

5

Um simulador estocástico para o fluxo de caixa

O objetivo desse capítulo é o de apresentar um simulador estocástico para o fluxo de caixa de um plano de previdência do tipo PGBL de um único indivíduo.

Primeiramente serão descritas as hipóteses do modelo. Depois apresentase o simulador estocástico, que é composto de duas partes: uma para o período de diferimento e outra para o período de benefícios. E, por fim, são apresentados os resultados das simulações.

5.1

Hipóteses sobre o plano de previdência

São feitas diversas hipóteses sobre o plano de previdência do tipo PGBL, a fim de simplificar o modelo matemático. O modelo pensado considera um plano de contribuição definida, que não estabelece o benefício no ato da contratação, mas sim a contribuição que é constante, ou seja não é alterada durante o período de diferimento. O benefício só será conhecido ao final da vida laborativa do participante e é vitalício. Os resgates e as portabilidades ficam bloqueadas e os encargos não são atrelados ao plano. Durante o período de diferimento, os pagamentos são mensais e são realizados no fim de cada mês. É assumido que o participante inicia o plano no dia do seu aniversário, e que ele não morre no período de diferimento. A tábua de mortalidade utilizada é a AT-2000 com taxa de 5% ao ano para o desconto dado ao benefício no momento da aposentadoria.

5.2

O simulador estocástico

O modelo para o plano de previdência de um indivíduo com as hipóteses feitas acima possui dois períodos bem definidos, o de diferimento, que corresponde ao intervalo de meses do início do plano até o momento de sua aposentadoria, e o de benefícios, que corresponde ao período do mês seguinte a sua aposentadoria até a sua morte.

Primeiramente será apresentado o simulador para o período de diferimento e em seguida o simulador para o período de benefícios.

5.2.1

Simulador para o período de diferimento

Suponha que o participante deposite na conta do seu plano uma quantia C no fim de cada mês e que o montante existente na conta no início de cada mês é investido de acordo com a seguinte carteira: 40% em renda fixa (RF), 30% em renda variável (RV) e 30% em títulos (TIT). Isso representa uma restrição muito forte no modelo, mas que em trabalhos futuros será substituída por um otimizador estocástico com múltiplos estágios para definir a melhor carteira a longo prazo. Para maiores detalhes desse problema de otimização veja [11, 7, 2, 5].

Portanto se existiam M_t unidades monetárias no início do mês t na conta do participante, no início do mês $t + 1$ a conta terá o saldo de:

$$M_{t+1} = 0.4 \times M_t \times (1 + RF_t) + 0.3 \times M_t \times (1 + RV_t) + 0.3 \times M_t \times (1 + TIT_t) + C, \quad (5-1)$$

onde RF_t , RV_t e TIT_t correspondem, respectivamente, aos juros do mês t dos ativos de renda fixa, renda variável e dos títulos. Essa fórmula recursiva se mostra bem adequada porque esses juros variam com o tempo. Eles são estimados pelo modelo VAR das variáveis financeiras apresentadas no capítulo 4.

A taxa de juros RF_t referente a renda fixa é representada pela variável de certificados de depósitos interfinanceiro CDI_t . Para a taxa da renda variável RV_t foi utilizada a variável índice do IBOVESPA, IBO_t . Finalmente, para a taxa dos títulos TIT_t foi utilizado a taxa de SWAP de 180 dias, $SWAP_t$. Como todas essas taxas são nominais e o que importa para o segurado é o poder aquisitivo de seus benefícios em termos reais, todas as rentabilidades devem ser corrigidas pela inflação, ou seja descontadas pelo IGPM. A conversão da taxa nominal em taxa efetiva de cada uma delas é feita através da seguinte fórmula:

$$Taxa_Efetiva_t = \frac{1 + Taxa_Nominal_t}{1 + IGPM_t} - 1.$$

Os dados de entrada da primeira parte do simulador são:

- A idade inicial, denotada por $Idade_Inicial$, do participante.
- A idade em que o participante irá se aposentar, $Idade_Aposentadoria$.
- O valor da contribuição mensal C .

