

## 3

## Dinâmica da Viga de Cosserat

### 3.1

### Introdução

Neste capítulo, a dinâmica de uma viga esbelta, intrinsecamente reta, é estudada sistematicamente para problemas tridimensionais usando a viga de Cosserat descrita no capítulo anterior. A modelagem leva em conta as deformações de flexão, extensão-compressão e torção da viga, permitindo assim, o estudo dos vários tipos de deformações. O problema fundamental quando se usa o MEF é a escolha das funções de deslocamento. No entanto, usando a viga de Cosserat, esse problema é contornado empregando as funções de deslocamento obtidas da equação do equilíbrio estático. Essas funções de deslocamento não lineares são função dos deslocamentos e rotações nodais genéricos da viga. Logo, usando a equação de Lagrange, formada pelas expressões das energias cinética e potencial da viga, são derivadas as equações do movimento não lineares da viga. A partir da equação do movimento da viga é possível achar as equações de movimento de um sistema que serão aproximadas numericamente usando o método de Newmark. É necessário ressaltar que quando se usa o elemento de Cosserat, que leva em conta todas as não linearidades geométricas do sistema, alta precisão da resposta dinâmica pode ser obtida dividindo o sistema em uns poucos elementos, número que é bem menor que o tradicional MEF, onde as funções de interpolação, em geral, são funções simples tais como polinômios de baixa ordem. Essa é a principal vantagem de usar a viga de Cosserat. Resumindo, a viga de Cosserat fornece uma forma conveniente para a modelagem de estruturas esbeltas.

## 3.2

### Velocidades

Para a análise dinâmica, o movimento da viga de Cosserat pode ser estudado considerando a evolução, no tempo, dos deslocamentos e rotações nodais da viga. Logo, as funções de deslocamento da viga de Cosserat, Eq. (2-44), variáveis no tempo são:

$$\begin{aligned}x(s, t) &= x_1(s, t) + x_2(s, t) \\y(s, t) &= y_1(s, t) + y_2(s, t) \\z(s, t) &= s + z_1(s, t) + z_2(s, t) \\\varphi(s, t) &= \varphi_1(s, t) + \varphi_2(s, t)\end{aligned}$$

O movimento no espaço, de uma seção genérica da viga, pode ser visto como o movimento de um corpo rígido no espaço. Conseqüentemente, o movimento de qualquer seção transversal da viga, localizada a uma distância  $s$ , será caracterizada por uma velocidade de translação e uma velocidade angular.

### 3.2.1

#### Velocidade de Translação

A velocidade de translação, da seção transversal da viga, é definida pela derivada do vetor posição, Eq. (2-1), em relação ao parâmetro tempo  $t$ :

$$\frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} = \left[ \frac{\partial x(s, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial y(s, t)}{\partial t} \quad \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} \right]^T \quad (3-1)$$

### 3.2.2

#### Velocidade Angular

Para calcular a velocidade angular da seção transversal na coordenada  $s$  (que possui uma velocidade de rotação própria  $\Omega$ ), ela deverá ser considerada como um corpo rígido com um vetor de velocidade angular  $\mathbf{w}(s, t)$ .

O vetor de velocidade angular  $\mathbf{w}(s, t)$  é calculado usando três rotações elementares, como foi definido na Eq. (2-15):

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\phi_x(\mathbf{e}_1)} Q(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \xrightarrow{\phi_y(\mathbf{e}'_2)} R(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3) \xrightarrow{\phi_z + \Omega t(\mathbf{e}''_3)} S(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$$

Das rotações elementares, as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned} {}^F_F\mathbf{w}_Q &= {}^Q_F\mathbf{w}_Q = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^Q_Q\mathbf{w}_R &= {}^R_Q\mathbf{w}_R = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}_y & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^R_R\mathbf{w}_S &= {}^S_R\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi}_z + \Omega \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

logo, as matrizes de rotação, para ângulos de flexão pequenos  $\phi_x$  e  $\phi_y$  (porque a viga está confinada dentro de uma superfície) são:

$${}^F\mathbf{T}^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\phi_x \\ 0 & \phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^Q\mathbf{T}^R = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\phi_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^R\mathbf{T}^S = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z + \Omega t) & -\sin(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ \sin(\phi_z + \Omega t) & \cos(\phi_z + \Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, o vetor de velocidade angular da seção transversal, válido para qualquer sistema de referência, é dado por:  ${}^F\mathbf{w}_S = {}^F\mathbf{w}_Q + {}^Q\mathbf{w}_R + {}^R\mathbf{w}_S$ . Na base  $(S)$ , solidário à seção transversal, ela é expressa como:

$${}^S_F\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x \cos(\phi_z + \Omega t) + \dot{\phi}_y \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \dot{\phi}_y \cos(\phi_z + \Omega t) - \dot{\phi}_x \sin(\phi_z + \Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix}$$

e para pequenos ângulos de torção  $\phi_z$ , resulta:

$${}^S\mathbf{w} = {}^S_F\mathbf{w}_S = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_x(\cos \Omega t - \phi_z \sin \Omega t) + \dot{\phi}_y(\sin \Omega t + \phi_z \cos \Omega t) \\ \dot{\phi}_y(\cos \Omega t - \phi_z \sin \Omega t) - \dot{\phi}_x(\sin \Omega t + \phi_z \cos \Omega t) \\ \phi_y \dot{\phi}_x + (\Omega + \dot{\phi}_z) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

### 3.3

#### Equações de Movimento da Viga de Cosserat

Nesta parte emprega-se a equação de Lagrange para formular a equação de movimento da viga de Cosserat.

