

4. METODOLOGIAS PROPOSTAS

O presente capítulo apresenta as metodologias propostas nesta tese que consideram: i) funções de controle não lineares; ii) novos objetivos exploratórios; iii) o esforço exploratório. Conforme visto no Capítulo 3, as metodologias propostas por Deffeyes (2001), Knoring *et al.* (1999) e Verma & Henri (2004) foram construídas considerando somente os volumes recuperáveis por meios convencionais de produção.

4.1. UTILIZANDO UMA FUNÇÃO DE CONTROLE NÃO LINEAR

O sucesso de um campo maduro depende da energia disponível para recuperar o óleo do reservatório para o poço. Geralmente, a partir de meios convencionais, grande parte do óleo originalmente *in situ* não consegue ser recuperado, sendo abandonado dentro do reservatório. Dessa forma, três fontes de energia diferem enormemente na eficiência:

- I. Recuperação Primária: quando a pressão natural do reservatório é suficiente para elevar o óleo à superfície;
- II. Recuperação Secundária: quando água ou gás são introduzidos artificialmente por um poço injetor para aumentar a pressão no reservatório;
- III. Recuperação Terciária: quando técnicas “*enhanced oil recovery*” (EOR) são utilizadas para recuperar o óleo. Ex.: injeção de vapor, fluidos miscíveis, dióxido de carbono, etc.

Além das técnicas acima descritas, destaca-se ainda a aplicação de técnicas “*improved oil recovery* (IOR)”, como por exemplo, a perfuração de poços horizontais e sísmica 3-D. Segundo Stalkup, 1984; Farouq, 1995; Taber *et al.*, 1996; Moritis, 2000 (apud Verma *et al.*, 2004), aplicando as técnicas IOR e EOR, pode-se alcançar um acréscimo na recuperação, além da obtida com a injeção de água, de até 15% do volume inicialmente *in-place*.

Melhorias na tecnologia de recuperação ao longo dos anos têm proporcionado acréscimos significativos nos volumes recuperáveis. Por esta

razão, procura-se considerar a influência do progresso tecnológico utilizando funções de controle não lineares.

Conforme proposto por Knoring *et al.* (1999), a exploração é um processo com *feed-back* onde a estratégia adotada afeta os resultados subsequentes. Entretanto, o que deixou de ser considerado por Knoring *et al.* (1999) é que a estratégia está relacionada ao preço do petróleo. Quanto maior o preço do petróleo, maior será o investimento disponível em pesquisas e exploração, melhor será a tecnologia utilizada que, por sua vez, afetará na estratégia a ser adotada (Figura 16).

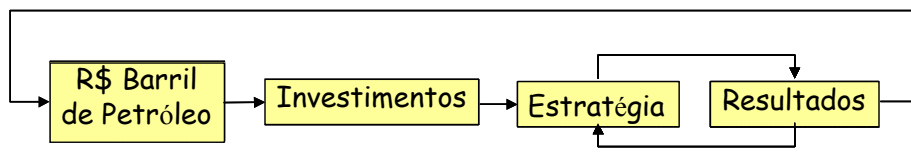


Figura 1 – Influência do preço do petróleo nos resultados subsequentes e vice-versa.

Fonte: o autor.

Segundo Knoring *et al.* (1999), controle pode ser entendido como sendo a seleção de uma ação particular, dado um conjunto de ações possíveis. Por exemplo, considere um conjunto de opções possíveis para recuperar óleo de um reservatório. A escolha entre diferentes técnicas de recuperação primária, secundária, terciária ou, ainda, a injeção de um novo produto que possa surgir nos próximos anos devido ao avanço tecnológico. Este conjunto de opções possíveis é diretamente influenciado pelo preço do petróleo.

Cada uma destas técnicas de recuperação é econômica sob diferentes circunstâncias e a escolha inevitavelmente deverá considerar o preço do petróleo. Técnicas que são economicamente inviáveis poderiam se tornar viáveis em períodos de alta no preço do petróleo.

Se esta situação viesse a ocorrer, muitas reservas seriam reavaliadas considerando um melhor fator de recuperação (FR) e, conseqüentemente, aumentando o volume recuperável sem a descoberta de novos campos. Ou seja, teremos um acréscimo no volume (R_t) considerando somente os campos já descobertos (Figura 17). Este acréscimo no volume pode ser dado ainda pela viabilidade de campos não considerados anteriormente, devido ao baixo preço do petróleo ou indisponibilidade tecnológica.

