

3

Dinâmica da Viga de Cosserat

3.1

Introdução

Neste capítulo, a dinâmica de uma viga esbelta, intrinsecamente reta, é estudada sistematicamente para problemas tridimensionais usando a viga de Cosserat descrita no capítulo anterior. A modelagem leva em conta as deformações de flexão, extensão-compressão e torção da viga, permitindo assim, o estudo dos vários tipos de deformações. O problema fundamental quando se usa o MEF é a escolha das funções de deslocamento. No entanto, usando a viga de Cosserat, esse problema é contornado empregando as funções de deslocamento obtidas da equação do equilíbrio estático. Essas funções de deslocamento não lineares são função dos deslocamentos e rotações nodais genéricos da viga. Logo, usando a equação de Lagrange, formada pelas expressões das energias cinética e potencial da viga, são derivadas as equações do movimento não lineares da viga. A partir da equação do movimento da viga é possível achar as equações de movimento de um sistema que serão aproximadas numericamente usando o método de Newmark. É necessário ressaltar que quando se usa o elemento de Cosserat, que leva em conta todas as não linearidades geométricas do sistema, alta precisão da resposta dinâmica pode ser obtida dividindo o sistema em uns poucos elementos, número que é bem menor que o tradicional MEF, onde as funções de interpolação, em geral, são funções simples tais como polinômios de baixa ordem. Essa é a principal vantagem de usar a viga de Cosserat. Resumindo, a viga de Cosserat fornece uma forma conveniente para a modelagem de estruturas esbeltas.

3.2 Velocidades

Para a análise dinâmica, o movimento da viga de Cosserat pode ser estudado considerando a evolução, no tempo, dos deslocamentos e rotações nodais da viga. Logo, as funções de deslocamento da viga de Cosserat, Eq. (2-44), variáveis no tempo são:

$$\begin{aligned}x(s, t) &= x_1(s, t) + x_2(s, t) \\y(s, t) &= y_1(s, t) + y_2(s, t) \\z(s, t) &= s + z_1(s, t) + z_2(s, t) \\\varphi(s, t) &= \varphi_1(s, t) + \varphi_2(s, t)\end{aligned}$$

O movimento no espaço, de uma seção genérica da viga, pode ser visto como o movimento de um corpo rígido no espaço. Conseqüentemente, o movimento de qualquer seção transversal da viga, localizada a uma distância s , será caracterizada por uma velocidade de translação e uma velocidade angular.

3.2.1 Velocidade de Translação

A velocidade de translação, da seção transversal da viga, é definida pela derivada do vetor posição, Eq. (2-1), em relação ao parâmetro tempo t :

$$\frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} \right]^T \quad (3-1)$$

3.2.2 Velocidade Angular

Para calcular a velocidade angular da seção transversal na coordenada s (que possui uma velocidade de rotação própria Ω), ela deverá ser considerada como um corpo rígido com um vetor de velocidade angular $\mathbf{w}(s, t)$.

O vetor de velocidade angular $\mathbf{w}(s, t)$ é calculado usando três rotações elementares, como foi definido na Eq. (2-15):

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\phi_x(\mathbf{e}_1)} Q(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \xrightarrow{\phi_y(\mathbf{e}'_2)} R(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3) \xrightarrow{\phi_z + \Omega t(\mathbf{e}''_3)} S(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$$

Das rotações elementares, as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned} {}^F\mathbf{w}_Q &= {}^Q\mathbf{w}_Q = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^Q\mathbf{w}_R &= {}^R\mathbf{w}_R = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}_y & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^R\mathbf{w}_S &= {}^S\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi}_z + \Omega \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

logo, as matrizes de rotação, para ângulos de flexão pequenos ϕ_x e ϕ_y (porque a viga está confinada dentro de uma superfície) são:

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\phi_x \\ 0 & \phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^Q\mathbf{T}^R = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^R\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z + \Omega t) & -\sin(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ \sin(\phi_z + \Omega t) & \cos(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o vetor de velocidade angular da seção transversal, válido para qualquer sistema de referência, é dado por: ${}^F\mathbf{w}_S = {}^F\mathbf{w}_Q + {}^Q\mathbf{w}_R + {}^R\mathbf{w}_S$. Na base (S) , solidário à seção transversal, ela é expressa como:

$${}^S\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x \cos(\phi_z + \Omega t) + \dot{\phi}_y \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \dot{\phi}_y \cos(\phi_z + \Omega t) - \dot{\phi}_x \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix}$$

e para pequenos ângulos de torção ϕ_z , resulta:

$${}^S\mathbf{w} = {}^S\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x(\cos \Omega t - \phi_z \sin \Omega t) + \dot{\phi}_y(\sin \Omega t + \phi_z \cos \Omega t) \\ \dot{\phi}_y(\cos \Omega t - \phi_z \sin \Omega t) - \dot{\phi}_x(\sin \Omega t + \phi_z \cos \Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

3.3

Equações de Movimento da Viga de Cosserat

Nesta parte emprega-se a equação de Lagrange para formular a equação de movimento da viga de Cosserat.