O simulador do período de diferimento seguirá o seguinte algoritmo:

Passo 1: $M_0 = 0$; $t = 0$; $Idade = Idade_Inicial$.

Passo 2: Estime o vetor $\left[\begin{matrix} CDI & IBO & IGPM & SWAP \end{matrix} \right]_t^T$ para o mês t usando o modelo VAR descrito na equação 4-1.

Passo 3: Calcule M_{t+1} usando a equação 5-1.

Passo 4: $t = t + 1$.

Passo 5: Se $t \bmod 12 = 0$, então $Idade = Idade + 1$.

Passo 6: Se $Idade < Idade_Aposentadoria$ então volte ao Passo 2, senão $M_{final} = M_t$; e termine.

Assim, essa primeira parte do simulador calcula um cenário para o montante final de um indivíduo, cujo valor é armazenado na variável M_{final} .

5.2.2 Simulador para o período de benefícios

Seja M_{final} o valor do montante que o indivíduo acumulou durante o período de diferimento. Os *benefícios* são pagamentos constantes que os participantes recebem em função da sua aposentadoria e de sua expectativa de vida futura. O cálculo do benefício do primeiro ano, denotado por B_1 , é dado por

$$B_1 = \frac{M_{final}}{12\ddot{a}_x^{(12)}}, \quad (5-2)$$

onde $\ddot{a}_x^{(12)}$ é a anuidade de vida mensal de um indivíduo com uma idade x considerando a taxa de desconto de 5%, e sua fórmula é dada pela equação 3-6. Os benefícios são ajustados ao final de cada ano pela inflação acumulada no ano, sendo essa representada pela série $IGPM_t$. O benefício no ano a é dado por:

$$B_a = B_{a-1} \prod_{s=1}^{12} (1 + IGPM_{12(a-1)+s}) \quad (5-3)$$

O *saldo em conta* é o valor em caixa da seguradora, ou seja, é o valor atual aplicado na carteira descontado o benefício mensal. Esse saldo em conta continua sendo investido durante o período de benefícios da mesma forma que

no período de diferimento, se ainda houver saldo positivo. Assim, o saldo em conta no mês s , S_s , é dado por:

$$S_{s+1} = \begin{cases} 0.4 \times S_s(1 + RF_s) + 0.3 \times S_s(1 + RV_s) + 0.3 \times S_s(1 + TIT_s) - B_{s/12}, & \text{se } S_s > 0 \\ S_s - B_{s/12}, & \text{se } S_s \leq 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

sendo que $S_0 = M_{final}$.

É necessário agora modelar a incerteza em relação à sobrevivência do indivíduo. Para cada ano, o simulador gera uma variável aleatória distribuída por uma Bernoulli(q_x), onde q_x é a probabilidade do indivíduo na idade x morrer entre x e $x + 1$. Para isto é gerado um número aleatório uniformemente distribuído entre $[0, 1]$. Se o número gerado for maior do que q_x , então o indivíduo sobrevive e o processo é repetido para o ano seguinte. Caso contrário, se o número gerado for menor ou igual a q_x , o indivíduo morre. Resta saber em qual mês ocorre a morte. Para isto, o simulador gera um número aleatório discreto distribuído uniformemente entre 1 e 12 e o mês em questão corresponderá ao mês da morte do indivíduo.

Os dados de entrada da segunda parte do simulador são:

- A idade em que o indivíduo se aposentou, denotada por $Idade_Aposentadoria$.
- O montante final acumulado M_{final} .

O simulador do período de benefícios seguirá o seguinte algoritmo:

Passo 1: $S_0 = M_{final}$; $s = 0$; $Idade = Idade_Aposentadoria$.

Passo 2: Calcule o benefício B_1 de acordo com a equação 5-2.