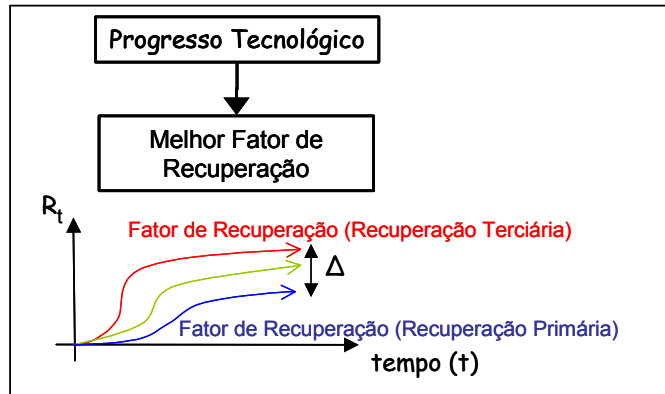


Figura 2 - Acréscimo no volume (R_t) devido ao progresso tecnológico.

Fonte: o autor.

Em outras palavras, caso o preço do óleo suba a um valor extremamente alto, desde que ainda não tenhamos qualquer outra fonte alternativa de energia para substituir o petróleo, a tecnologia mudará a fim de atingir uma recuperação máxima, mesmo que isto seja altamente custoso para os padrões atuais.

Vimos também na Figura 9 que o princípio da modelagem do acréscimo de reserva (ΔR) proposto por Knoring *et al.* (1999) foi construído como sendo o produto de duas funções que representam tendências opostas: a função seleção de controle $\varphi(R)$ e a função seleção de condições $f(R)$. Dessa forma, se os resultados (ΔR) são influenciados pelo preço do petróleo, é de se esperar que $\varphi(R)$ e $f(R)$ também sejam influenciados.

A função seleção de controle baseia-se na informação obtida. Quanto maior o conhecimento da região, maior será a experiência adquirida na exploração e, conseqüentemente, melhor será o controle.

Assumir uma função de controle linear $\varphi(R) = k \times R_t$, conforme os modelos propostos por Knoring *et al.* (1999), significa considerar o acréscimo de informação constante entre iguais intervalos de tempo. Por exemplo, seria assumir que o acréscimo de informação seja igual entre os instantes $[t; t+1]$ e $[t+1; t+2]$.

Define-se “conhecimento instantâneo” o acréscimo de conhecimento entre os instantes $[t; t+1]$ como sendo a primeira derivada da função seleção de controle. Para os modelos propostos por Knoring *et al.* (1999), $\varphi(R) = k \times R_t$, a derivada de uma reta é constante e igual a “k” para todo intervalo t . Será que este acréscimo de conhecimento é o mesmo em 40 anos de exploração?

Historicamente, após períodos de grande impacto no preço do petróleo, novas tecnologias tornaram-se viáveis. Conforme dito anteriormente, quando o preço do petróleo sobe a um patamar muito elevado, a tecnologia empregada para explorar e produzir o petróleo muda e, conseqüentemente, muda a informação adquirida da região de interesse (controle).

Dessa forma, o acréscimo de conhecimento (primeira derivada da função de controle) também irá mudar ao longo do tempo e não permanecerá a constante proposta por Knoring *et al.* (1999). A Figura 18.a mostra um exemplo para o caso de uma função de controle não linear onde os grandes campos são descobertos nos estágios iniciais do processo de exploração. Analogamente, a Figura 18.b ilustra um caso onde os grandes campos são descobertos em estágios avançados da exploração.

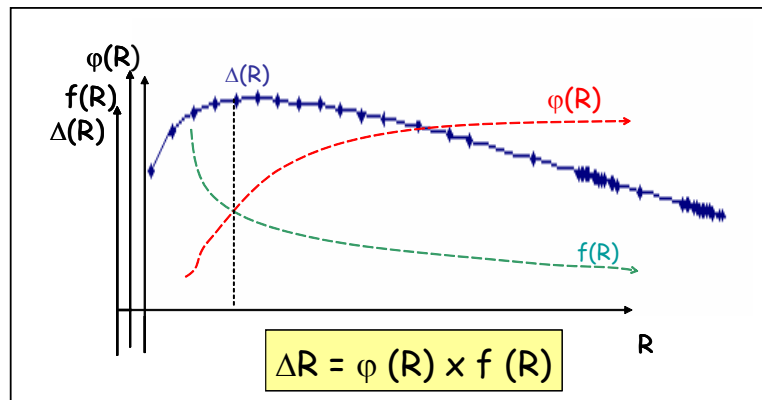


Figura 18.a - Grandes campos descobertos no início do processo de exploração.

