4
O modelo econométrico

O objetivo desse capítulo é o de apresentar um modelo econométrico para as variáveis financeiras que servem de entrada para o modelo estocástico de fluxo de caixa que será apresentado no capítulo 5. Conhecer os valores futuros desses parâmetros é fundamental e é a base dos modelos de gestão de ativos e passivos.

Nesse modelo econométrico são utilizadas variáveis econômicas que se mostraram adequadas para definir a composição da carteira de ativos que formam um fundo de previdência.

Primeiramente, é feita uma pequena introdução à séries temporais. Em particular, é introduzido o modelo multivariado auto-regressivo. Além disso, é descrito como se gera os cenários das trajetórias futuras do modelo VAR. Depois, as variáveis a serem estudadas são apresentadas e analisadas sob o ponto de vista estatístico. Em seguida, apresenta-se a estimativa do modelo VAR para essas variáveis.

4.1
Análise de séries temporais

A *análise de séries temporais* é uma área da Estatística dedicada ao estudo de observações que apresentam dependência no tempo. É muito comum encontrar estudos sobre esse assunto que envolvem a utilização de dados acerca da realidade econômica e financeira.

O enfoque de Box-Jenkins [1] para análise de séries temporais tem como objetivo principal a realização da previsão. Essa metodologia permite que valores futuros de uma série sejam previstos tomando por base apenas seus valores presentes e passados. Usualmente, isso é feito explorando a correlação temporal que existe entre o valores observados da série.

A relação temporal considerada pelo enfoque de Box-Jenkins é representada formalmente por um conjunto de processos estocásticos genericamente denominados modelos ARIMA. Por envolverem apenas uma série de tempo, eles são classificados como modelos univariados.

Os modelos ARIMA resultam da combinação de três componentes: Auto-Regressivo (AR), de Integração (I) e de médias móveis (MA, por ser a abreviação de *Moving Average*).

Na metodologia de Box-Jenkins, uma série de tempo pode conter as três componentes ou apenas um subconjunto, resultando daí várias métodos para análise.

4.1.1 Introdução ao modelo VAR

É de interesse desse trabalho estudar as trajetórias futuras de várias variáveis ao mesmo tempo. A metodologia de Box-Jenkins é extensível também para esse caso.

O modelo de série temporal multivariado para as variáveis financeiras a ser utilizado nesse capítulo é um *modelo de vetores auto-regressivos* (VAR-*Vector Auto-Regressive models*), ele é baseado somente na componente auto-regressiva.

Num modelo VAR, o vetor $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^n$ no instante t é descrito apenas por seus valores passados e pelo vetor de ruído branco $\epsilon_t \in \mathbb{R}^n$. O modelo VAR mais geral é o de ordem p, nele o vetor $\mathbf{y}_t$ depende de $\mathbf{y}_{t-1}$, $\mathbf{y}_{t-2}$, $\ldots$, $\mathbf{y}_{t-p}$ e do vetor de resíduos ϵ_t, que estão correlacionados entre eles no instante t mas não em momentos anteriores a t. A sua representação algébrica é a seguinte:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_k \mathbf{y}_{t-k} + \epsilon_t,$$

onde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de intercepto, $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, são as matrizes dos coeficientes do modelo e $\epsilon_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é o vetor de resíduos, tal que: $E[\epsilon_t] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $E[\epsilon_t \epsilon_t^T] = \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários são os melhores estimadores dado que os resíduos das diferentes equações não são correlacionados e que são independentes e igualmentes distribuídos ao longo do tempo. Na presença de correlação entre os resíduos das equações, conhecida como correlação contemporânea, o melhor estimador é o método de regressão aparentemente não-relacionada (SUR - Seemly Unrelated Regression). Para maiores detalhes dos métodos de estimação veja o livro de Judge et al. de 1985 [4].

4.1.2 Geração das trajetórias futuras

Para gerar cenários para as trajetórias futuras de um modelo VAR(p) deve-se primeiro estimar o vetor de intercepto $\mathbf{c}$, os elementos das matrizes

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_p$, e a matriz de variância e covariância dos resíduos $\boldsymbol{\Sigma} = E[\epsilon_t \epsilon_t^T]$. Considerando que as condições iniciais do modelo são dadas, isto é, que se conhece os vetores $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{p-1}$, então a geração das previsões futuras até o tempo T do vetor $\mathbf{y}_t$ segue os seguintes passos:

Passo 1: Faça $t = p$.

