3
Considerações de vários sinais OFDM

Os resultados do capítulo anterior podem ser estendidos para o caso em que L sinais OFDM compartilham a não linearidade. Neste caso, a envoltória complexa do sinal na entrada da não linearidade se escreve

$$\tilde{r}(t) = \sum_{n=0}^{L-1} \tilde{m}_{(n)}(t)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t} \tag{3-1}$$

onde $\tilde{m}_{(n)}(t)$ é a envoltória complexa do n-ésimo sinal OFDM em relação à freqüência de sua primeira portadora e Δf_n é a diferença entre as freqüências da primeira portadora do n-ésimo sinal OFDM e da primeira portadora do primeiro sinal OFDM. (ver Figura 3.1). Isto significa que

$$\tilde{\mathfrak{m}}_n(t) = \tilde{m}_{(n)}(t)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t} \tag{3-2}$$

representa a envoltória complexa do n-ésimo sinal OFDM com relação à freqüência da primeira portadora do primeiro sinal OFDM.

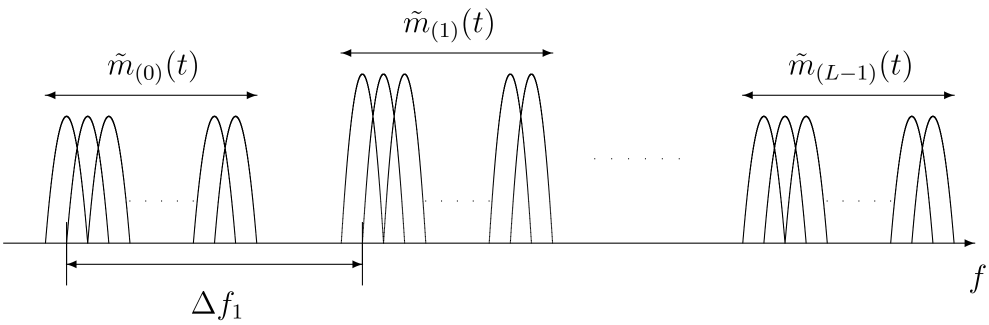

Figura 3.1: L sinais OFDM

A média do processo estocástico $\tilde{r}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\tilde{r}(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{L-1} \tilde{m}_{(n)}(t)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} \mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t)\right]\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t} \qquad (3\text{-}3) \end{aligned}$$

o que, a partir de (2-35), permite escrever

$$\mathbb{E}\left[\tilde{r}(t)\right] = 0 \qquad (3\text{-}4)$$

A Função Autocorrelação do processo estocástico $\tilde{r}(t)$ é definida por

$$R_{\tilde{r}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[\tilde{r}(t_1)\tilde{r}^*(t_2)\right] \qquad (3\text{-}5)$$

A partir de (3-1), obtém-se

$$\begin{aligned} R_{\tilde{r}}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}^*_{(\ell)}(t_2)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t_1}\, e^{-j\,2\pi\Delta f_\ell t_2}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{L-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}^*_{(\ell)}(t_2)\right]\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t_1}\, e^{-j\,2\pi\Delta f_\ell t_2} \qquad (3\text{-}6) \end{aligned}$$

Considerando que o n-ésimo sinal OFDM é independente do ℓ-ésimo sinal OFDM, tem-se

$$\mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}^*_{(\ell)}(t_2)\right] = \begin{cases} \mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{m}^*_{(\ell)}(t_2)\right] = 0, & n \neq \ell \\ R_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau), & n = \ell \end{cases} \qquad (3\text{-}7)$$

assim a Função Autocorrelação de $\tilde{r}(t)$ se escreve

$$R_{\tilde{r}}(\tau) = \sum_{n=0}^{L-1} R_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n \tau} \qquad (3\text{-}8)$$

onde $R_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau)$ é dada por (2-62). A partir de (3-4) e (3-8) podemos concluir que $\tilde{r}(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo (ESA). Sendo assim a potência média $P_{\tilde{r}}$ da envoltória complexa $\tilde{r}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} P_{\tilde{r}} &= R_{\tilde{r}}(0) \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} R_{\tilde{m}_{(n)}}(0) \\ &= \sum_{n=0}^{L-1} P_{\tilde{m}_{(n)}} \end{aligned} \tag{3-9}$$

onde $P_{\tilde{m}_{(n)}}$ representa a potência média da envoltória complexa do n-ésimo sinal OFDM.

Definindo-se a Função Autocorrelação normalizada de $\tilde{r}(t)$ como

$$\bar{R}_{\tilde{r}}(\tau) = \frac{R_{\tilde{r}}(\tau)}{P_{\tilde{r}}} \tag{3-10}$$

a partir de (3-8) e (3-9), tem-se

$$\bar{R}_{\tilde{r}}(\tau) = \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{P_{\tilde{r}}} R_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n \tau} \tag{3-11}$$

considerando (2-113), podemos reescrever (3-11), como

$$\bar{R}_{\tilde{r}}(\tau) = \sum_{n=0}^{L-1} \frac{P_{\tilde{m}_{(n)}}}{P_{\tilde{r}}} \bar{R}_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n \tau} \tag{3-12}$$

A partir da definição de função pseudo autocorrelação de um processo estocástico, dada por

$$\hat{R}_{\tilde{r}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[\tilde{r}(t_1)\tilde{r}(t_2)\right] \tag{3-13}$$

e de (3-1), obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\tilde{r}}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}_{(\ell)}(t_2)\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t_1}\, e^{j\,2\pi\Delta f_\ell t_2}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{L-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}_{(\ell)}(t_2)\right]\, e^{j\,2\pi\Delta f_n t_1}\, e^{j\,2\pi\Delta f_\ell t_2} \end{aligned} \tag{3-14}$$

Considerando-se novamente que o n-ésimo sinal OFDM é independente do ℓ-ésimo sinal OFDM, tem-se

$$\mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\tilde{m}_{(\ell)}(t_2)\right] = \begin{cases} \mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(n)}(t_1)\right]\mathbb{E}\left[\tilde{m}_{(\ell)}(t_2)\right] = 0, & n \neq \ell \\ \\ \hat{R}_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau) = 0, & n = \ell \end{cases} \tag{3-15}$$

onde $\hat{R}_{\tilde{m}_{(n)}}(\tau)$ é dado por (2-82). Assim tem-se que a função pseudo autocorrelação de $\tilde{r}(t)$ é nula, ou seja,

$$\hat{R}_{\tilde{r}}(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall\ t_1, t_2 \tag{3-16}$$

Note que (3-4), (3-8) e (3-16) permitem concluir que $\tilde{r}(t)$ é um processo estocástico complexo, próprio, estacionário no sentido amplo e de média nula. Além disso, a partir de (3-1) observa-se que se as envoltórias complexas de $\tilde{\mathfrak{m}}_n(t)$ são processos estocásticos gaussianos, conforme mostrado no Capítulo 2, a envoltória complexa $\tilde{r}(t)$ será também um processo estocástico gaussiano.

Desse modo os resultados do Capítulo 2 podem se aplicar ao sinal $r(t)$.