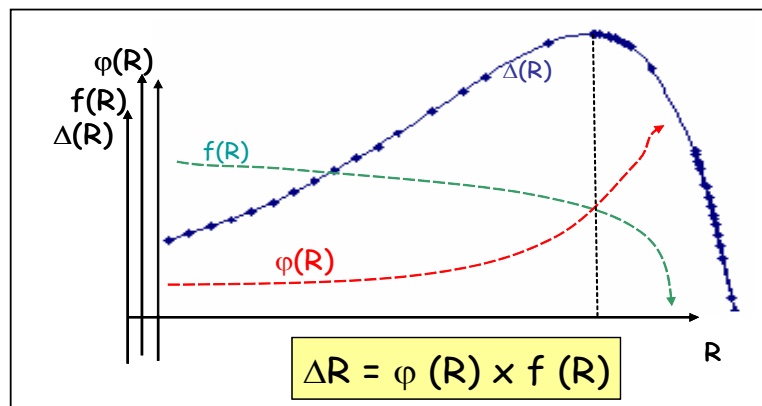


Figura 18.b - Grandes campos descobertos no final do processo de exploração.

Figura 3 - $\varphi(R)$ não linear. Grandes descobertas: a) no início; b) no final da exploração.

Fonte: o autor.

É relevante observar que o objetivo aqui não é usar o preço do petróleo de forma quantitativa, mas sim qualitativamente, para alavancar o acréscimo de descobertas. A Figura 19 ilustra que controle relacionado qualitativamente ao preço do petróleo significa um “*Efeito Cascata*” no processo de descoberta.

O aumento no preço do petróleo estimula novos investimentos em pesquisa e exploração que possibilitam o desenvolvimento de novas tecnologias. O surgimento de novas tecnologias muda a estratégia adotada (ex. meios de recuperação e objetivos exploratórios). Além disso, melhorias na tecnologia de perfuração podem permitir a redução nos custos de perfuração. Custos mais baixos possibilitam perfurar mais poços e, conseqüentemente, maior chance de encontrar novas descobertas. Perfurar mais poços significa mais informação (controle) que, segundo Knoring *et al.* (1999), resulta em mais descobertas.

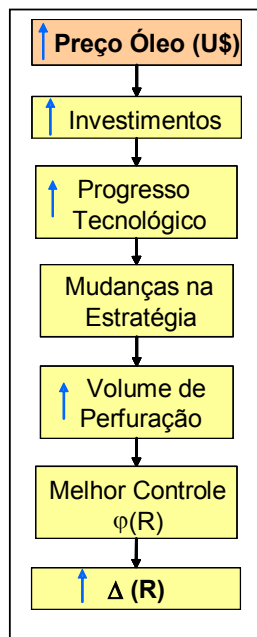


Figura 4 - Efeito Cascata devido ao aumento no preço do petróleo.

Fonte: o autor.

Deste modo, não temos porque considerar que o controle seja linear conforme os modelos propostos por Knoring *et al.* (1999).

O principal objetivo desta nova metodologia passa a ser encontrar o formato da função seleção de controle, seja exponencial, potência, logarítmica, etc., que melhor explica o processo de descoberta de uma dada região. Esta nova função de controle dará origem a um novo modelo matemático, que melhor

representa a evolução do processo de descoberta, considerando-se as mudanças tecnológicas ao longo do tempo.

Propõem-se, empiricamente, sete funções matemáticas não lineares que melhor representem a função seleção de controle (Equações 48 a 54). Estas funções, quando combinadas (multiplicadas) com as nove funções seleção de condições propostas por Knoring *et al.* (1999), dão origem a $7 \times 9 = 63$ novos modelos empíricos que representam o processo de evolução de descobertas.

Crescimento Exponencial:

$$1. \quad \varphi(R) = \exp(\alpha \cdot R_i^\beta) \quad (1)$$

$$2. \quad \varphi(R) = \exp(\alpha + \beta R_i) \quad (2)$$

$$3. \quad \varphi(R) = \exp(\alpha + R_i^\beta) \quad (3)$$

Potência:

$$4. \quad \varphi(R) = \alpha R_i^\beta \quad (4)$$

Crescimento Logarítmico:

$$5. \quad \varphi(R) = \alpha + \beta \cdot \ln(R_i) \quad (5)$$

Curva de Aprendizagem:

$$6. \quad \varphi(R) = c - a \cdot \exp(-k \cdot R_i) \quad (6)$$

Função Logística:

$$7. \quad \varphi(R) = \frac{c}{1 + \exp(\alpha - \beta \cdot R_i)} \quad (7)$$

A segunda função proposta (Equação 49) pode ser reescrita da seguinte forma: $\varphi(R) = \exp(\alpha) \cdot \exp(\beta \cdot R_i) = k \cdot \exp(\beta R_i)$. Esta equação apresenta o mesmo formato da curva de Crescimento Populacional proposta por Thomas Malthus (1798), ilustrada na Figura 20. N_0 representa a população presente no instante inicial $t=0$ e r é uma constante que varia com a espécie de população.