#### 3.3.1

##### Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, possivelmente, é o mais famoso princípio variacional da mecânica. Esse princípio, que considera o movimento do sistema como um todo entre dois instantes de tempo,  $t_1$  e  $t_2$ , é um princípio integral ( $\int$ ) e reduz o problema dinâmico à investigação de uma integral escalar definida. Essa formulação tem a vantagem de ser invariante, ou seja, as expressões dos integrandos podem ser escritos em qualquer sistema de referência.

Para um sistema contínuo, no qual o movimento é definido por coordenadas que são funções não apenas do tempo, mas também de coordenadas espaciais, o princípio de Hamilton estendido é dado através da seguinte equação variacional [5]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \overline{\delta W}) dt = 0 \quad (3-3)$$

sendo  $T$  a energia cinética do sistema e  $\overline{\delta W}$  é conhecido como o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas sobre o sistema.

Se o sistema está sobre a ação de algumas forças que são deriváveis de alguma função potencial  $-U$  e outras não, o trabalho virtual realizado pelas forças pode separar-se na forma:

$$\overline{\delta W} = \delta W^P + \overline{\delta W}^{NP} = -\delta U + \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$$

sendo  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T$  o vetor de forças generalizadas não deriváveis de alguma função potencial (não conservativas) e  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$  é o vetor de coordenadas generalizadas. Introduzindo  $\overline{\delta W}$  na Eq. (3-3), ela resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}) dt = 0$$

e usando a definição Lagrangiana ( $L = T - U$ ), as equações de acima levam

a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-4)$$

Para calcular as forças generalizadas  $\mathbf{Q}$ , considera-se o caso em que existe um vetor de força  $\mathbf{F}$ , que não é derivável de alguma função potencial, logo, o trabalho virtual realizado por essa força é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \delta \hat{\mathbf{r}} \quad (3-5)$$

sendo  $\delta \hat{\mathbf{r}}$  o deslocamento virtual de  $\hat{\mathbf{r}}$  e:

$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \hat{r}_1(\mathbf{q}) & \hat{r}_2(\mathbf{q}) & \cdots & \hat{r}_m(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T$  expressa a variável dependente em termos das coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}^T$ . A definição do termo *deslocamento virtual*, baseada no livro de Banach [1], é esclarecida no anexo D.

O deslocamento virtual  $\delta \hat{\mathbf{r}}$  pode ser obtido da seguinte equação [5]:

$$\delta \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (3-6)$$

sendo  $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}}$  conhecida como a matriz Jacobiana.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_1} & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{r}_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Introduzindo a Eq. (3-6) em (3-5) obtém-se:

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (3-8)$$

O trabalho virtual, no entanto, também pode ser calculado como o produto das  $n$  forças generalizadas  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \end{bmatrix}^T$  atuando sobre os deslocamentos virtuais generalizados  $\delta \mathbf{q}$ :

$$\overline{\delta W}^{NP} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (3-9)$$

Posteriormente, comparando as Eqs. (3-8) e (3-9), conclui-se que as forças generalizadas são da forma:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3-10)$$

### 3.3.2

#### Forças na Viga de Cosserat

Supõe-se que as forças que atuam no elemento são compostas de três partes: a primeira é consequência da interação dos elementos vizinhos, a segunda é devido à ação de forças externas concentradas que atuam nos nós e por último têm-se as forças externas distribuídas com direções fixas e intensidade prescrita.

Segundo a definição de forças, no princípio dos trabalhos virtuais, elas têm que estar definidas na base inercial ( $F$ ) devido aos deslocamentos nodais generalizados  $\mathbf{q}$  da viga, vide Fig. (2.4), estarem definidos em relação a ela.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a & \phi_{xa} & \phi_{ya} & \phi_{za} & x_b & y_b & z_b & \phi_{xb} & \phi_{yb} & \phi_{zb} \end{bmatrix}^T \quad (3-11)$$

#### Forças e momentos internos

Supõe-se que a ação nodal  ${}^F\mathbf{p}^i(t)$ , constituída por forças internas  $f_{jk}^i$  e momentos internos  $l_{jk}^i$ , seja dada por:

$${}^F\mathbf{p}^i(t) = \begin{bmatrix} {}^F\mathbf{p}_a^i(t) \\ {}^F\mathbf{p}_b^i(t) \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

sendo, para  $k = a, b$ :

$${}^F\mathbf{p}_k^i(t) = \begin{bmatrix} f_{xk}^i(t) & f_{yk}^i(t) & f_{zk}^i(t) & l_{xk}^i(t) & l_{yk}^i(t) & l_{zk}^i(t) \end{bmatrix}^T$$

É necessário ressaltar que as forças e momentos internos anulam-se quando o sistema é considerado como um todo, devido ao princípio de ação-reação.

#### Forças e momentos externos concentrados

De forma análoga, supõe-se que  ${}^F\mathbf{p}^c(t)$  seja constituído por forças  $f_{jk}^c$  e momentos  $l_{jk}^c$  externos concentrados nos nós:

$${}^F\mathbf{p}^c(t) = \begin{bmatrix} {}^F\mathbf{p}_a^c(t) \\ {}^F\mathbf{p}_b^c(t) \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

sendo, para  $k = a, b$ :

$${}^F\mathbf{p}_k^c(t) = \begin{bmatrix} f_{xk}^c(t) & f_{yk}^c(t) & f_{zk}^c(t) & l_{xk}^c(t) & l_{yk}^c(t) & l_{zk}^c(t) \end{bmatrix}^T$$

No caso particular da coluna de perfuração simplificada, as forças concentradas são aquelas devida ao impacto, como mostradas na Fig. 3.1.