Passo 3: Estime o vetor $\left[\begin{array}{cccc} CDI & IBO & IGPM & SWAP \end{array} \right]_s^T$ para o mês s usando o modelo VAR descrito na equação 4-1.

Passo 4: Calcule S_{s+1} usando a equação 5-4.

Passo 5: $s = s + 1$.

Passo 6: Se $s \bmod 12 = 0$, então $Idade = Idade + 1$ e calcule o benefício $B_{s/12}$ de acordo com a equação 5-3.

Passo 7: Se $Morreu(Idade, s \bmod 12) = FALSO$ então volte ao Passo 3, senão $S_{final} = S_t$ e termine.

A função $Morreu(x, s)$ gera a Bernoulli(q_x) quando $s = 0$ e armazena o resultado. Se o resultado foi positivo (ou seja, o indivíduo morre com a idade x), então ela gera e armazena o mês m em que o indivíduo morre. Assim, ela retorna *VERDADE* somente quando o resultado foi positivo e $s = m$, e retorna *FALSO* em todos os outros casos.

O saldo final em conta é armazenado em S_{final} .

5.3

Resultados da simulação

O simulador foi implementado no MATLAB® 7.0.

Para cada idade x foram geradas 100 simulações, onde $x = 20, 21, \dots, 50$. Independentemente da idade, foi considerado que cada participante contribuía com o valor de R\$1.000,00 por mês e se aposentaria aos 70 anos. A entrada no plano considerada foi a de janeiro de 2006, por ser o mês seguinte ao do período de aprendizagem do modelo econométrico (janeiro de 2000 até dezembro de 2005).

Para ilustrar o modelo econométrico foram gerados cenários para um período de vida de uma pessoa com 20 anos que inicia o plano em janeiro de

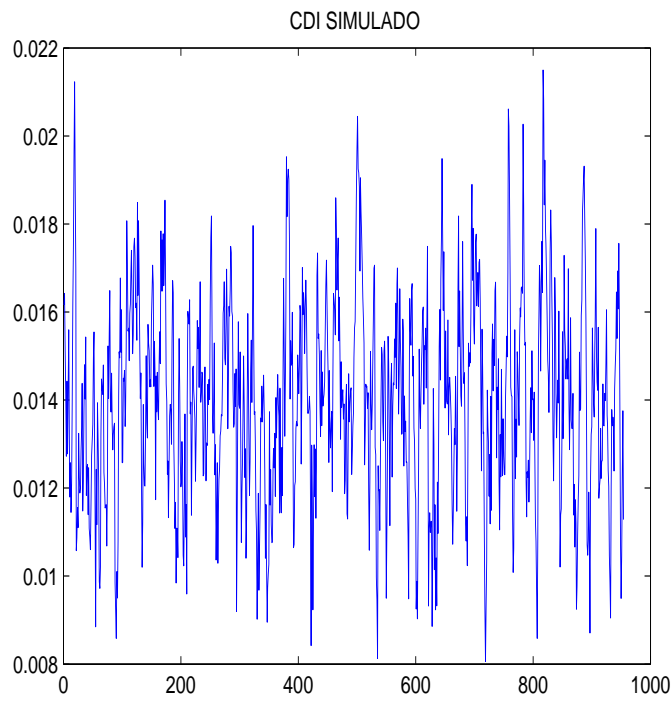


Figura 5.1: Um cenário para a série CDI.