Passo 2: Decomponha a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ na forma de Cholesky.

Passo 3: Gere o vetor de resíduos ϵ_t utilizando o método fatoração triangular utilizando a decomposição Cholesky da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ estimada.

Passo 4: Calcule $\mathbf{y}_t$ utilizando

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_k \mathbf{y}_{t-k} + \epsilon_t.$$

Passo 5: Faça $t = t + 1$; Se $t \leq T$ então volte ao passo 3 senão termine.

4.2
As variáveis financeiras

No modelo de simulação, os ativos devem ser investidos todos os meses tanto no período de diferimento quanto no período de benefícios. Para isso, foi considerado uma carteira onde o capital é aplicado em renda fixa, renda variável e em títulos públicos. Foram utilizadas as seguintes variáveis financeiras como *proxies* para a rentabilidade desses investimentos:

– CDI - Certificado de Depósito Interfinanceiro: acumulada no mês anualizada com periodicidade mensal para representar renda fixa;

– IBOVESPA - Índice de Lucratividade da Bolsa de Valores de São Paulo: com variação e periodicidades mensais para representar renda variável;

– IGP-M - Índice Geral de Preços / Mercado: com variação e periodicidades mensais para representar inflação;

– SWAP 180 - Derivativo financeiro que tem por finalidade promover a troca (simultaneamente) de ativos financeiros entre os agentes econômicos envolvidos, por exemplo: Uma empresa possui um ativo financeiro indexado a variação do dólar comercial e deseja trocar a variação deste ativo financeiro (dólar comercial) por uma determinada taxa préfixada sem se desfazer do ativo financeiro, neste caso ela poderá através de um swap de taxas realizar tal operação: taxa anual, periodicidade mensal, representa a rentabilidade de títulos com maturidade de seis meses.

O período de análise está compreendido desde Janeiro de 2000 até Dezembro de 2005. Portanto foram utilizados 72 dados mensais de cada série. As taxas CDI e Swap 180 foram convertidas em dados mensais tanto para os testes como para a simulação.

Estatísticas das variáveis financeiras escolhidas. Na tabela 4.2, estão apresentadas as principais estatísticas das quatro variáveis financeiras escolhidas.

Ibovespa e IGP-M registram os maiores desvios padrões. Estes dois rendimentos também possuem os maiores valores máximos e os menores mínimos, sendo os únicos que registram valores negativos em todo período estudado. Swap e CDI se caracterizam por ter, aproximadamente, os mesmos valores das estatísticas, sendo Swap superior em todas, exceto no valor máximo, que é igual ao CDI. Em geral, a rentabilidade e o risco de títulos longos é superior a rentabilidade e o risco de títulos curtos; este fato estilizado é confirmado na tabela abaixo.

Estatística	CDI(%)	Ibovespa(%)	IGP-M(%)	Swap(%)
Média	1.435755	1.285417	0.885972	1.509065
Mediana	1.394218	1.625000	0.715000	1.467933
Valor máximo	2.075377	17.92000	5.190000	2.075377
Valor mínimo	1.009570	-17.17000	-1.000000	1.033354
Desvio padrão	0.215506	8.387782	1.022399	0.250056

Tabela 4.1: Estatísticas das séries de dados mensais de janeiro/2000 à dezembro/2005.

4.3
A estimativa do modelo VAR das variáveis financeiras

Para se estimar o modelo, o primeiro passo será definir quantas defasagens para trás serão consideradas, ou seja, escolher o valor de p para o modelo VAR(p). Os critérios de informação de Akaike e o de Schwarz [4] têm como objetivo escolher, segundo uma estatística, qual é a defasagem p mais adequada. No caso em estudo, para os dados durante esse período de observação, ambos indicaram que o modelo VAR(1) é o melhor.