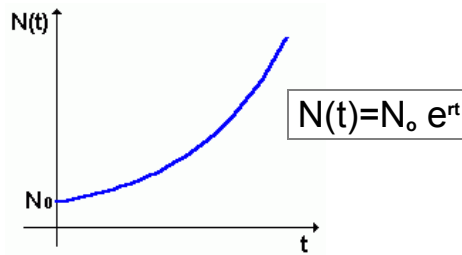


Figura 5 - Curva de Crescimento Populacional.

Fonte: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm#exp05>

Devido ao seu uso por psicólogos e educadores na descrição do processo de aprendizagem, a Equação 53 é chamada de Curva de Aprendizagem. A Figura 21 mostra que a função cresce rapidamente no início e, a seguir, de forma mais suave, aproxima-se de sua assíntota $y=c$.

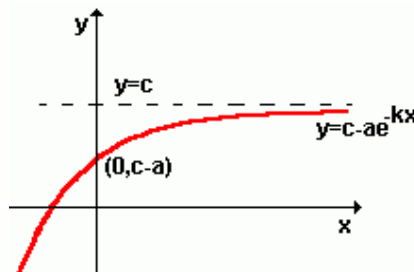


Figura 6 - Curva de Aprendizagem.

Fonte: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm#exp05>

A Figura 22 ilustra através de um exemplo o formato da Curva Logística (Equação 54).

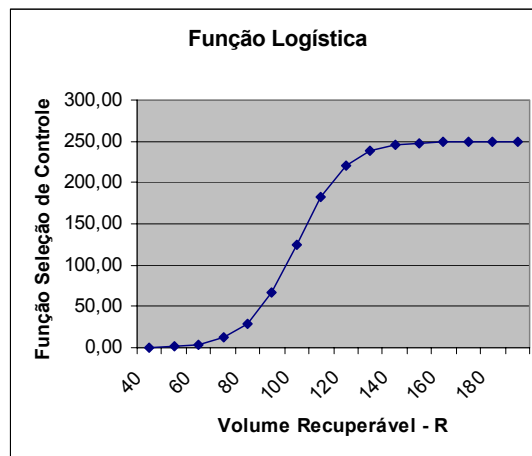


Figura 7 - Curva Logística.

Fonte: o autor.

A fim de padronizar os nomes dos 63 modelos propostos, adotou-se a nomenclatura – Modelo i x j – onde,

“i” refere-se à Função Seleção de Controle $i=1, 2, \dots, 7;$

“j” refere-se à Função Seleção de Condições $j=1, 2, \dots, 9.$

Por exemplo, o Modelo 2x9 refere-se ao modelo construído a partir da segunda Função Seleção de Controle (Equação 49) e da nona Função Seleção de Condições (Equação 24).

O Apêndice E mostra as 63 novas funções criadas. Ao combinar as Funções Seleção de Controle com as Funções Seleção de Condições, algumas equações puderam ser simplificadas. Por exemplo, ilustra-se para o Modelo 2x9 o cálculo realizado para chegar ao modelo final.

$$\Delta R = \varphi(R) \cdot f(R)$$

$$R_{t+1} - R_t = \underbrace{\left[e^{(\alpha + \beta R_t)} \right]}_{\text{Equação 49}} \cdot \underbrace{\left[e^{a - bR_t} - \left(\frac{c}{R_t} \right) \right]}_{\text{Equação 24}}, \text{ 5 parâmetros } (\alpha, \beta, a, b, c)$$

$$R_{t+1} = R_t + \left[e^{(\alpha + \beta R_t)} \cdot \left[e^{a - bR_t} - \left(\frac{c}{R_t} \right) \right] \right]$$

$$R_{t+1} = R_t + \left[e^{(\alpha)} \cdot e^{(\beta R_t)} \right] \cdot \left[e^{(a)} \cdot e^{(-bR_t)} - \left(\frac{c}{R_t} \right) \right]$$

$$R_{t+1} = R_t + \left[e^{(\alpha)} \cdot e^{(a)} \cdot e^{(\beta R_t)} \cdot e^{(-bR_t)} \right] - \left[e^{(\alpha)} \cdot e^{(\beta R_t)} \cdot \left(\frac{c}{R_t} \right) \right]$$

$$R_{t+1} = R_t + \left[e^{(\alpha)} \cdot e^{(a)} \cdot e^{(\beta R_t - bR_t)} \right] - \left[e^{(\alpha)} \cdot e^{(\beta R_t)} \cdot \left(\frac{c}{R_t} \right) \right]$$

