .

Finalmente, aqueles deslocamentos que são proporcionais às velocidades possíveis num ponto A, são chamados de deslocamentos virtuais nesse mesmo ponto. Um deslocamento virtual, portanto, tem direção tangente à superfície, mas com uma orientação e magnitude arbitrária. Da Eq. da superfície $F(x, y, z) = 0$, derivando em relação ao tempo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} = 0 \tag{D-1}$$

e representando a velocidade como $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$ e o vetor gradiente como $\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{bmatrix}^T$, a Eq. D-1 fica:

$$\mathbf{v}^T \nabla F = 0 \tag{D-2}$$

portanto, a Eq. D-2 indica que a velocidade é perpendicular à normal da superfície (∇F).

Adotando a notação $\delta\mathbf{s}$ para representar um deslocamento arbitrário do ponto A, e $\delta\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^T$ as projeções desse deslocamento sobre os eixo coordenados, o deslocamento virtual, segundo a definição, é proporcional à possível velocidade $\mathbf{v}$. Portanto, $\delta\mathbf{s} = \mathbf{v}$ será um deslocamento virtual. Finalmente, as projeções do deslocamento virtual satisfazem a seguinte equação:

$$\delta\mathbf{s}^T \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 \tag{D-3}$$

D.2
Velocidade virtual

São velocidades possíveis exatamente na direção em que o movimento do partícula material pode acontecer, ou seja, respeitando as equações de vínculo, i.e. pode-se movimentar somente sobre a superfície prescrita por $F(x, y, z) = 0$. A essas velocidades virtuais representamos como $\delta\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \delta\dot{x} & \delta\dot{y} & \delta\dot{z} \end{bmatrix}^T$ e também satisfazem a Eq. D-3:

$$\delta\dot{\mathbf{s}}^T \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\delta\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\delta\dot{z} = 0 \tag{D-4}$$

Bibliografia

[1] BANACH, S.. **Mechanics**. Warszawa - Wroclaw, 1951.

[2] NEWMARK, N. M.. **A method of computation for structural dynamics**. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 85:67–94, 1959.

[3] CUNNINGHAM, R. A.. **Analysis of downhole measurements of drill string forces and motions**. Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, p. 208–216, May 1968.

[4] DAREING, D. W.; LIVESAY, B. J.. **Longitudinal and angular drill-string vibrations with damping**. Journal Of Engineering For Industry, p. 671–679, 1968.

[5] MEIROVITCH, L.. **Methods of Analytical Dynamics**. McGraw-Hill, 1970.

[6] FONSECA, A.. **Curso de Mecânica - Dinâmica**. Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[7] CRANDALL, S. H.; DAHL, N. C. ; LARDNER, T. J.. **An Introduction to the Mechanics of Solids**. McGraw-Hill, 1978.

[8] CHEUNG, Y. K.; YEO, M. F.. **A Practical Introduction to Finite Element Analysis**. PITMAN, 1979.

[9] BATHE, K. J.. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Prentice-Hall, 1982.

[10] NAYFEH, A. H.. **Problems in Perturbation**. Wiley-Interscience, 1985.

[11] LALANNE, L.. **Rotordynamics**. Chapman and Hall, 1985.

[12] SMITH, G. D.. **Numerical Solution Of Partial Differential Equations: Finite Difference Method**. Oxford University Press, 1985.

[13] WOLF, S. F.; ZACKSENHOUSE, M. ; ARIAN, A.. **Field measurements of downhole drillstring vibration**. Drill ConferencePaper IADC/SPE 14330, Las Vegas, 1985.

[14] SIMO, J. C.. **A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49:55–70, 1985.

[15] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L.. **A three-dimensional finite-strain model. part ii: Computational aspects**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58:79–116, 1986.

[16] BRUEL-KJAER. **Structural testing part 2: Modal analysis and simulation**. http://www.bksv.nl/?ID=3618, 1988.

[17] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L.. **On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66:125–161, 1988.

[18] JANSEN, J. D.. **Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars**. Society Of Petroleum Engineers, SPE 20930:435–448, 1992.

[19] JEI, Y. G.; LEE, C. W.. **Does curve veering occur in the eigenvalue problem of rotors?** Journal of Vibrations and Acustics, Trans. ASME, 114:32–36, January 1992.