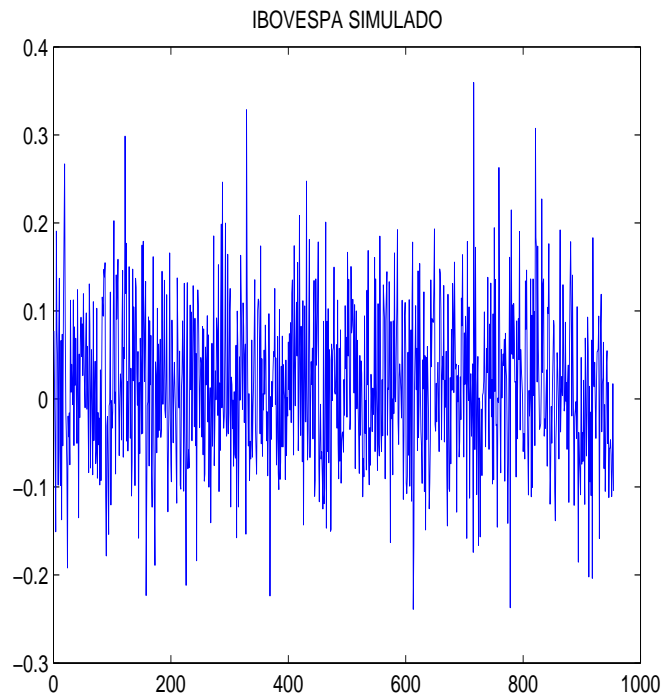


Figura 5.2: Um cenário para a série IBOVESPA.

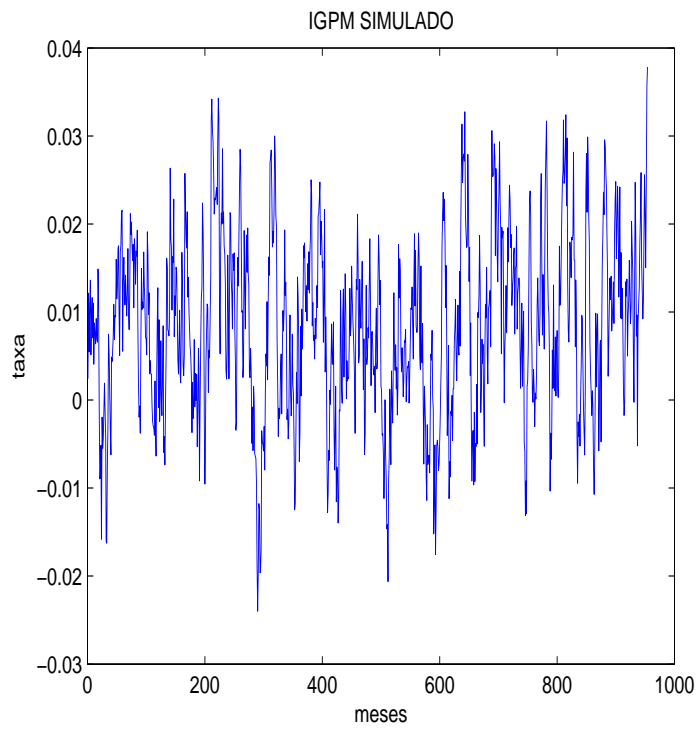


Figura 5.3: Um cenário para a série IGPM.