Seja $c(1) = \exp(\alpha) \cdot \exp(a)$ $c(2) = \beta - b$ $c(3) = c \cdot \exp(\alpha)$ $c(4) = \beta$, então:

$$R_{t+1} = R_t + \left[c(1) \cdot e^{(c(2) \cdot R_t)} \right] - \left[\frac{c(3)}{R_t} \cdot e^{(c(4) \cdot R_t)} \right] \quad \textbf{Modelo 2x9}$$

Total = 4 parâmetros: $c(1), c(2), c(3), c(4).$

4.2. CONSIDERANDO NOVOS OBJETIVOS EXPLORATÓRIOS

Entende-se por novos objetivos exploratórios os diferentes alvos (*targets*) a serem explorados dentro de uma região ao longo do tempo. Dessa forma, o presente item propõe uma metodologia para considerar as mudanças nos objetivos exploratórios como, por exemplo, a exploração em regiões polares e em águas profundas.

Economides (2004) critica o chamado “Pico de Hubbert”, pois o método considera que todo o volume *in-place* esteja “ativo”. Segundo o autor, certamente os volumes *offshore* irão repetir o formato da curva proposta por Hubbert (1956). Entretanto, isto levará muito tempo até chegar ao declínio final, visto que novas áreas, tais como águas profundas e ultra profundas, são adicionadas.

Além disso, a metodologia proposta por Knoring *et al.* (1999) baseia-se num único objetivo exploratório. Por esta razão, os modelos por eles propostos pecam por não considerarem as mudanças e acréscimos de novos objetivos exploratórios ocorridos durante o processo exploratório.

Por exemplo, vamos assumir que alvos mais profundos sejam acrescentados no processo de exploração. Estas regiões podem não ter sido consideradas por muitos anos por requererem diferentes técnicas de desenvolvimento e produção. Todavia, considerar estes novos objetivos exploratórios propiciados pelo desenvolvimento tecnológico criaria mudanças na função seleção de condições.

Pensando conforme Knoring *et al.* (1999), ou seja, com as bacias sendo exploradas e avaliadas utilizando tecnologia atual e sob específica seleção de condição, o gráfico de reserva acumulada (R) vs. tempo (t) tem um único ponto de inflexão. Portanto, a curva de acréscimo de reserva (ΔR) vs. tempo (t) tem um único máximo (Figura 9).

Dois ou mais máximos locais no gráfico ΔR vs. tempo podem ocorrer em regiões com diferentes funções seleção de condições, como por exemplo, regiões onde os *plays* mais profundos começaram a ser explorados enquanto a exploração em *plays* menos profundos ainda estava sendo realizada. Uma nova seleção e

ampliação dos objetivos acarretam o aumento do esforço exploratório e, conseqüentemente, novas descobertas e novos picos na curva ΔR .

Para superar este problema, propõe-se criar uma nova função seleção de condições $f(R)$ que permita a superposição dos objetivos exploratórios considerando os avanços tecnológicos. A Figura 23 ilustra o formato da função seleção de condições $f(R)$ proposta.

Ao acrescentarmos novas regiões num instante $(i+1)$ qualquer, admite-se que a função seleção de condição cresça no momento em que estes novos objetivos possam ser explorados. Em outras palavras, a condição no instante $(i+1)$ é melhor do que a condição no instante (i) , deixando a função de ser monotonamente decrescente, conforme visto na Figura 9.

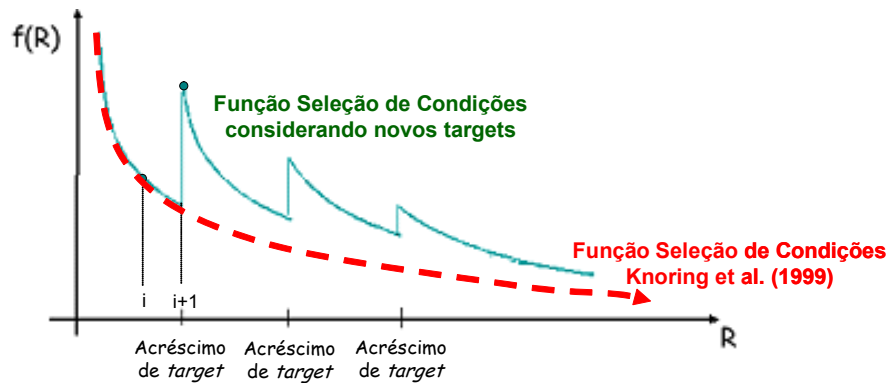


Figura 8 - Função Seleção de Condições considerando novos objetivos exploratórios.