3.3.1

Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, possivelmente, é o mais famoso princípio variacional da mecânica. Esse princípio, que considera o movimento do sistema como um todo entre dois instantes de tempo, t_1 e t_2 , é um princípio integral (\int) e reduz o problema dinâmico à investigação de uma integral escalar definida. Essa formulação tem a vantagem de ser invariante, ou seja, as expressões dos integrandos podem ser escritos em qualquer sistema de referência.

Para um sistema contínuo, no qual o movimento é definido por coordenadas que são funções não apenas do tempo, mas também de coordenadas espaciais, o princípio de Hamilton estendido é dado através da seguinte equação variacional [5]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \overline{\delta W}) dt = 0 \quad (3-3)$$

sendo T a energia cinética do sistema e $\overline{\delta W}$ é conhecido como o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas sobre o sistema.

Se o sistema está sobre a ação de algumas forças que são deriváveis de alguma função potencial $-U$ e outras não, o trabalho virtual realizado pelas forças pode separar-se na forma:

$$\overline{\delta W} = \delta W^P + \overline{\delta W}^{NP} = -\delta U + \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$$

sendo $\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \ \cdots \ Q_n]^T$ o vetor de forças generalizadas não deriváveis de alguma função potencial (não conservativas) e $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas. Introduzindo $\overline{\delta W}$ na Eq. (3-3), ela resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}) dt = 0$$

e usando a definição Lagrangiana ($L = T - U$), as equações de acima levam

a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-4)$$

Para calcular as forças generalizadas \mathbf{Q} , considera-se o caso em que existe um vetor de força \mathbf{F} , que não é derivável de alguma função potencial, logo, o trabalho virtual realizado por essa força é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \delta \hat{\mathbf{r}} \quad (3-5)$$

sendo $\delta \hat{\mathbf{r}}$ o deslocamento virtual de $\hat{\mathbf{r}}$ e:

$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \left[\hat{r}_1(\mathbf{q}) \quad \hat{r}_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \hat{r}_m(\mathbf{q}) \right]^T$ expressa a variável dependente em termos das coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \left[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n \right]^T$. A definição do termo *deslocamento virtual*, baseada no livro de Banach [1], é esclarecida no anexo D.

O deslocamento virtual $\delta \hat{\mathbf{r}}$ pode ser obtido da seguinte equação [5]:

$$\delta \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (3-6)$$

sendo $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}$ conhecida como a matriz Jacobiana.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Introduzindo a Eq. (3-6) em (3-5) obtém-se:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (3-8)$$

O trabalho virtual, no entanto, também pode ser calculado como o produto das n forças generalizadas $\mathbf{Q} = \left[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_n \right]^T$ atuando sobre os deslocamentos virtuais generalizados $\delta \mathbf{q}$:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (3-9)$$

Posteriormente, comparando as Eqs. (3-8) e (3-9), conclui-se que as forças generalizadas são da forma:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3-10)$$

3.3.2

Forças na Viga de Cosserat

Supõe-se que as forças que atuam no elemento são compostas de três partes: a primeira é consequência da interação dos elementos vizinhos, a segunda é devido à ação de forças externas concentradas que atuam nos nós e por último têm-se as forças externas distribuídas com direções fixas e intensidade prescrita.

Segundo a definição de forças, no princípio dos trabalhos virtuais, elas têm que estar definidas na base inercial (F) devido aos deslocamentos nodais generalizados \mathbf{q} da viga, vide Fig. (2.4), estarem definidos em relação a ela.

$$\mathbf{q} = \left[x_a \quad y_a \quad z_a \quad \phi_{xa} \quad \phi_{ya} \quad \phi_{za} \quad x_b \quad y_b \quad z_b \quad \phi_{xb} \quad \phi_{yb} \quad \phi_{zb} \right]^T \quad (3-11)$$

Forças e momentos internos

Supõe-se que a ação nodal ${}^F \mathbf{p}^i(t)$, constituída por forças internas f_{jk}^i e momentos internos l_{jk}^i , seja dada por:

$${}^F \mathbf{p}^i(t) = \begin{bmatrix} {}^F \mathbf{p}_a^i(t) \\ {}^F \mathbf{p}_b^i(t) \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

sendo, para $k = a, b$:

$${}^F \mathbf{p}_k^i(t) = \left[f_{xk}^i(t) \quad f_{yk}^i(t) \quad f_{zk}^i(t) \quad l_{xk}^i(t) \quad l_{yk}^i(t) \quad l_{zk}^i(t) \right]^T$$

É necessário ressaltar que as forças e momentos internos anulam-se quando o sistema é considerado como um todo, devido ao princípio de ação-reação.