Considere o modelo VAR(1) abaixo indexado pelo mês t:

$$\begin{bmatrix} CDI \\ IBO \\ IGPM \\ SWAP \end{bmatrix}_t = \mathbf{c} + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} CDI \\ IBO \\ IGPM \\ SWAP \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \epsilon_{CDI} \\ \epsilon_{IBO} \\ \epsilon_{IGPM} \\ \epsilon_{SWAP} \end{bmatrix}_t$$

Foi utilizado o software Eviews® para o cálculo das estimativas, e o modelo final é:

$$\begin{bmatrix} CDI \\ IBO \\ IGPM \\ SWAP \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0.003067 \\ -0.070048 \\ 0.005284 \\ 0.004704 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0.681981 & -0.001377 & 0.009502 & 0.093059 \\ 14.35822 & -0.033621 & 0.342870 & -8.486075 \\ -1.340442 & -0.002985 & 0.718172 & 1.078787 \\ -0.216747 & -0.004738 & 0.016571 & 0.883706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CDI \\ IBO \\ IGPM \\ SWAP \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \epsilon_{CDI} \\ \epsilon_{IBO} \\ \epsilon_{IGPM} \\ \epsilon_{SWAP} \end{bmatrix}_t \tag{4-1}$$

A matriz de variância e covariância dos resíduos do modelo estimado é:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.99 \times 10^{-06} & 1.61 \times 10^{-05} & 2.01 \times 10^{-07} & 1.89 \times 10^{-06} \\ 1.61 \times 10^{-05} & 0.007178 & 6.07 \times 10^{-05} & -1.55 \times 10^{-06} \\ 2.01 \times 10^{-07} & 6.07 \times 10^{-05} & 3.27 \times 10^{-05} & 1.69 \times 10^{-06} \\ 1.89 \times 10^{-06} & -1.55 \times 10^{-06} & 1.69 \times 10^{-06} & 2.25 \times 10^{-06} \end{bmatrix}$$

No apêndice encontram-se as quatro séries utilizadas no período de janeiro de 2000 até dezembro de 2005.

Na tabela 4.3 são apresentados os resultados da estimação do VAR(1). Os valores entre parênteses são os erros padrões das estimações dos coeficientes e os valores entre colchetes são as estatísticas "t".

A influência na primeira defasagem do CDI no valor corrente dessa série já era esperado. Pois é conhecida a inércia de seqüências envolvendo taxa de juros. A mesma propriedade também pode ser observada na série de SWAP, que depende negativamente do IBOVESPA. Isso pode ser explicado observando que em períodos de mercado calmo, o IBOVESPA tende a subir e as taxas longas tendem a cair ou no máximo permanecem constantes (ou seja, há uma suave relação negativa entre essas duas séries). Como também há inércia na inflação, era de se esperar a influência da primeira defasagem do IGPM na sua observação corrente; adicionalmente, a relação negativa entre a primeira defasagem do CDI e o IGPM reflete a influência do juro sobre a atividade econômica, e desta sobre a inflação (uma alta no juro gera uma queda na atividade econômica, que tende a inibir a alta nos preços).

Variáveis Independentes	Variáveis Dependentes			
	CDI	Ibovespa	IGP-M	Swap
CDI(-1)	0.681981	14.35822	-1.340442	-0.216747
	(0.15762)	(9.46424)	(0.63842)	(0.16741)
	[4.32666]	[1.51710]	[-2.09963]	[-1.29472]
Ibovespa(-1)	-0.001377	-0.033621	-0.002985	-0.004738
	(0.00215)	(0.12920)	(0.00872)	(0.00229)
	[-0.64008]	[-0.26022]	[-0.34253]	[-2.07317]
IGP-M(-1)	0.009502	0.342870	0.718172	0.016571
	(0.02291)	(1.37587)	(0.09281)	(0.02434)
	[0.41468]	[0.24920]	[7.73805]	[0.68091]
Swap(-1)	0.093059	-8.486075	1.078787	0.883706
	(0.15123)	(9.08025)	(0.61251)	(0.16062)
	[0.61536]	[-0.93456]	[1.76124]	[5.50198]

Tabela 4.2: Estimação do Vetor Autoregressivo(VAR).