Fonte: o autor.

Por outro lado, menor será a informação adquirida na exploração destas novas regiões e, conseqüentemente, pior será o controle no instante $(i+1)$. A Figura 24 ilustra o que acontece com a função seleção de controle no momento em que novos objetivos exploratórios são adicionados. O controle no instante $(i+1)$ é pior do que o controle no instante (i) , deixando a função de ser monotonamente crescente conforme visto na Figura 9.

As Figuras 23 e 24 representam o caso em que os grandes campos são descobertos no início do processo de exploração. Quando isto ocorre, a condição cai drasticamente no início e, a seguir, de forma mais suave, até que um novo alvo seja adicionado. Inversamente, a função de controle cresce mais rapidamente no início e, em seguida, de forma mais suave.

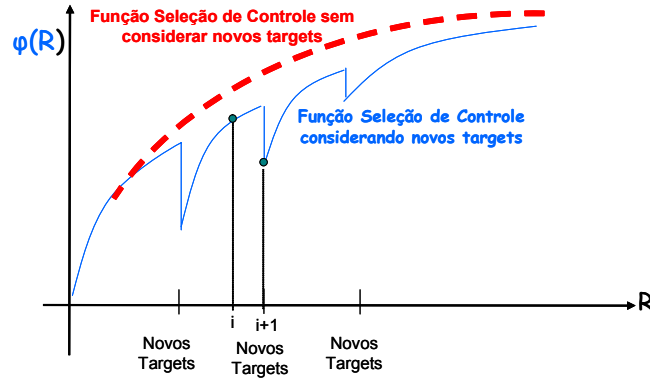


Figura 9 – Função Seleção de Controle considerando novos objetivos exploratórios.
Fonte: o autor.

A proposta desta metodologia é combinar esta nova função de controle (Figura 24) e de condição (Figura 23). O produto destas novas funções (Figura 25) dará origem a um novo modelo, que considera as mudanças tecnológicas e, conseqüentemente, permite a superposição dos objetivos exploratórios não considerada anteriormente em Knoring *et al.* (1999) e Hubbert (1956).

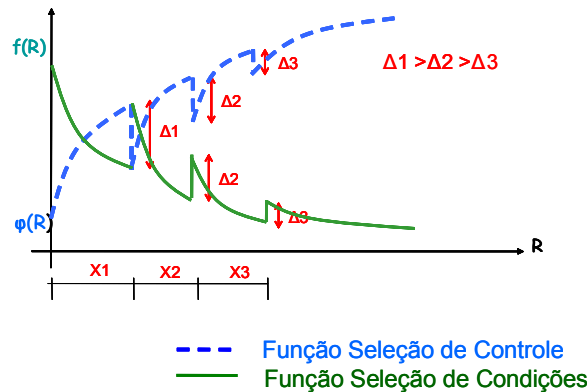


Figura 25.a - Grandes campos descobertos no início do processo de exploração.

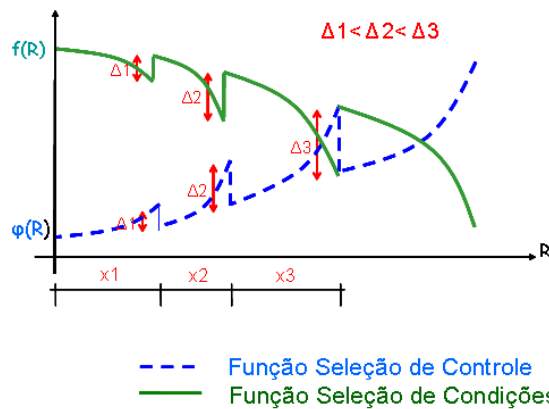


Figura 25.b - Grandes campos descobertos no final do processo de exploração.

Figura 10 – Funções de Controle e de Condição propostas com grandes descobertas: a) no início; b) no final do processo exploratório.
Fonte: o autor.

A Figura 26.a e a Figura 26.b mostram, respectivamente, os gráficos do acréscimo no volume recuperável (ΔR) para os casos onde os grandes campos foram descobertos no início e no final do processo de exploração. Os valores x_1 , x_2 e x_3 referem-se aos instantes em que novos objetivos exploratórios são acrescentados.