Forças e momentos externos concentrados

De forma análoga, supõe-se que ${}^F \mathbf{p}^c(t)$ seja constituído por forças f_{jk}^c e momentos l_{jk}^c externos concentrados nos nós:

$${}^F \mathbf{p}^c(t) = \begin{bmatrix} {}^F \mathbf{p}_a^c(t) \\ {}^F \mathbf{p}_b^c(t) \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

sendo, para $k = a, b$:

$${}^F \mathbf{p}_k^c(t) = \left[f_{xk}^c(t) \quad f_{yk}^c(t) \quad f_{zk}^c(t) \quad l_{xk}^c(t) \quad l_{yk}^c(t) \quad l_{zk}^c(t) \right]^T$$

No caso particular da coluna de perfuração simplificada, as forças concentradas são aquelas devida ao impacto, como mostradas na Fig. 3.1.

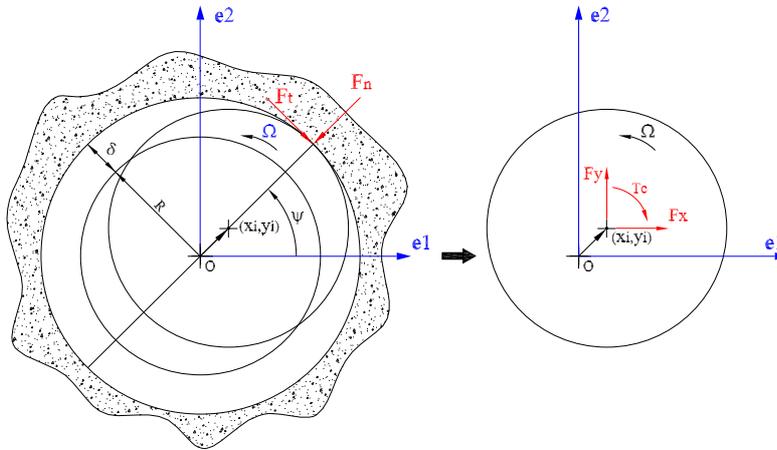


Figura 3.1: Interação com a parede do poço.

As restrições do poço são consideradas aplicando forças de contato nos nós cujo deslocamento, instantaneamente, escapa da restrição imposta pelo poço. A interação entre a coluna e o poço é modelada como um impacto inelástico, portanto, emprega-se um modelo visco-elástico. Escolhe-se o modelo de Kelvin-Voigt devido à facilidade de implementação [49]. Conseqüentemente, as forças normal, tangencial e o torque induzido, devido ao atrito entre a coluna e o poço, são:

$$\begin{aligned} F_n &= K_C \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \delta \right) + C_C \left(\sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2} \right) \\ F_t &= \mu F_n \\ T_c &= F_t R \end{aligned} \quad (3-14)$$

Nas equações acima, K_C e C_C representam os coeficientes de rigidez e amortecimento de contato, respectivamente, μ é o coeficiente de atrito dinâmico, δ é a folga radial e o deslocamento do nó i está representado por (x_i, y_i) .

Em geral, a rigidez e o amortecimento de contato são funções complexas das tensões e deformações na área de contato. Conseqüentemente, eles dependem do deslocamento e da velocidade do nó na direção radial.

$$K_C = K_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i), \quad C_C = C_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i)$$

No caso mais simples, K_C e C_C podem ser considerados constantes, e o amortecimento de contato C_C sempre é expresso como um múltiplo da rigidez de contato: $C_C = \beta K_C$. Valores referenciais desses parâmetros para

o aço são adotados como $K_C = 1 \times 10^8 N/m$, baseado na teoria de contato de Hertz, [44]. Para materiais não lineares como o silicone, por exemplo, existe uma relação não linear do tipo $K_C(\Delta) = a\Delta^b$, sendo $\Delta = (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \delta)$ a penetração no silicone durante o contato; essa equação foi encontrada experimentalmente por Hyun-Yong Han et al. [37] e detalha-se no anexo A. Por outro lado, o coeficiente de proporcionalidade entre a rigidez e o amortecimento de contato é suposto como $\beta = 1 \times 10^{-7} s$.

As forças de impacto, Eq. 3-14, escritas na base (F) resultam:

$${}^F \mathbf{F}_{impacto} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} (\mu y_i - x_i) \\ -\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} (\mu x_i + y_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_c \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Precessão direta e retrógrada

A partir da Fig. 3.1 é possível reconhecer se algum nó da coluna está realizando precessão direta ou retrograda, usando o ângulo ψ_i . Da geometria da figura em questão, o ângulo de precessão ψ está dado por:

$$\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad \therefore \quad \dot{\psi}_i = \frac{x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \quad (3-16)$$

Logo, se $\dot{\psi}_i > 0$ o nó está realizando precessão direta em caso contrário ele realiza precessão retrograda.