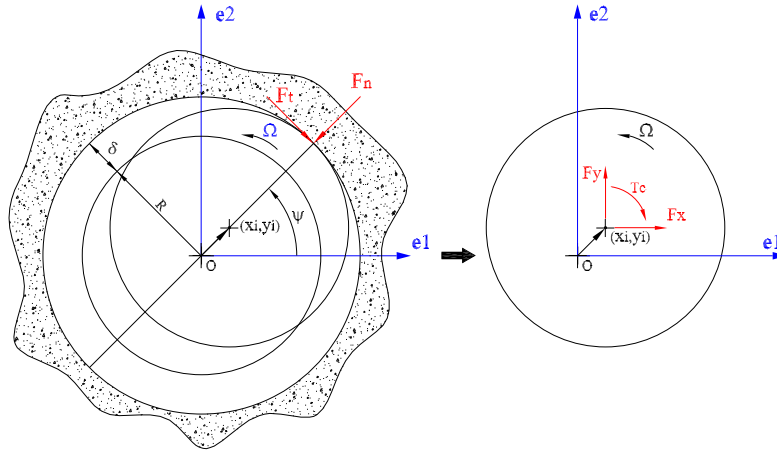


Figura 3.1: Interação com a parede do poço.

As restrições do poço são consideradas aplicando forças de contato nos nós cujo deslocamento, instantaneamente, escapa da restrição imposta pelo poço. A interação entre a coluna e o poço é modelada como um impacto inelástico, portanto, emprega-se um modelo visco-elástico. Escolhe-se o modelo de Kelvin-Voigt devido à facilidade de implementação [49]. Conseqüentemente, as forças normal, tangencial e o torque induzido, devido ao atrito entre a coluna e o poço, são:

$$\begin{aligned} F_n &= K_C \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \delta \right) + C_C \left( \sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2} \right) \\ F_t &= \mu F_n \\ T_c &= F_t R \end{aligned} \quad (3-14)$$

Nas equações acima,  $K_C$  e  $C_C$  representam os coeficientes de rigidez e amortecimento de contato, respectivamente,  $\mu$  é o coeficiente de atrito dinâmico,  $\delta$  é a folga radial e o deslocamento do nó  $i$  está representado por  $(x_i, y_i)$ .

Em geral, a rigidez e o amortecimento de contato são funções complexas das tensões e deformações na área de contato. Conseqüentemente, eles dependem do deslocamento e da velocidade do nó na direção radial.

$$K_C = K_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i), \quad C_C = C_C(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i)$$

No caso mais simples,  $K_C$  e  $C_C$  podem ser considerados constantes, e o amortecimento de contato  $C_C$  sempre é expresso como um múltiplo da rigidez de contato:  $C_C = \beta K_C$ . Valores referenciais desses parâmetros para

o aço são adotados como  $K_C = 1 \times 10^8 N/m$ , baseado na teoria de contato de Hertz, [44]. Para materiais não lineares como o silicone, por exemplo, existe uma relação não linear do tipo  $K_C(\Delta) = a\Delta^b$ , sendo  $\Delta = (\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \delta)$  a penetração no silicone durante o contato; essa equação foi encontrada experimentalmente por Hyun-Yong Han et al. [37] e detalha-se no anexo A. Por outro lado, o coeficiente de proporcionalidade entre a rigidez e o amortecimento de contato é suposto como  $\beta = 1 \times 10^{-7} s$ .

As forças de impacto, Eq. 3-14, escritas na base ( $F$ ) resultam:

$${}^F\mathbf{F}_{impacto} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}(\mu y_i - x_i) \\ -\frac{F_n}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}}(\mu x_i + y_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_c \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

### Precessão direta e retrógrada

A partir da Fig. 3.1 é possível reconhecer se algum nó da coluna está realizando precessão direta ou retrograda, usando o ângulo  $\psi_i$ . Da geometria da figura em questão, o ângulo de precessão  $\psi$  está dado por:

$$\psi_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \quad \therefore \quad \dot{\psi}_i = \frac{x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \quad (3-16)$$

Logo, se  $\dot{\psi}_i > 0$  o nó está realizando precessão direta em caso contrário ele realiza precessão retrograda.

### Forças e momentos distribuídos

Finalmente, as forças distribuídas ( $\xi_i$ ) e os momentos distribuídos ( $\eta_i$ ) sobre a viga podem ser expressos como:

$${}^F\bar{\mathbf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \xi_x(t) & \xi_y(t) & \xi_z(t) & \eta_x(t) & \eta_y(t) & \eta_z(t) \end{bmatrix}^T$$

Logo, usando a Eq. (3-8), o trabalho virtual realizado pelas forças e momentos distribuídos  ${}^F\bar{\mathbf{T}}(t)$  tem a forma:

$$\overline{\delta W}^d = \int_0^L \left( {}^F\bar{\mathbf{T}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \mathbf{q} ds$$



sendo  $\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} x(\mathbf{q}, s) & y(\mathbf{q}, s) & z(\mathbf{q}, s) & \phi_x(\mathbf{q}, s) & \phi_y(\mathbf{q}, s) & \phi_z(\mathbf{q}, s) \end{bmatrix}^T$  a variável dependente e o vetor de variáveis generalizadas  $\mathbf{q}$  está dado pela Eq. (3-11).

Por conveniência, as forças nodais equivalentes (forças generalizadas), devidas às cargas distribuídas, podem ser escritas como:

$${}^F\mathbf{p}^d(t) = \int_0^L \left( {}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T ds = \begin{bmatrix} {}^F\mathbf{p}_a^d(t) \\ {}^F\mathbf{p}_b^d(t) \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

sendo, para  $k = a, b$ :

$${}^F\mathbf{p}_k^d(t) = \begin{bmatrix} f_{xk}^d(t) & f_{yk}^d(t) & f_{zk}^d(t) & l_{xk}^d(t) & l_{yk}^d(t) & l_{zk}^d(t) \end{bmatrix}^T$$

Para modelar a coluna simplificada, consideram-se dois tipos de cargas distribuídas: devidas à gravidade e devidas ao desbalanceamento.