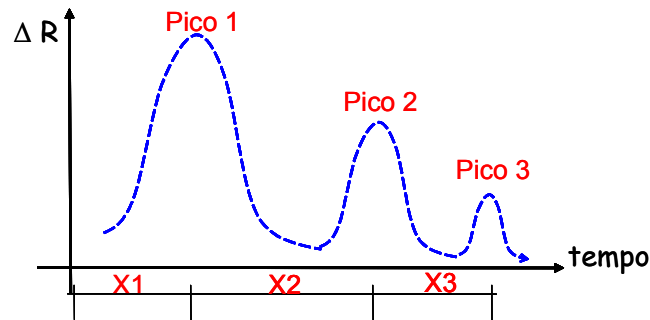


Figura 26.a – Grandes campos descobertos no início do processo de exploração.

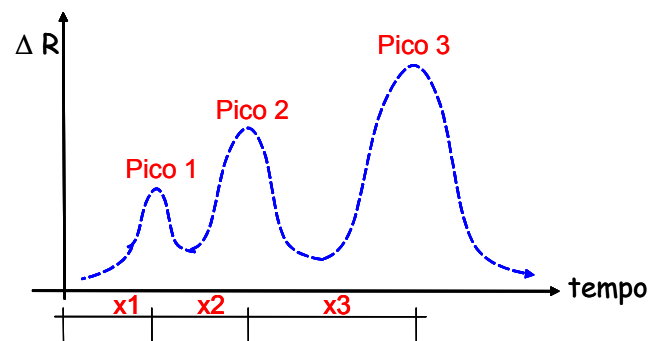


Figura 26.b - Grandes campos descobertos no final do processo de exploração.

Figura 11 - Curva ΔR proposta considerando novos objetivos exploratórios com grandes descobertas: a) no início; b) no final do processo exploratório.

Fonte: o autor.

É relevante observar que, se os grandes campos são descobertos no início do processo de exploração, então o benefício adquirido pelo incremento de novas regiões será inferior ao benefício adquirido pelo incremento das regiões anteriores. Isto é, $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_n$ (Figura 25.a) e, conseqüentemente, na Figura 26.a, o primeiro pico será o maior, representando as grandes descobertas no início do processo de exploração.

Analogamente, se os grandes campos são descobertos no final do processo de exploração, então $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_n$ (Figura 25.b). Conseqüentemente, na Figura 26.b, o primeiro pico será o menor, representando as grandes descobertas no final do processo de exploração.

Quando admitimos estas novas formas para as funções de controle e condição, confrontamo-nos com um novo problema: determinar os pontos x_1 , x_2 e x_3 na Figura 25.

Conforme visto na Figura 19, os acréscimos no volume de óleo recuperável (ΔR) são indiretamente afetados pelo avanço tecnológico. Uma vez que ΔR é o produto das funções de controle e condição, espera-se que os incrementos de novas regiões em $f(R)$ e $\varphi(R)$ também sejam afetados pela tecnologia disponível.

A metodologia sugere que o aparecimento de uma nova curva sigmóide no gráfico R_t (um novo pico na curva ΔR) esteja atrelado às novas tecnologias. Isto porque novas tecnologias possibilitam a exploração em novas áreas e, por conseguinte, o acréscimo de novos volumes recuperáveis.

Por exemplo, o avanço tecnológico tornou viável a exploração e produção de campos localizados em águas profundas após o “Choque do Petróleo”. A sísmica 3-D proporcionou o reconhecimento de novas áreas promissoras. Técnicas IOR/EOR melhoraram a recuperação do óleo possibilitando aumento no volume dos campos existentes.

Resumindo, a presente metodologia propõe que os ajustes sejam feitos pelos mesmos modelos apresentados no item 4.1. A única diferença é a divisão da curva de recursos recuperáveis (R_t) obtendo-se diferentes ajustes para cada intervalo x_1 , x_2 e x_3 na Figura 25.

4.3. UTILIZANDO CONTROLE E CONDIÇÃO EM FUNÇÃO DO ESFORÇO EXPLORATÓRIO

As duas metodologias anteriores nos dão confiança em fazer previsões apenas para o curto prazo, pois o ajuste depende do valor do ano imediatamente anterior. Por exemplo, se estamos no ano (t), a estimativa do segundo ano (R_{t+2}) se baseará no valor do ano anterior (R_{t+1}), valor este que pode ser diferente do valor real. Na medida em que nos afastamos da data atual (t), aumentamos a incerteza dos valores calculados e, conseqüentemente, menos confiáveis serão as previsões.

Dessa forma, surge a necessidade de criar novos modelos. A metodologia proposta nesta seção segue o mesmo princípio proposto por Knoring *et al.* (1999) e ilustrado na Figura 9. Entretanto, a fim de fazer previsões a longo prazo, propõe-se modificar as funções seleção de controle e de condição.