Forças e momentos distribuídos

Finalmente, as forças distribuídas (ξ_i) e os momentos distribuídos (η_i) sobre a viga podem ser expressos como:

$${}^F \bar{\Gamma}(t) = \left[\xi_x(t) \quad \xi_y(t) \quad \xi_z(t) \quad \eta_x(t) \quad \eta_y(t) \quad \eta_z(t) \right]^T$$

Logo, usando a Eq. (3-8), o trabalho virtual realizado pelas forças e momentos distribuídos ${}^F \bar{\Gamma}(t)$ tem a forma:

$$\overline{\delta W}^d = \int_0^L \left({}^F \bar{\Gamma}^T \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \mathbf{q} ds$$

sendo $\bar{\mathbf{r}} = \left[x(\mathbf{q}, s) \ y(\mathbf{q}, s) \ z(\mathbf{q}, s) \ \phi_x(\mathbf{q}, s) \ \phi_y(\mathbf{q}, s) \ \phi_z(\mathbf{q}, s) \right]^T$ a variável dependente e o vetor de variáveis generalizadas \mathbf{q} está dado pela Eq. (3-11).

Por conveniência, as forças nodais equivalentes (forças generalizadas), devidas às cargas distribuídas, podem ser escritas como:

$${}^F \mathbf{p}^d(t) = \int_0^L \left({}^F \bar{\Gamma}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T ds = \begin{bmatrix} {}^F \mathbf{p}_a^d(t) \\ {}^F \mathbf{p}_b^d(t) \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

sendo, para $k = a, b$:

$${}^F \mathbf{p}_k^d(t) = \begin{bmatrix} f_{xk}^d(t) & f_{yk}^d(t) & f_{zk}^d(t) & l_{xk}^d(t) & l_{yk}^d(t) & l_{zk}^d(t) \end{bmatrix}^T$$

Para modelar a coluna simplificada, consideram-se dois tipos de cargas distribuídas: devidas à gravidade e devidas ao desbalanceamento.

Em relação à **gravidade**, a massa distribuída na viga, que forma um ângulo γ com a vertical, resulta em cargas axiais e transversais distribuídas, como mostrado na Fig. 3.2. Logo, pode-se escrever:

$${}^F \bar{\Gamma}^{gravity} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\xi_y^g = -\rho Ag \sin \gamma$ e $\xi_z^g = \rho Ag \cos \gamma$.

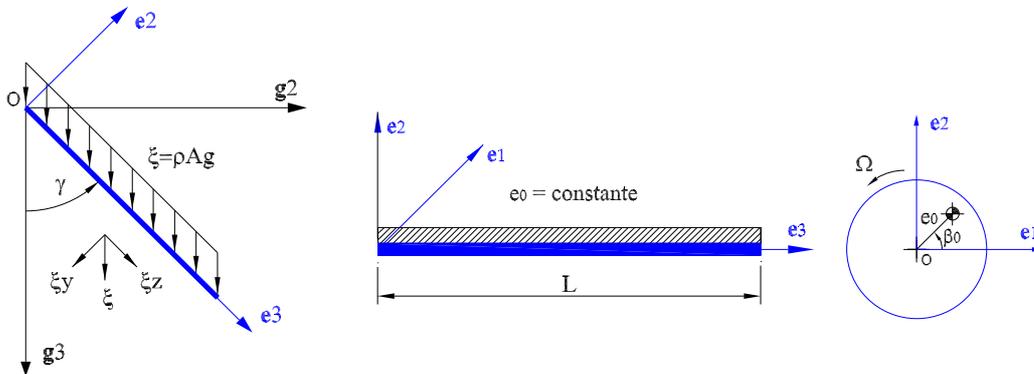


Figura 3.2: Forças de gravidade e desbalanceamento.

Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente devido à gravidade resulta:

$${}^F \mathbf{p}_{gravity}^d = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & -\frac{L}{6} \xi_y^g & 0 & 0 & 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & \frac{L}{6} \xi_y^g & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Um elemento da coluna não está balanceado se o centro de gravidade de uma seção transversal não coincide com o seu centro de rotação. A

distância entre o centro de rotação e o centro de gravidade é a excentricidade e_0 e o lugar geométrico dos pontos que contém o centro de gravidade de cada seção transversal do elemento forma a distribuição de excentricidades do elemento, como mostrado na Fig. 3.2. Para simplificar, considera-se que a distribuição da excentricidade seja constante.