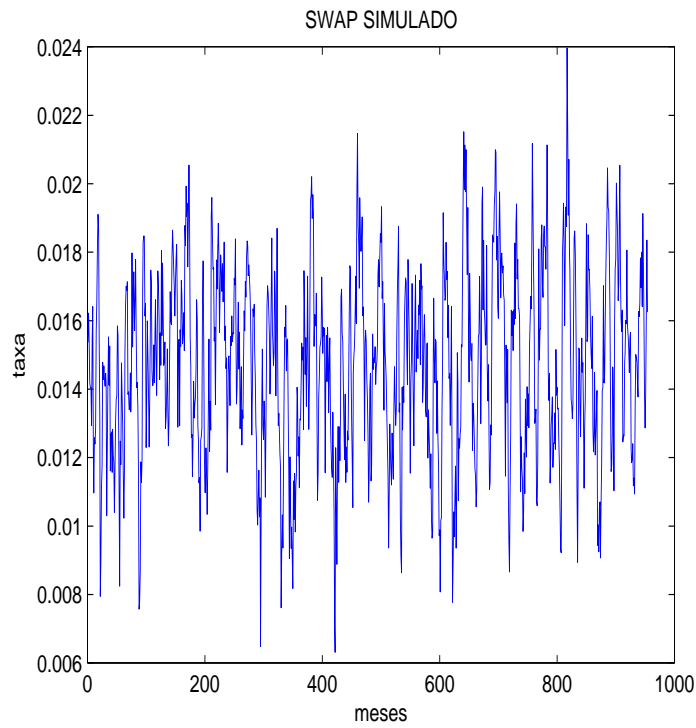


Figura 5.4: Um cenário para a série SWAP.

2006. As figuras 5.1, 5.2, 5.3, e 5.4 mostram respectivamente as trajetórias das séries de CDI, IBOVESPA, IGPM e de SWAP.

Para ilustrar o funcionamento do simulador foram elaborados gráficos que mostram para cada idade x os valores médios simulados de montante final (figura 5.5), benefício inicial recebido (figura 5.6), saldo final em conta na seguradora no momento de morte do indivíduo (figura 5.7), e o pagamento total médio feito pela seguradora no período de benefícios (figura 5.8). Os valores foram trazidos a valor presente.

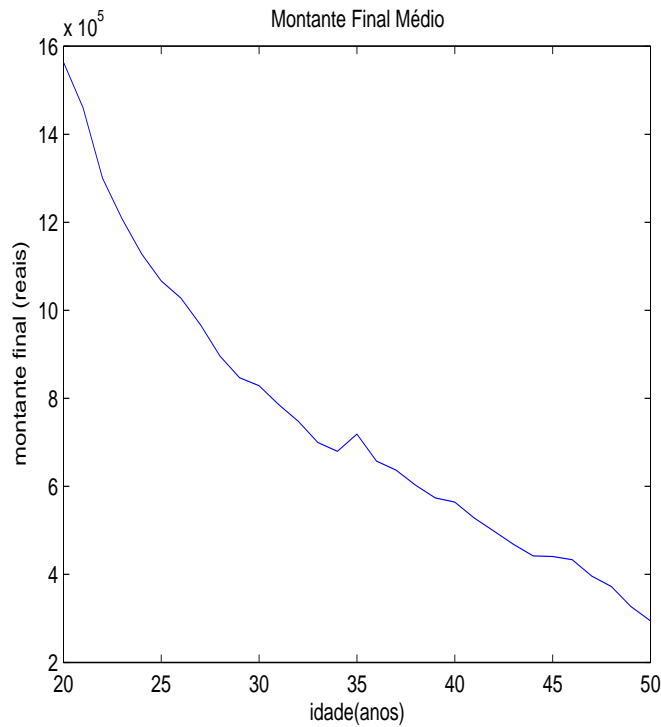


Figura 5.5: Média do montante final para cada idade i .

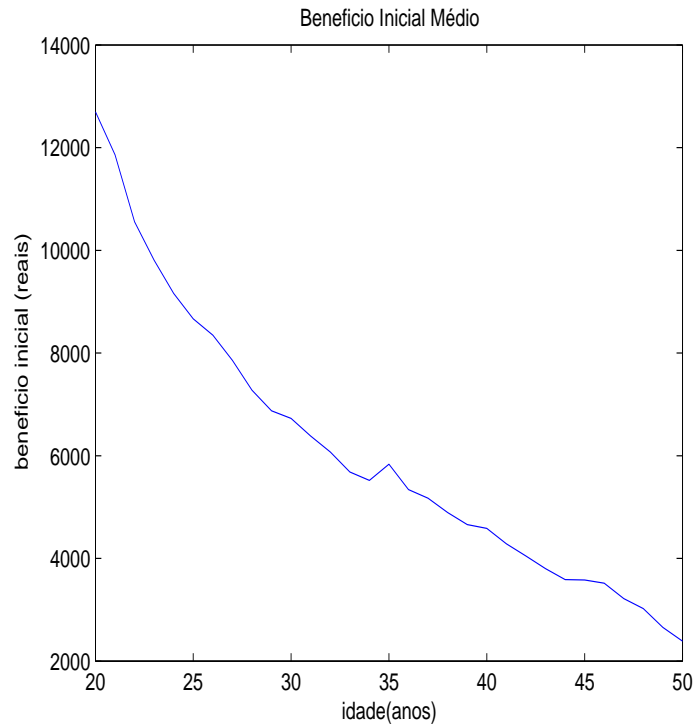


Figura 5.6: Benefício inicial médio para cada idade.