Em relação à **gravidade**, a massa distribuída na viga, que forma um ângulo  $\gamma$  com a vertical, resulta em cargas axiais e transversais distribuídas, como mostrado na Fig. 3.2. Logo, pode-se escrever:

$${}^F\bar{\mathbf{\Gamma}}^{gravity} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

sendo  $\xi_y^g = -\rho Ag \sin \gamma$  e  $\xi_z^g = \rho Ag \cos \gamma$ .

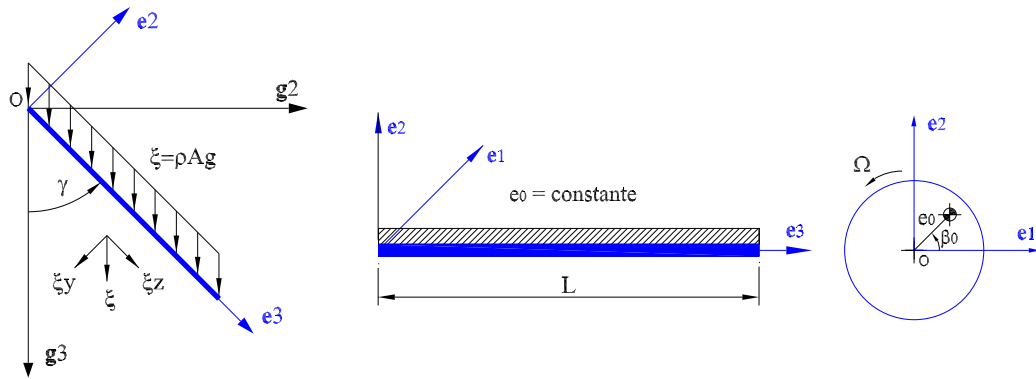


Figura 3.2: Forças de gravidade e desbalanceamento.

Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente devido à gravidade resulta:

$${}^F\mathbf{p}_{gravity}^d = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & -\frac{L}{6}\xi_y^g & 0 & 0 & 0 & \xi_y^g & \xi_z^g & \frac{L}{6}\xi_y^g & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Um elemento da coluna não está balanceado se o centro de gravidade de uma seção transversal não coincide com o seu centro de rotação. A

distância entre o centro de rotação e o centro de gravidade é a excentricidade  $e_0$  e o lugar geométrico dos pontos que contém o centro de gravidade de cada seção transversal do elemento forma a distribuição de excentricidades do elemento, como mostrado na Fig. 3.2. Para simplificar, considera-se que a distribuição da excentricidade seja constante.

Se o elemento viga leva em conta o desbalanceamento, existe uma força centrífuga da forma  $\rho A g e_0 \Omega^2$ , conseqüentemente:

$${}^F \bar{\mathbf{I}}^{unbalance}(t) = \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

sendo:

$$\begin{aligned} \xi_x^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta_0) \\ \xi_y^u &= \rho A g e_0 \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta_0) \end{aligned}$$

Nas expressões acima, as constantes  $e_0$  e  $\beta_0$  representam a excentricidade da viga e a posição angular inicial do centro de gravidade, respectivamente. Usando a Eq. (3-17), a força nodal equivalente, devida ao desbalanceamento, resulta:

$${}^F \mathbf{p}_{unbalance}^d = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & -\frac{L}{6}\xi_y^u & \frac{L}{6}\xi_x^u & 0 & \xi_x^u & \xi_y^u & 0 & \frac{L}{6}\xi_y^u & -\frac{1}{6}\xi_x^u L & 0 \end{bmatrix}^T$$

Logo, considerando as forças de gravidade e desbalanceamento, a força nodal equivalente devido às cargas distribuídas resulta:

$${}^F \mathbf{p}^d = {}^F \mathbf{p}_{gravity}^d + {}^F \mathbf{p}_{unbalance}^d$$

Para terminar, o trabalho virtual total, realizado pelas três forças Eq. (3-12), (3-13) e (3-17), é:

$$\overline{\delta W}^{NP} = ({}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t))^T \delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}$$

Por conseguinte:

$$\mathbf{Q} = {}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t) \quad (3-18)$$

### 3.3.3

#### Energias Cinética e Potencial da Viga

Em relação à Eq. (2.1), o movimento da viga envolve duas velocidades: a velocidade de translação da curva de centróides  $\frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s,t)}{\partial t}$  e a velocidade angular da seção transversal  $\mathbf{w}(s,t)$ . Logo, a energia cinética, por unidade

de comprimento, está dada através de:

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \frac{\partial {}^F \mathbf{r}^T(s, t)}{\partial t} \mathbf{M}(s) \frac{\partial {}^F \mathbf{r}(s, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} {}^S \mathbf{w}^T(s, t) {}^S \mathbf{I}(s) {}^S \mathbf{w}(s, t) \quad (3-19)$$

sendo  $\mathbf{M}(s)$  e  ${}^S \mathbf{I}(s)$  as matrizes de massa e inércia com componentes não nulas  $M_1 = M_2 = M_3 = \rho A(s)$  e  $I_1 = \rho \Gamma_1(s)$ ,  $I_2 = \rho \Gamma_2(s)$ ,  $I_3 = \rho \Gamma_3(s)$  e a velocidade angular da secção transversal, escrita na base  $(S)$ , está dada pela Eq. (3-2).