Se o elemento viga leva em conta o desbalanceamento, existe uma força centrífuga da forma $\rho A g e_0 \Omega^2$, conseqüentemente:

$${}^F \bar{\mathbf{I}}^{unbalance}(t) = \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

sendo:

$$\begin{aligned} \xi_x^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta_0) \\ \xi_y^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta_0) \end{aligned}$$

Nas expressões acima, as constantes e_0 e β_0 representam a excentricidade da viga e a posição angular inicial do centro de gravidade, respectivamente. Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente, devida ao desbalanceamento, resulta:

$${}^F \mathbf{p}_{unbalance}^d = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & -\frac{L}{6} \xi_y^u & \frac{L}{6} \xi_x^u & 0 & \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & \frac{L}{6} \xi_y^u & -\frac{1}{6} \xi_x^u L & 0 \end{bmatrix}^T$$

Logo, considerando as forças de gravidade e desbalanceamento, a força nodal equivalente devido às cargas distribuídas resulta:

$${}^F \mathbf{p}^d = {}^F \mathbf{p}_{gravity}^d + {}^F \mathbf{p}_{unbalance}^d$$

Para terminar, o trabalho virtual total, realizado pelas três forças Eq. (3-12), (3-13) e (3-17), é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = ({}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t))^T \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$$

Por conseguinte:

$$\mathbf{Q} = {}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t) \quad (3-18)$$

3.3.3

Energias Cinética e Potencial da Viga

Em relação à Eq. (2.1), o movimento da viga envolve duas velocidades: a velocidade de translação da curva de centróides $\frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s,t)}{\partial t}$ e a velocidade angular da seção transversal $\mathbf{w}(s,t)$. Logo, a energia cinética, por unidade

de comprimento, está dada através de:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \frac{\partial {}^F \mathbf{r}^T(s, t)}{\partial t} \mathbf{M}(s) \frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} {}^S \mathbf{w}^T(s, t) {}^S \mathbf{I}(s) {}^S \mathbf{w}(s, t) \quad (3-19)$$

sendo $\mathbf{M}(s)$ e ${}^S \mathbf{I}(s)$ as matrizes de massa e inércia com componentes não nulas $M_1 = M_2 = M_3 = \rho A(s)$ e $I_1 = \rho \Gamma_1(s)$, $I_2 = \rho \Gamma_2(s)$, $I_3 = \rho \Gamma_3(s)$ e a velocidade angular da secção transversal, escrita na base (S) , está dada pela Eq. (3-2).

Por outro lado, considerando pequenas deformações, a energia potencial elástica, por unidade de comprimento, pode ser expressa em termos dos vetores de deformação $\mathbf{v}(s, t)$ e $\mathbf{u}(s, t)$ como:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} {}^S \mathbf{v}^T(s, t) {}^S \mathbf{K}(s) {}^S \mathbf{v}(s, t) + \frac{1}{2} {}^S \mathbf{u}^T(s, t) {}^S \mathbf{J}(s) {}^S \mathbf{u}(s, t) \quad (3-20)$$

sendo que as componentes do vetor de deformação linear são: $v_1(s, t) = v_2(s, t) = 0$ e $v_3(s, t) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} \right|$, como discutido na secção 2.6.1. Por outro lado, o vetor de deformação angular, Eq. (2-10), está dado pela relação:

$${}^S \mathbf{u}(s, t) = \frac{1}{2} {}^S \tilde{\mathbf{d}}_i(s, t) \frac{\partial {}^S \mathbf{d}_i(s, t)}{\partial s}$$

Logo, as densidades de energia cinética, Eq. (3-19), e energia potencial, Eq. (3-20), estão expressas em função dos deslocamentos nodais $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$ como $\bar{T} = \bar{T}(s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $\bar{U} = \bar{U}(s, \mathbf{q})$ e a função Lagrangiana resulta:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_0^L (\bar{T}(s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \bar{U}(s, \mathbf{q})) ds \quad (3-21)$$

Em termos da Lagrangiana, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L$, e usando o princípio do trabalho virtual, as equações de Lagrange estão dadas pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j^i + p_j^c + p_j^d, \quad j = 1, \dots, 12 \quad (3-22)$$

Usando a equação acima, para uma configuração geral com deslocamentos nodais não nulos, as equações diferenciais ordinárias do movimento, escritas na base (F) resultam:

$${}^F \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}} + {}^F \mathbf{G}^e \dot{\mathbf{q}} + ({}^F \mathbf{K}^e + {}^F \mathbf{K}_g^e(\mathbf{q})) \mathbf{q} = {}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t) \quad (3-23)$$

sendo que ${}^F \mathbf{M}^e = {}^F \mathbf{M}_1^e + {}^F \mathbf{M}_2^e$, ${}^F \mathbf{G}^e$ e ${}^F \mathbf{K}^e$ são matrizes 12×12 de massa, giroscópica e de rigidez do elemento viga; ${}^F \mathbf{K}_g^e(\mathbf{q}) = {}^F \mathbf{K}_{g1}^e(\mathbf{q}) + {}^F \mathbf{K}_{g2}^e(\mathbf{q})$ é uma matriz 12×12 que corresponde aos termos não lineares. As matrizes