[20] JANSEN, J. D.. **Nonlinear Dynamics of Oilwell Drillstrings**. PhD thesis, Delft University of Technology, 1993.

[21] DUNAYEVSKY, V. A.; ABBASSIAN, F. ; JUDZIS, A.. **Dynamic stability of drillstrings under fluctuating weight on bit**. SPE Drilling and Completion, p. 84–92, June 1993.

[22] CRISFIELD, M. A.; SHI, J.. **A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics**. International Journal for numerical Methods in Engineering, 37:1897–1913, 1994.

[23] ANTMAN, S. S.. **Nonlinear Problems of Elasticity**. Springer-Verlag, 1995.

[24] STEINDL, A.; TROGER, H.. **Nonlinear three-dimensional oscillations of elastically constrained fluid conveying viscoelastic tubes with perfect and broken o(2)-symmetry**. Nonlinear Dynamics, 7(2):165–193, 1995.

[25] DYKSTRA, M. W.. **Nonlinear Drillstring Dynamics**. PhD thesis, The University of Tulsa, Oklahoma, 1996.

[26] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings,**. Journal of Sound and Vibration, 195(4):617–627, 1996.

[27] INMAN, D. J.. **Engineering Vibration**. Prentice-Hall Inc., 1996.

[28] RUBIN, M. B.. **An intrinsic formulation for nonlinear elastic rods**. Int. J. Solids Structures, 34:4191–4212, 1997.

[29] PAZ, M.. **Structural Dynamics**. Chapman and Hall, 1997.

[30] KHULIEF, Y. A.; MOHIUDDIN, M. A.. **On the dynamic analysis of rotors using modal reduction**. Finite Elements in Analysis and Design, 26:41–55, 1997.

[31] TUCKER, R. W.; WANG, C.. **The excitation and control of torsional slip-stick in the presence of axial vibration**. Lancsos University, 1997.

[32] DUNAYEVSKY, V. A.; ABBASSIAN, F.. **Application of stability approach to torsional and lateral bit dynamics**. SPE Drilling and Completion, p. 99–107, June 1998.

[33] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled torsional and bending vibrations of drillstrings subject to impact with friction**. Journal of Sound and Vibration, 215(1):167–181, 1998.

[34] SHABANA, A. A.. **Dynamics of Multibody Systems**. Cambridge University Press, 1998.

[35] LIEBICH, R.. **Rub induced non-linear vibrations considering the thermo-elastic effect**. 5th International Conference on Rotor Dynamics of the IFTOMM, Darmstadt, p. 802–815, 1998.

[36] TUCKER, R. W.; WANG, C.. **An integrated model for drill-string dynamics**. Journal of Sound and Vibration, (224):123–165, 1999.

[37] HYUN-YONG HAN, S. K.. **Analysis of stiffness of human fingertip and comparison with artificial fingers**. IEEE, 0-7803-5731, 1999.

[38] XYDAS, N.; KAO, I.. **Modeling of contact mechanics and friction limit surfaces for soft fingers in robotics, with experimental**

results. The International Journal of Robotics Research, 18(9):941–950, 1999.

[39] LEINE, R. I.. **Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type**. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2000.

[40] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Coupled torsional and bending vibrations of actively controled drillstrings**. Journal of Sound and Vibration, 234(1):67–83, 2000.

[41] RAJALINGHAM, C.; RAKHEJA, S.. **Analysis of impact force variation during collision of two bodies using a single dof system**. Journal of Sound and Vibration, 229(4):823–835, 2000.

[42] WOLGEMUTH, C. W.; POWERS, T. R. ; GOLDSTEIN, R. E.. **Twirling and whirling: Viscous dynamics of rotating elastic filaments**. Physical Review Letters, 84(7):1623–1626, 2000.

[43] YIGIT, A. S.; CHRISTOFOROU, A. P.. **Active control of stick-slip vibrations: The role of fully coupled dynamics**. Society Of Petroleum Engineers, SPE 68093(1):167–181, 2001.

[44] ZAPOMEL, J.; FOX, C. H. J. ; MALENOVSKY, E.. **Numerical investigation of a rotor system with disc-housing impact**. Journal of Sound and Vibration, 243(2):215–240, 2001.