Por outro lado, considerando pequenas deformações, a energia potencial elástica, por unidade de comprimento, pode ser expressa em termos dos vetores de deformação  $\mathbf{v}(s, t)$  e  $\mathbf{u}(s, t)$  como:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} {}^S \mathbf{v}^T(s, t) {}^S \mathbf{K}(s) {}^S \mathbf{v}(s, t) + \frac{1}{2} {}^S \mathbf{u}^T(s, t) {}^S \mathbf{J}(s) {}^S \mathbf{u}(s, t) \quad (3-20)$$

sendo que as componentes do vetor de deformação linear são:  $v_1(s, t) = v_2(s, t) = 0$  e  $v_3(s, t) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} \right|$ , como discutido na secção 2.6.1. Por outro lado, o vetor de deformação angular, Eq. (2-10), está dado pela relação:

$${}^S \mathbf{u}(s, t) = \frac{1}{2} {}^S \tilde{\mathbf{d}}_i(s, t) \frac{\partial {}^S \mathbf{d}_i(s, t)}{\partial s}$$

Logo, as densidades de energia cinética, Eq. (3-19), e energia potencial, Eq. (3-20), estão expressas em função dos deslocamentos nodais  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$  como  $\bar{T} = \bar{T}(s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  e  $\bar{U} = \bar{U}(s, \mathbf{q})$  e a função Lagrangiana resulta:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_0^L (\bar{T}(s, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \bar{U}(s, \mathbf{q})) ds \quad (3-21)$$

Em termos da Lagrangiana,  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L$ , e usando o princípio do trabalho virtual, as equações de Lagrange estão dadas pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = p_j^i + p_j^c + p_j^d, \quad j = 1, \dots, 12 \quad (3-22)$$

Usando a equação acima, para uma configuração geral com deslocamentos nodais não nulos, as equações diferenciais ordinárias do movimento, escritas na base  $(F)$  resultam:

$${}^F \mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}} + {}^F \mathbf{G}^e \dot{\mathbf{q}} + ({}^F \mathbf{K}^e + {}^F \mathbf{K}_g^e(\mathbf{q})) \mathbf{q} = {}^F \mathbf{p}^i(t) + {}^F \mathbf{p}^c(t) + {}^F \mathbf{p}^d(t) \quad (3-23)$$

sendo que  ${}^F \mathbf{M}^e = {}^F \mathbf{M}_1^e + {}^F \mathbf{M}_2^e$ ,  ${}^F \mathbf{G}^e$  e  ${}^F \mathbf{K}^e$  são matrizes  $12 \times 12$  de massa, giroscópica e de rigidez do elemento viga;  ${}^F \mathbf{K}_g^e(\mathbf{q}) = {}^F \mathbf{K}_{g1}^e(\mathbf{q}) + {}^F \mathbf{K}_{g2}^e(\mathbf{q})$  é uma matriz  $12 \times 12$  que corresponde aos termos não lineares. As matrizes

estão dadas a seguir:

$${}^F\mathbf{M}_1^e = \begin{bmatrix} \frac{13\rho AL^2}{35L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & \frac{\rho AL}{3} & \frac{\rho AL^3}{105} & \frac{\rho AL^3}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & \frac{\rho AL^3}{105} & \frac{\rho AL^3}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9\rho AL^2}{70L} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & 0 & \frac{13\rho AL^2}{35L} & 0 & \frac{\rho AL}{3} & \frac{\rho AL^3}{105} & \frac{\rho AL^3}{105} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\rho AL^2}{70L} & 0 & -\frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho AL}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & -\frac{3L^3\rho A}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13\rho AL^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3L^3\rho A}{420} & 0 & -\frac{11\rho AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^F\mathbf{M}_2^e = \begin{bmatrix} \frac{42I_2}{35L} & \frac{42I_1}{35L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14I_1L}{105} & \frac{14I_2L}{105} & \frac{I_3L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{84I_2}{70L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_2}{10} & 0 & \frac{42I_2}{35L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{84I_1}{70L} & 0 & \frac{I_1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I_1}{10} & 0 & -\frac{14I_1L}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_1}{10} & 0 & \frac{14I_1L}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{14I_2L}{420} & 0 & -\frac{I_2}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14I_2L}{105} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3L}{3} \end{bmatrix}$$

$${}^F\mathbf{G}^e = \Omega I_3 \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^F\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{12J_2}{L^3} & \frac{12J_1}{L^3} & \frac{K_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4J_1}{L} & \frac{4J_2}{L} & \frac{J_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6J_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12J_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6J_2}{L^2} & 0 & \frac{12J_2}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J_1}{L^3} & 0 & \frac{6J_1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12J_1}{L^3} & 0 & \frac{K_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6J_1}{L^2} & 0 & \frac{2J_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6J_1}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4J_1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2J_2}{L} & 0 & -\frac{6J_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4J_2}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J_3}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_3}{L} \end{bmatrix}$$