$${}^F \mathbf{K}_{g2}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \Sigma \Phi_y & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & a_4 \delta 5 & a_4 \delta 6 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & a_4 \delta 7 & a_4 \delta 8 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \delta 1 & 0 & a_5 \Delta \Phi_z & a_5 \Delta \Phi_y & 0 & 0 & -a_4 \delta 1 & 0 & -a_5 \Delta \Phi_z & a_5 \Delta \Phi_y \\ 0 & 0 & a_4 \delta 2 & a_5 \Delta \Phi_z & 0 & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & -a_4 \delta 2 & a_5 \Delta \Phi_z & 0 & a_5 \Sigma \Phi_x \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \Delta \Phi_y & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \Delta \Phi_y & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \Sigma \Phi_y & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & -a_4 \delta 5 & -a_4 \delta 6 & 0 & a_2 \Sigma \Phi_y & a_2 \Sigma \Phi_x & 0 & -a_4 \delta 7 & -a_4 \delta 8 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \delta 3 & 0 & a_5 \Delta \Phi_z & a_5 \Delta \Phi_y & 0 & 0 & -a_4 \delta 3 & 0 & -a_5 \Delta \Phi_z & a_5 \Delta \Phi_y \\ 0 & 0 & a_4 \delta 4 & -a_5 \Delta \Phi_z & 0 & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & -a_4 \delta 4 & -a_5 \Delta \Phi_z & 0 & a_5 \Sigma \Phi_x \\ 0 & 0 & 0 & -a_5 \Delta \Phi_y & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \Delta \Phi_y & a_5 \Sigma \Phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \delta 1 &= \Phi_{xb} - 4\Phi_{xa}, & \delta 2 &= \Phi_{yb} - 4\Phi_{ya}, & \delta 3 &= \Phi_{xa} - 4\Phi_{xb}, & \delta 4 &= \Phi_{ya} - 4\Phi_{yb}, \\ \delta 5 &= \Phi_{xb} - 2\Phi_{xa}, & \delta 6 &= \Phi_{yb} - 2\Phi_{ya}, & \delta 7 &= \Phi_{xa} - 2\Phi_{xb}, & \delta 8 &= \Phi_{ya} - 2\Phi_{yb}, \\ \Delta x &= x_a - x_b, & \Delta \Phi_x &= \Phi_{xa} - \Phi_{xb}, & \Sigma \Phi_x &= \Phi_{xa} + \Phi_{xb}, \\ \Delta y &= y_a - y_b, & \Delta \Phi_y &= \Phi_{ya} - \Phi_{yb}, & \Sigma \Phi_y &= \Phi_{ya} + \Phi_{yb}, \\ \Delta z &= z_a - z_b, & \Delta \Phi_z &= \Phi_{za} - \Phi_{zb}, \end{aligned}$$

e as constantes são:

$$a_1 = \frac{12K_3}{5L^2}, \quad a_2 = \frac{K_3}{5L}, \quad a_3 = \frac{J_3}{L^2}, \quad a_4 = \frac{K_3}{15}, \quad a_5 = \frac{J_3}{2L}$$

3.4 Sistemas de Referência Global e Local

As matrizes elementares obtidas anteriormente estão referidas ao sistema de coordenadas locais a cada um dos segmentos especificados, com seus eixos fixos à configuração não-deformada da viga. Se mais de um elemento é usado para modelar o sistema, faz-se necessário escrever as matrizes elementares em um mesmo sistema de referência, o sistema de referência global.

3.4.1 Transformação de Coordenadas

A Fig. 3.3 mostra dois sistemas de referência, a base $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv F$ representa o sistema local e a base $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \equiv G$ representa o sistema global de coordenadas. Além disso, mostra-se um vetor qualquer \mathbf{r} , esse vetor pode representar força ou movimento de algum nó do sistema.

Definindo as componentes do vetor \mathbf{r} nas bases (F) e (G) através de ${}^F \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ e ${}^G \mathbf{r} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$, é possível escrever a relação: ${}^G \mathbf{r} = {}^G \mathbf{T}^F {}^F \mathbf{r}$, sendo ${}^G \mathbf{T}^F$ a matriz de transformação de coordenadas entre o sistema de referência local e global.

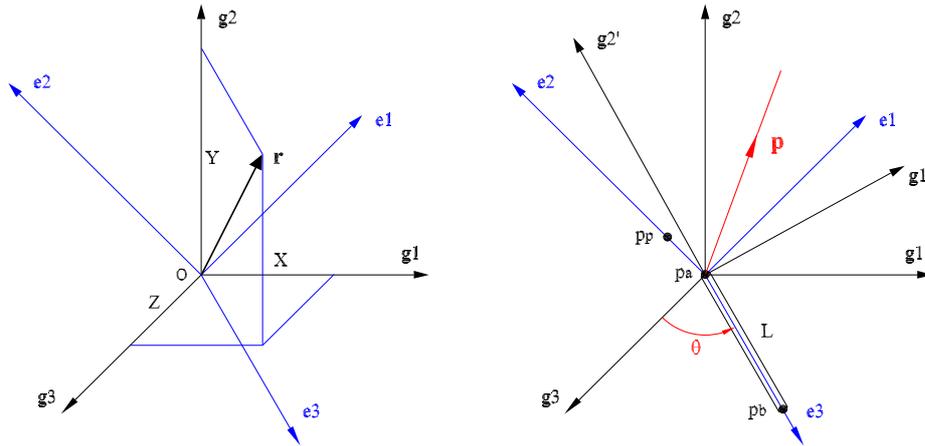


Figura 3.3: Sistema de referência global $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ e local $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