Em vez de utilizar funções seleção de controle e de condição em função dos volumes recuperáveis (R_t), propõe-se utilizar a condição e o controle em função do esforço exploratório acumulado (L). As Figuras 27.a e 27.b mostram as mudanças de eixos propostas.

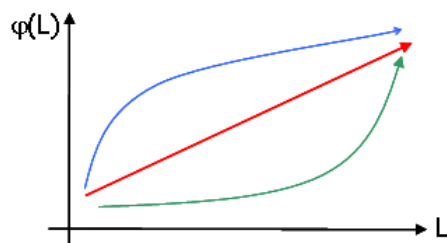


Figura 27.a – Controle em função do volume exploratório (L).

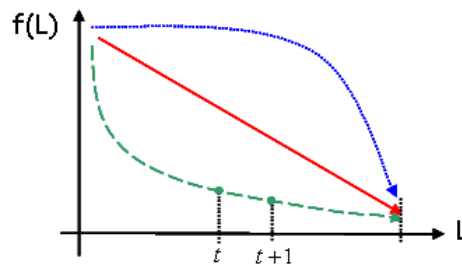


Figura 27.b – Condição em função do volume exploratório (L).

Figura 12 – Controle e Condição em função do volume exploratório (L).

Fonte: o autor.

Dessa forma, o ajuste e as previsões do volume recuperável dependeriam simplesmente do número de poços “ L ” referente ao ano em que se deseja fazer a previsão. Por exemplo, para um horizonte de 10 anos (R_{t+10}), necessitamos somente do número total (acumulado) de poços exploratórios a serem perfurados nos próximos 10 anos.

Pelo fato de esta metodologia lidar com número de poços acumulados ao longo do tempo, deve-se usar o volume recuperável acumulado (R_t), não os acréscimos (ΔR), como sendo o produto das funções seleção de controle e de condição.

$$R(L) = \varphi(L).f(L) \quad (8)$$

Quanto mais exploramos a região através da perfuração de poços exploratórios (L), melhor será o conhecimento da região e, conseqüentemente, melhor será o controle. Por outro lado, menor é a chance de encontrar um novo campo, pois temos menos campos a serem descobertos no instante ($t+1$) do que o instante (t).

Foram testadas as 7 funções seleção de controle (Equações 48 a 54) e as 9 funções seleção de condição (Equações 16 a 24) apresentadas no item 4.1. A única diferença é a troca de “ R_t ” para “ L ”.

As Equações 56 a 62 representam as novas equações da função seleção de controle em função de “ L ”.

$$\text{Controle 1: } \varphi(L) = \exp(\alpha . L_t^\beta) \quad (9)$$

$$\text{Controle 2: } \varphi(L) = \exp(\alpha + \beta L_t) \quad (10)$$

$$\text{Controle 3: } \varphi(L) = \exp(\alpha + L_t^\beta) \quad (11)$$

$$\text{Controle 4: } \varphi(L) = \alpha . L_t^\beta \quad (12)$$

$$\text{Controle 5: } \varphi(L) = \alpha + \beta . \ln(L_t) \quad (13)$$

$$\text{Controle 6: } \varphi(L) = c - \alpha . \exp(-\beta . L_t) \quad (14)$$

$$\text{Controle 7: } \varphi(L) = \frac{c}{1 + \exp(\alpha - \beta . L_t)} \quad (15)$$

As Equações 63 a 71 representam as novas equações da função seleção de condição em função de “ L ”.

$$\text{Condição 1: } f(L) = a - bL_t \quad (16)$$

$$\text{Condição 2: } f(L) = 1 - a' L_t^b \quad (17)$$

$$\text{Condição 3: } f(L) = e^{a-bL_t} \quad (18)$$

$$\text{Condição 4: } f(L) = 1 - (1 - c + a . L_t^{1/b})^b \quad (19)$$

$$\text{Condição 5: } f(L) = c - a \cdot L_t^b \quad (20)$$

$$\text{Condição 6: } f(L) = b \cdot \text{Ln} \left(\frac{A}{L_t} \right) \quad (21)$$

$$\text{Condição 7: } f(L) = a \left(\frac{A - L_t}{A} \right)^b \quad (22)$$

$$\text{Condição 8: } f(L) = e^{a-bL_t} - c \quad (23)$$

$$\text{Condição 9: } f(L) = e^{a-bL_t} - \frac{c}{L_t} \quad (24)$$

Novamente, estas funções quando combinadas (multiplicadas) dão origem a $7 \times 9 = 63$ novos modelos empíricos que representam o processo de evolução de descobertas. O Apêndice F mostra as equações no formato a ser inserido no *software* econométrico (E-Views 4.1) de todos os modelos testados.