$${}^F\mathbf{K}_{g1}^e = \begin{bmatrix} -a_1\Delta z & 0 & -a_1\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_x & a_1\Delta z & 0 & a_1\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_x \\ 0 & -a_1\Delta z & -a_1\Delta y & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & a_1\Delta z & a_1\Delta y & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_3\Delta\Phi_y \\ -a_1\Delta x & -a_1\Delta y & 0 & a_2\Delta y & -a_2\Delta x & 0 & a_1\Delta x & a_1\Delta y & 0 & a_2\Delta y & -a_2\Delta x & 0 \\ -a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_2\Delta y & -4a_4\Delta z & a_5\Delta\Phi_z & -a_3\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_2\Delta y & a_4\Delta z & -a_5\Delta\Phi_z & a_3\Delta x \\ -a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta x & a_5\Delta\Phi_z & -4a_4\Delta z & -a_3\Delta y & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta x & a_5\Delta\Phi_z & a_4\Delta z & a_3\Delta y \\ -a_3\Delta\Phi_x & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_3\Delta x & -a_3\Delta y & 0 & a_3\Delta\Phi_x & a_3\Delta\Phi_y & 0 & a_3\Delta x & a_3\Delta y & 0 \\ a_1\Delta z & 0 & a_1\Delta x & a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_x & -a_1\Delta z & 0 & -a_1\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_x \\ 0 & a_1\Delta z & a_1\Delta y & -a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_1\Delta z & -a_1\Delta y & -a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & -a_3\Delta\Phi_y \\ a_1\Delta x & a_1\Delta y & 0 & -a_2\Delta y & a_2\Delta x & 0 & -a_1\Delta x & -a_1\Delta y & 0 & -a_2\Delta y & a_2\Delta x & 0 \\ a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta z & a_2\Delta y & a_4\Delta z & a_5\Delta\Phi_z & a_3\Delta x & -a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta z & -a_2\Delta y & -4a_4\Delta z & -a_5\Delta\Phi_z & -a_3\Delta x \\ -a_2\Delta z & a_3\Delta\Phi_z & -a_2\Delta x & -a_5\Delta\Phi_z & a_4\Delta z & a_3\Delta y & a_2\Delta z & -a_3\Delta\Phi_z & a_2\Delta x & -a_5\Delta\Phi_z & -4a_4\Delta z & -a_3\Delta y \\ a_3\Delta\Phi_x & a_3\Delta\Phi_y & 0 & +a_3\Delta x & a_3\Delta y & 0 & -a_3\Delta\Phi_x & -a_3\Delta\Phi_y & 0 & -a_3\Delta x & -a_3\Delta y & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^F\mathbf{K}_{g2}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 \\ a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & a_4\delta 5 & a_4\delta 6 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & a_4\delta 7 & a_4\delta 8 & 0 \\ 0 & 0 & a_4\delta 1 & 0 & a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y & 0 & 0 & -a_4\delta 1 & 0 & -a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y \\ 0 & 0 & a_4\delta 2 & a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & -a_4\delta 2 & a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x \\ 0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 \\ 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 \\ a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & -a_4\delta 5 & -a_4\delta 6 & 0 & a_2\Sigma\Phi_y & a_2\Sigma\Phi_x & 0 & -a_4\delta 7 & -a_4\delta 8 & 0 \\ 0 & 0 & a_4\delta 3 & 0 & a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y & 0 & 0 & -a_4\delta 3 & 0 & -a_5\Delta\Phi_z & a_5\Delta\Phi_y \\ 0 & 0 & a_4\delta 4 & -a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & -a_4\delta 4 & -a_5\Delta\Phi_z & 0 & a_5\Sigma\Phi_x \\ 0 & 0 & 0 & -a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5\Delta\Phi_y & a_5\Sigma\Phi_x & 0 \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \delta 1 &= \Phi_{xb} - 4\Phi_{xa}, & \delta 2 &= \Phi_{yb} - 4\Phi_{ya}, & \delta 3 &= \Phi_{xa} - 4\Phi_{xb}, & \delta 4 &= \Phi_{ya} - 4\Phi_{yb}, \\ \delta 5 &= \Phi_{xb} - 2\Phi_{xa}, & \delta 6 &= \Phi_{yb} - 2\Phi_{ya}, & \delta 7 &= \Phi_{xa} - 2\Phi_{xb}, & \delta 8 &= \Phi_{ya} - 2\Phi_{yb}, \\ \Delta x &= x_a - x_b, & \Delta\Phi_x &= \Phi_{xa} - \Phi_{xb}, & \Sigma\Phi_x &= \Phi_{xa} + \Phi_{xb}, \\ \Delta y &= y_a - y_b, & \Delta\Phi_y &= \Phi_{ya} - \Phi_{yb}, & \Sigma\Phi_y &= \Phi_{ya} + \Phi_{yb}, \\ \Delta z &= z_a - z_b, & \Delta\Phi_z &= \Phi_{za} - \Phi_{zb}, \end{aligned}$$

e as constantes são:

$$a_1 = \frac{12K_3}{5L^2}, \quad a_2 = \frac{K_3}{5L}, \quad a_3 = \frac{J_3}{L^2}, \quad a_4 = \frac{K_3}{15}, \quad a_5 = \frac{J_3}{2L}$$

### 3.4

#### Sistemas de Referência Global e Local

As matrizes elementares obtidas anteriormente estão referidas ao sistema de coordenadas locais a cada um dos segmentos especificados, com seus eixos fixos à configuração não-deformada da viga. Se mais de um elemento é usado para modelar o sistema, faz-se necessário escrever as matrizes elementares em um mesmo sistema de referência, o sistema de referência global.

#### 3.4.1

##### Transformação de Coordenadas

A Fig. 3.3 mostra dois sistemas de referência, a base  $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv F$  representa o sistema local e a base  $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \equiv G$  representa o sistema global de coordenadas. Além disso, mostra-se um vetor qualquer  $\mathbf{r}$ , esse vetor pode representar força ou movimento de algum nó do sistema.

Definindo as componentes do vetor  $\mathbf{r}$  nas bases  $(F)$  e  $(G)$  através de  ${}^F\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$  e  ${}^G\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ , é possível escrever a relação:  ${}^G\mathbf{r} = {}^G\mathbf{T}^F {}^F\mathbf{r}$ , sendo  ${}^G\mathbf{T}^F$  a matriz de transformação de coordenadas entre o sistema de referência local e global.