[45] GÉRADIN, M.; CARDONA, A.. **Flexible Multibody Dynamics**. John Wiley and Sons, 2001.

[46] PAI, D. K.. **Strands: Interactive simulation of thin solids using cosserat models**. Eurographics, 21(3), 2002.

[47] POLAK, M. A.; LASHEEN, A.. **Mechanical modelling for pipes in horizontal directional drilling**. Tunnelling and Underground Space Technology, 16(Supp. 1):S47–S55, 2002.

[48] BAZOUNE, A.; KHULIEF, Y. A. ; STEPHEN, N. G.. **Shape functions of three-dimensional timoshenko beam**. Journal of Sound and Vibration, 259(2):473–480, 2003.

[49] ALAMO, F. C.. **Dinâmica de um rotor vertical em balanço com impacto**. Master's thesis, PUC-Rio, 2003.

[50] HAIR, J. D.. **Analysis of theoretical vs actual hdd pulling loads**. ASCE, Pipelines 2003, Conference, 2003.

[51] WEBER, H. I.. **Rotações elementares, quaternions e soluções do problema inverso**. II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - Dincon 2003, S. J. dos Campos, SP-Brasil, 2003.

[52] LIU, D.; CAO, D. Q. ; WANG, C.. **Computational cosserat dynamics in mems components modeling**. Computational Mechanics, 2004. WCCM and APCOM'04, China.

[53] MADDOCKS, J. H.. **Mathematical Modelling of DNA**. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2004.

[54] CHEN, S.. **Linear and Nonlinear Dynamics of Drillstrings**. PhD thesis, Université de Liège, Belgium, 2004.

[55] FRANCA, L. F. P.. **Perfuração Percusiva-Rotativa Auto-Excitada Em Rochas Duras**. PhD thesis, PUC-Rio, 2004.

[56] BENECKE, S.; VAN VUUREN, J. H.. **Modelling torsion in an elastic cable in space**. Applied Mathematical Modelling, 29:117–136, 2005.

[57] ALAMO, F.; WEBER, H. I.. **Displacement functions for rods**. XXVI CILAMCE, Guarapari, ES-Brasil, Proceedings in CD, 2005.

[58] KHULIEF, Y. A.; AL-NASER, H.. **Finite element dynamic analysis of drillstrings**. Finite Elements in Analysis and Design, 41:1270–1288, 2005.

[59] RITTO, T. G.. **Análise de vibrações de sistemas lineares e não-lineares no contexto da formulação fraca, análise modal e decomposição de karhunen-loève**. Master's thesis, PUC-Rio, 2005.

[60] ALAMO, F. C.; WEBER, H. I.. **Stick-slip analysis in drill strings**. XVIII COBEM 2005, Ouro Preto, MG-Brasil, Proceedings in CD, 2005.

[61] KE, C. H.; PUGNO, N.; PENG, B. ; ESPINOSA, H. D.. **Experiments and modeling of carbon nanotube-based nems devices**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53:1314–1333, 2005.

[62] SAMPAIO, R.; PIOVAN, M. T. ; LOZANO, G. V.. **Stick-slip patterns in coupled extensional/torsional vibrations of drill-strings**. MECOM 2005, VIII Congreso Argentino de Mecánica Computacional, XXIV, 2005.

[63] SCHÖMER, E.. **Interactive simulation of one-dimensional flexible parts**. ACM Solid and Physical Modeling Symposium, Wales, UK, 2006.

[64] CARAPAU, F.; SEQUEIRA, A.. **1d models for blood flow in small vessels using the cosserat theory**. WSEAS Transactions on Mathematics, 5(1):54–62, 2006.

[65] WEBER, H. I.. **Raciocinando Dinâmica de Rotação: Fundamentos para o seu entendimento**. Livro em elaboração, PUC-Rio, 2006.

[66] CAO, D.; LIU, D. ; WANG, C. H.-T.. **Three-dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach**. International Journal of Solids and Structures, 43:760–783, 2006.

[67] BACHSCHMID, N.; PENNACCI, P.. **Advances in Vibration Control and Diagnostics - VICONDIA**. Polimetrica, 2006.

[68] ALAMO, F.; WEBER, H. I. ; ESPINOZA, H. S.. **Directional drillstring dynamics**. European Conference on Computational Mechanics, Lisbon, p. 1–21, 2006.