$${}^G\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

A matriz de transformação ${}^G\mathbf{T}^F$ é usualmente calculada a partir das coordenadas globais de três pontos da viga: os dois pontos que definem os extremos da viga, ao longo do eixo local \mathbf{e}_3 , e um terceiro ponto localizado no plano local $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, sendo \mathbf{e}_2 um dos eixos principais da seção transversal.

Existem vários procedimentos para obter a matriz de transformação ${}^G\mathbf{T}^F$, entre eles estão os cossenos diretores (Paz [29]) e os vetores de rotação (Shabana [34]). Esses procedimentos são detalhados a seguir.

Definindo os pontos p_a e p_b , que definem a direção \mathbf{e}_3 da viga indeformada, e um ponto p_p sobre o eixo \mathbf{e}_2 , com vetores de posição,

$${}^G\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} X_a & Y_a & Z_a \end{bmatrix}^T, \quad {}^G\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} X_b & Y_b & Z_b \end{bmatrix}^T, \quad {}^G\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} X_p & Y_p & Z_p \end{bmatrix}^T$$

é possível escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{e}_3 &= {}^G\mathbf{T}^F {}^F\mathbf{e}_3 = {}^G\mathbf{T}^F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ {}^G\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{L} ({}^G\mathbf{r}_b - {}^G\mathbf{r}_a) \end{aligned}$$

sendo L o comprimento do elemento, logo:

$$t_{13} = \frac{1}{L}(X_b - X_a), \quad t_{23} = \frac{1}{L}(Y_b - Y_a), \quad t_{33} = \frac{1}{L}(Z_b - Z_a) \quad \rightarrow$$

$${}^G \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}^T$$

Por outro lado, usando o ponto p , pode-se escrever:

$${}^G \mathbf{e}_2 = {}^G \mathbf{T}^F {}^F \mathbf{e}_2 = {}^G \mathbf{T}^F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$${}^G \mathbf{e}_2 = \frac{1}{L_2} ({}^G \mathbf{r}_p - {}^G \mathbf{r}_a)$$

sendo L_2 o comprimento do vetor $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_a$, logo:

$$t_{12} = \frac{1}{L_2}(X_p - X_a), \quad t_{22} = \frac{1}{L_2}(Y_p - Y_a), \quad t_{32} = \frac{1}{L_2}(Z_p - Z_a) \quad \rightarrow$$

$${}^G \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} t_{12} & t_{22} & t_{32} \end{bmatrix}^T$$

Finalmente, o vetor ${}^G \mathbf{e}_1$ é calculado através do produto ${}^G \mathbf{e}_1 = {}^G \tilde{\mathbf{e}}_2 {}^G \mathbf{e}_3$.

O procedimento descrito anteriormente corresponde ao uso de cossenos diretores. Outro procedimento mais elegante para calcular a matriz ${}^G \mathbf{T}^F$ é usando o vetor de rotação, que é apresentado a seguir.

O vetor unitário \mathbf{p} da Fig. 3.3 que permite girar \mathbf{g}_3 sobre \mathbf{e}_3 é ortogonal a esses dois vetores, ou seja, obtido do produto vetorial de \mathbf{g}_3 por \mathbf{e}_3 dividido pelo seu módulo. Por outro lado, como $\mathbf{g}_3^T \mathbf{e}_3 = \cos(\theta)$ e ${}^G \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \rightarrow \cos(\theta) = t_{33}$. O módulo de \mathbf{p} é $p = \sin(\theta)$, logo, deixando \mathbf{p} unitário:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sin(\theta)} \tilde{\mathbf{g}}_3 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{bmatrix} -t_{23} \\ t_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definindo um sistema de referência intermediário (V), composto dos eixos $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2$ e $\mathbf{g}'_3 \equiv \mathbf{e}_3$, tem-se:

$$G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \xrightarrow{\theta(\mathbf{p})} V(\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3 \equiv \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\varphi(\mathbf{g}'_3)} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