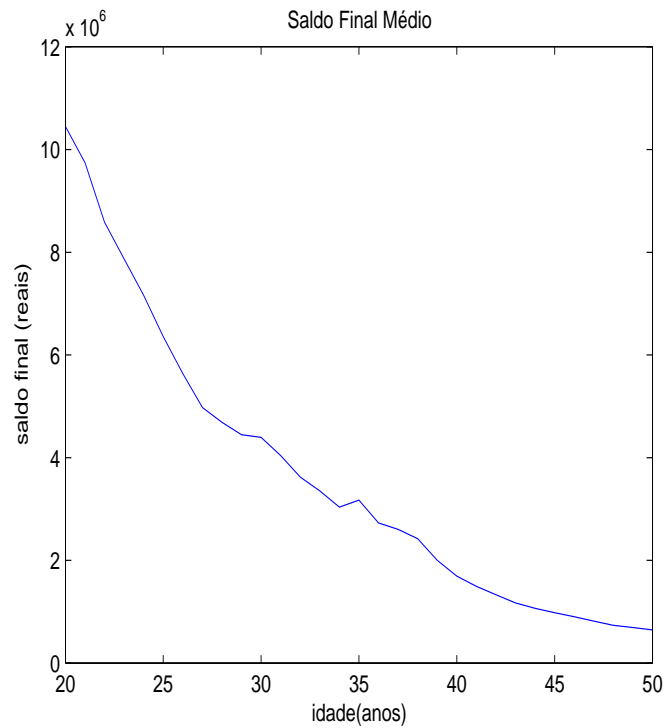


Figura 5.7: Saldo final médio para cada idade.

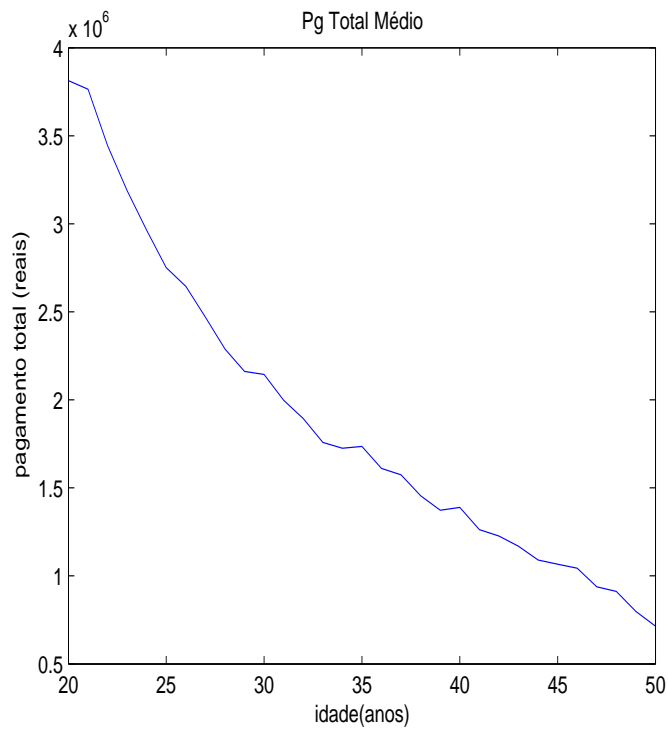


Figura 5.8: Pagamento total médio para cada idade.