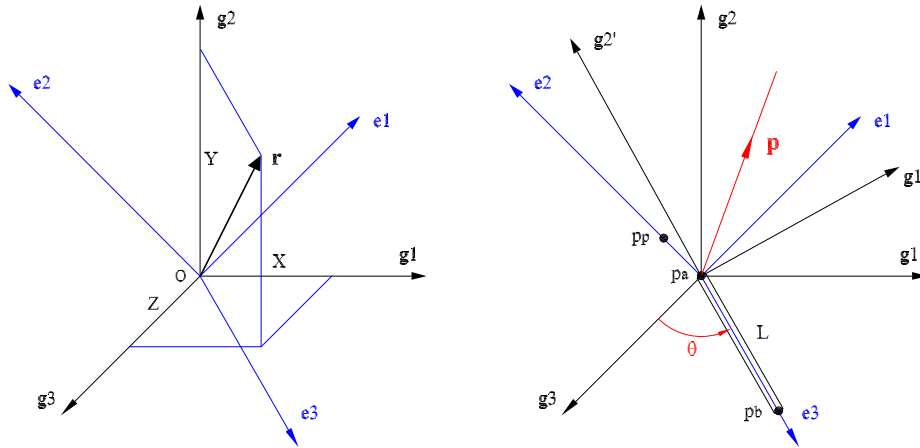


Figura 3.3: Sistema de referência global  $G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  e local  $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

$${}^G\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

A matriz de transformação  ${}^G\mathbf{T}^F$  é usualmente calculada a partir das coordenadas globais de três pontos da viga: os dois pontos que definem os extremos da viga, ao longo do eixo local  $\mathbf{e}_3$ , e um terceiro ponto localizado no plano local  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ , sendo  $\mathbf{e}_2$  um dos eixos principais da seção transversal.

Existem vários procedimentos para obter a matriz de transformação  ${}^G\mathbf{T}^F$ , entre eles estão os cossenos diretores (Paz [29]) e os vetores de rotação (Shabana [34]). Esses procedimentos são detalhados a seguir.

Definindo os pontos  $p_a$  e  $p_b$ , que definem a direção  $\mathbf{e}_3$  da viga indeformada, e um ponto  $p_p$  sobre o eixo  $\mathbf{e}_2$ , com vetores de posição,

$${}^G\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} X_a & Y_a & Z_a \end{bmatrix}^T, \quad {}^G\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} X_b & Y_b & Z_b \end{bmatrix}^T, \quad {}^G\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} X_p & Y_p & Z_p \end{bmatrix}^T$$

é possível escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{e}_3 &= {}^G\mathbf{T}^F {}^F\mathbf{e}_3 = {}^G\mathbf{T}^F \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ {}^G\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{L} ({}^G\mathbf{r}_b - {}^G\mathbf{r}_a) \end{aligned}$$

sendo  $L$  o comprimento do elemento, logo:

$$\begin{aligned} t_{13} &= \frac{1}{L}(X_b - X_a), \quad t_{23} = \frac{1}{L}(Y_b - Y_a), \quad t_{33} = \frac{1}{L}(Z_b - Z_a) \quad \rightarrow \\ {}^G\mathbf{e}_3 &= \begin{bmatrix} t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o ponto  $p$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} {}^G\mathbf{e}_2 &= {}^G\mathbf{T}^F {}^F\mathbf{e}_2 = {}^G\mathbf{T}^F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ {}^G\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{L_2}({}^G\mathbf{r}_p - {}^G\mathbf{r}_a) \end{aligned}$$

sendo  $L_2$  o comprimento do vetor  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_a$ , logo:

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{1}{L_2}(X_p - X_a), \quad t_{22} = \frac{1}{L_2}(Y_p - Y_a), \quad t_{32} = \frac{1}{L_2}(Z_p - Z_a) \quad \rightarrow \\ {}^G\mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} t_{12} & t_{22} & t_{32} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Finalmente, o vetor  ${}^G\mathbf{e}_1$  é calculado através do produto  ${}^G\mathbf{e}_1 = {}^G\tilde{\mathbf{e}}_2 {}^G\mathbf{e}_3$ .

O procedimento descrito anteriormente corresponde ao uso de cossenos diretores. Outro procedimento mais elegante para calcular a matriz  ${}^G\mathbf{T}^F$  é usando o vetor de rotação, que é apresentado a seguir.

O vetor unitário  $\mathbf{p}$  da Fig. 3.3 que permite girar  $\mathbf{g}_3$  sobre  $\mathbf{e}_3$  é ortogonal a esses dois vetores, ou seja, obtido do produto vetorial de  $\mathbf{g}_3$  por  $\mathbf{e}_3$  dividido pelo seu módulo. Por outro lado, como  $\mathbf{g}_3^T \mathbf{e}_3 = \cos(\theta)$  e  ${}^G\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \rightarrow \cos(\theta) = t_{33}$ . O módulo de  $\mathbf{p}$  é  $p = \sin(\theta)$ , logo, deixando  $\mathbf{p}$  unitário:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sin(\theta)} \tilde{\mathbf{g}}_3 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sin(\theta)} \begin{bmatrix} -t_{23} \\ t_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definindo um sistema de referência intermediário ( $V$ ), composto dos eixos  $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2$  e  $\mathbf{g}'_3 \equiv \mathbf{e}_3$ , tem-se:

$$G(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) \xrightarrow{\theta(\mathbf{p})} V(\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3 \equiv \mathbf{e}_3) \xrightarrow{\varphi(\mathbf{g}'_3)} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