O ângulo φ é calculado de tal forma que os vetores \mathbf{g}'_2 e \mathbf{e}_2 sejam coincidentes. Finalmente, a matriz de transformação entre o SR local e global resulta: ${}^G T^F = {}^G T^V {}^V T^F$. As matrizes de rotação são dadas por:

$${}^G \mathbf{T}^V = \mathbf{E} + \sin(\theta) \tilde{\mathbf{p}} + (1 - \cos(\theta)) \tilde{\mathbf{p}}^2$$

$${}^V\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5

Equações de Movimento do Sistema Como um Todo

Para estudar estruturas bi- e tridimensionais é necessário representar as equações de movimento de todo o sistema no sistema de referência global. A transformação do sistema local para o global, e vice-versa, é realizada usando os cosenos diretores desenvolvidos anteriormente. Os vetores e matrizes da viga de Cosserat, representados no sistema global, são:

$${}^G\mathbf{M}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{M}^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{G}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{G}^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{K}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{K}^{eF} \mathbf{T}_e^G$$

$${}^G\mathbf{K}_g^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{K}_g^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{p}^c = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{p}^c, \quad {}^G\mathbf{p}^d = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{p}^d$$

A matriz ${}^G\mathbf{T}_e^F$ é a matriz de transformação do elemento viga, que depende da orientação do elemento.

$${}^G\mathbf{T}_e^F = \begin{bmatrix} {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F \end{bmatrix}$$

Depois que as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e forças nodais equivalente, da viga de Cosserat, são transformadas ao sistema global de coordenadas, é necessário montá-las para encontrar as equações de movimento de todo o sistema.

Definindo o vetor de deslocamento global \mathbf{q}^G , composto pelos deslocamentos de todos os nós, tal que:

$$\mathbf{q}^G = \left[X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ \Phi_{x1} \ \Phi_{y1} \ \Phi_{z1} \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \Phi_{x2} \ \Phi_{y2} \ \Phi_{z2} \ \cdots \right]^T \quad (3-25)$$

as equações de movimento para todo o sistema pode ser construído simplesmente considerando a contribuição de todos os elementos. Nesse sentido, expandindo as matrizes(vetores) de cada elemento para fazê-lo da mesma dimensão que as matrizes(vetores) do sistema, como realizado no tradicional

MEF [9], resulta:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{G} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{G}^e, \quad \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{K}_g = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{K}_g^e, \quad \mathbf{p}^c(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{p}_e^c(t), \quad \mathbf{p}^d(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G \mathbf{p}_e^d(t)$$

sendo n_e o numero de elementos. Nas equações acima \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{K} e \mathbf{K}_g representam, respectivamente, as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e termos não lineares de todo o sistema. Analogamente, $\mathbf{p}^c(t)$ e $\mathbf{p}^d(t)$ são vetores de força nodal equivalente para todo o sistema. A contribuição das forças e momentos de interação interna $\mathbf{p}^i(t)$, de todos os elementos, têm que estar balanceadas e a ação total deve ser nula. Finalmente, as equações de movimento de todo o sistema, desprezando-se o amortecimento, resultam em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \mathbf{p}^c(t) + \mathbf{p}^d(t) \quad (3-26)$$

Essa equação fornece as equações de movimento para todos os nós, livres ou restritos.

3.6 Integração das Equações do Movimento

Para integrar as equações de movimento emprega-se o método de Newmark [2, 9]. Este método, de integração passo a passo, é amplamente usado para a resolução de problemas lineares e não lineares. Em essência, esse método de integração direto está baseado em duas idéias [9]. A primeira, ao invés de tentar satisfazer a Eq. (3-26) para um instante genérico t , ela é obrigada a ser satisfeita somente em intervalos de tempo discretos Δt . A segunda idéia é que em cada intervalo de tempo Δt , as variações dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações são preestabelecidas.

3.6.1 Procedimento de Integração no Tempo

Seguindo a nomenclatura padrão, usa-se $n = 0, 1, 2, \dots$ para indicar o tempo discreto aproximado da variável temporal no instante t_n . No método de Newmark os deslocamentos e velocidades são interpoladas simultanea-

mente através de:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta\mathbf{q}_n \\ \Delta\mathbf{q}_n &= h\dot{\mathbf{q}}_n + h^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] + \mathbf{e}'_n \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] + \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

e os erros de truncamento, para os deslocamentos e velocidades, deduzidos por Géradin et al. [45], são:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n &= \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) h^2 \mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^3 \mathbf{q}^4) \\ \mathbf{e}'_n &= \left(\beta - \frac{1}{6} \right) h^3 \mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^4 \mathbf{q}^4)\end{aligned}$$

Os coeficientes constantes $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\gamma \in [0, 1]$ são os parâmetros de integração. Os valores $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ (conhecidos como o método da aceleração média) garantem uma estabilidade condicional com o máximo de precisão, para sistemas lineares. No entanto, esta estabilidade não pode ser estendida para sistemas não lineares. Conseqüentemente, o método da aceleração média precisa de um tamanho de passo bem pequeno [22]. É importante ressaltar que para contornar esse problema Géradin et al. [45] usam multiplicadores de Lagrange para controlar a instabilidade numérica.