O ângulo  $\varphi$  é calculado de tal forma que os vetores  $\mathbf{g}'_2$  e  $\mathbf{e}_2$  sejam coincidentes. Finalmente, a matriz de transformação entre o SR local e global resulta:  ${}^G\mathbf{T}^F = {}^G\mathbf{T}^V {}^V\mathbf{T}^F$ . As matrizes de rotação são dadas por:

$${}^G\mathbf{T}^V = \mathbf{E} + \sin(\theta)\tilde{\mathbf{p}} + (1 - \cos(\theta))\tilde{\mathbf{p}}^2$$

$${}^V\mathbf{T}^F = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.5

#### Equações de Movimento do Sistema Como um Todo

Para estudar estruturas bi- e tridimensionais é necessário representar as equações de movimento de todo o sistema no sistema de referência global. A transformação do sistema local para o global, e vice-versa, é realizada usando os cossenos diretores desenvolvidos anteriormente. Os vetores e matrizes da viga de Cosserat, representados no sistema global, são:

$${}^G\mathbf{M}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{M}^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{G}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{G}^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{K}^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{K}^{eF} \mathbf{T}_e^G$$

$${}^G\mathbf{K}_g^e = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{K}_g^{eF} \mathbf{T}_e^G, \quad {}^G\mathbf{p}^c = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{p}^c, \quad {}^G\mathbf{p}^d = {}^G\mathbf{T}_e^{FF} \mathbf{p}^d$$

A matriz  ${}^G\mathbf{T}_e^F$  é a matriz de transformação do elemento viga, que depende da orientação do elemento.

$${}^G\mathbf{T}_e^F = \begin{bmatrix} {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^G\mathbf{T}^F \end{bmatrix}$$

Depois que as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e forças nodais equivalente, da viga de Cosserat, são transformadas ao sistema global de coordenadas, é necessário montá-las para encontrar as equações de movimento de todo o sistema.

Definindo o vetor de deslocamento global  $\mathbf{q}^G$ , composto pelos deslocamentos de todos os nós, tal que:

$$\mathbf{q}^G = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \Phi_{x1} & \Phi_{y1} & \Phi_{z1} & X_2 & Y_2 & Z_2 & \Phi_{x2} & \Phi_{y2} & \Phi_{z2} & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (3-25)$$

as equações de movimento para todo o sistema pode ser construído simplesmente considerando a contribuição de todos os elementos. Nesse sentido, expandindo as matrizes(vetores) de cada elemento para fazê-lo da mesma dimensão que as matrizes(vetores) do sistema, como realizado no tradicional



MEF [9], resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{M}^e, \quad \mathbf{G} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{G}^e, \quad \mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{K}^e \\ \mathbf{K}_g &= \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{K}_g^e, \quad \mathbf{p}^c(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{p}_e^c(t), \quad \mathbf{p}^d(t) = \sum_{e=1}^{n_e} {}^G\mathbf{p}_e^d(t)\end{aligned}$$

sendo  $n_e$  o numero de elementos. Nas equações acima  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}_g$  representam, respectivamente, as matrizes de massa, giroscópica, rigidez e termos não lineares de todo o sistema. Analogamente,  $\mathbf{p}^c(t)$  e  $\mathbf{p}^d(t)$  são vetores de força nodal equivalente para todo o sistema. A contribuição das forças e momentos de interação interna  $\mathbf{p}^i(t)$ , de todos os elementos, têm que estar balanceadas e a ação total deve ser nula. Finalmente, as equações de movimento de todo o sistema, desprezando-se o amortecimento, resultam em:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_g)\mathbf{q} = \mathbf{p}^c(t) + \mathbf{p}^d(t) \quad (3-26)$$

Essa equação fornece as equações de movimento para todos os nós, livres ou restritos.

### 3.6

#### Integração das Equações do Movimento

Para integrar as equações de movimento emprega-se o método de Newmark [2, 9]. Este método, de integração passo a passo, é amplamente usado para a resolução de problemas lineares e não lineares. Em essência, esse método de integração direto está baseado em duas idéias [9]. A primeira, ao invés de tentar satisfazer a Eq. (3-26) para um instante genérico  $t$ , ela é obrigada a ser satisfeita somente em intervalos de tempo discretos  $\Delta t$ . A segunda idéia é que em cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , as variações dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações são preestabelecidas.

#### 3.6.1

##### Procedimento de Integração no Tempo

Seguindo a nomenclatura padrão, usa-se  $n = 0, 1, 2, \dots$  para indicar o tempo discreto aproximado da variável temporal no instante  $t_n$ . No método de Newmark os deslocamentos e velocidades são interpoladas simultanea-

mente através de:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n \\ \Delta \mathbf{q}_n &= h \dot{\mathbf{q}}_n + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] + \mathbf{e}'_n \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] + \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

e os erros de truncamento, para os deslocamentos e velocidades, deduzidos por G eradin et al. [45], são:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n &= \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) h^2 \mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^3 \mathbf{q}^4) \\ \mathbf{e}'_n &= \left( \beta - \frac{1}{6} \right) h^3 \mathbf{q}^3(\tau) + \mathbf{O}(h^4 \mathbf{q}^4)\end{aligned}$$

Os coeficientes constantes  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $\gamma \in [0, 1]$  são os parâmetros de integração. Os valores  $\beta = \frac{1}{4}$  e  $\gamma = \frac{1}{2}$  (conhecidos como o método da aceleração média) garantem uma estabilidade condicional com o máximo de precisão, para sistemas lineares. No entanto, esta estabilidade não pode ser estendida para sistemas não lineares. Conseqüentemente, o método da aceleração média precisa de um tamanho de passo bem pequeno [22]. É importante ressaltar que para contornar esse problema G eradin et al. [45] usam multiplicadores de Lagrange para controlar a instabilidade numérica.