3
Matemática financeira e atuarial

A teoria dos juros compostos em conjunto com a teoria da probabilidade associada à questão da sobrevivência e morte de um indivíduo são os fundamentos do presente trabalho. Este capítulo tem por objetivo, introduzir os conceitos básicos de matemática financeira e atuarial que tratam dessas duas teorias. Na verdade, muitos conceitos a serem apresentados aqui não serão diretamente utilizados nessa dissertação, mas eles ajudam no entendimento da proposta do modelo que será introduzido no capítulo 5.

3.1
Conceitos básicos da matemática financeira

Juro é a remuneração do capital empregado. Quando aplicamos um capital durante um período de tempo determinado, esperamos obter um certo *rendimento*. Após esse período, o *capital principal* investido se transformará em um valor capitalizado, chamado de *montante*, que será o capital principal acrescido do rendimento obtido durante o período de aplicação. A *taxa de juros* é a razão entre o rendimento e o capital principal.

Uma taxa de juros é sempre associada a uma *unidade básica de tempo*, por exemplo, 6% ao ano. Deve também ser conhecido o *período de aplicação*, que pode ser por exemplo diário, mensal, anual, bi-anual, etc. Uma taxa de juros é chamada *efetiva* se o período de aplicação é idêntico à unidade básica de tempo, nesse caso o rendimento é creditado no fim da unidade básica de tempo.

No *regime de capitalização simples*, os rendimentos de cada período são calculados sobre o capital principal. Portanto eles não incidem sobre os rendimentos acumulados. Esse regime só faz algum sentido em um contexto não-inflacionário, que não é o caso de interesse desse trabalho.

No *regime de capitalização composto*, o rendimento gerado pela aplicação será incorporado, passando a participar do cálculo de rendimento dos períodos de aplicação que vem a seguir.

3.1.1 Taxa de juros efetiva

Seja j uma taxa de juros efetiva anual. Para simplificar assuma que essa taxa é constante para todos os anos. Considere um fundo onde o capital principal C_0 é investido e que um capital adicional A_k é aplicado no mesmo fundo no fim de cada ano k, para $k = 1, \cdots, n$. O balanço do fundo no fim do ano k, denotado por C_k, incluindo o pagamento adicional A_k é dado por:

$$C_k = C_{k-1} + jC_{k-1} + A_k,\ k = 1, \cdots, n. \tag{3-1}$$

Que pode ser reescrito na forma:

$$C_k - (1+j)C_{k-1} = A_k. \tag{3-2}$$

Ao multiplicar essa equação por $(1+j)^{n-k}$ em ambos os lados e somar sobre todos os valores de k, obtém-se que:

$$C_n = (1+j)^n C_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+j)^{n-k} A_k. \tag{3-3}$$

As potências de $(1+j)$ são chamadas de *fatores de acumulação*. Portanto, o montante acumulado ou o *valor futuro* de um investimento com capital principal C após h anos é $(1+j)^h C$.

Desconto pode ser entendido como a diferença entre o valor do resgate do investimento e seu valor inicial. O *fator de desconto* é definido como

$$v = \frac{1}{1+j}.$$

A equação 3-3 pode ser reescrita na forma:

$$v^n C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k A_k. \tag{3-4}$$

Assim, o *valor presente* de um capital C devido a um investimento de k anos é $v^k C$.

Segue uma outra forma de escrever a equação 3-1:

$$C_k - C_{k-1} = jC_{k-1} + A_k.$$

Se somarmos a equação acima sobre todos os k's, tem-se que:

$$C_n - C_0 = \sum_{k=1}^{n} jC_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Em conclusão, o rendimento total do fundo é a soma total dos juros creditados com o total dos depósitos feitos durante o período.

3.1.2 Taxa de juros nominal

Quando o período de aplicação não é idêntico à unidade básica de tempo, a taxa de juros é chamada de *nominal*. Por exemplo, considere uma taxa anual de 6% e um período de aplicação de 3 meses. Nesse caso, o rendimento creditado no fim de cada trimestre correspondente a uma taxa de juros de 6%/4 = 1,5%. Dessa forma, um capital inicial de 1 unidade monetária renderia no fim de 4 trimestres o correspondente à $(1.015)^4 = 1.06136$. Observe que, a taxa de juros anual nominal de 6% quando convertida trimestralmente é equivalente a uma taxa anual efetiva de 6.136%.

Considere uma taxa de juros anual j, define-se $j^{(m)}$ como a taxa de juros nominal convertida para um período de m vezes ao ano equivalente a j. Para determinar $j^{(m)}$ utiliza-se a seguinte equação:

$$(1 + \frac{j^{(m)}}{m})^m = 1 + j.$$

Explicitando $j^{(m)}$, tem-se que:

$$j^{(m)} = m[(1 + j)^{1/m} - 1]. \tag{3-5}$$

Pode-se interpretar $j^{(m)}$ quando $m \to \infty$ como uma taxa de juros continuamente composta. Seja

$$\delta = \lim_{m \to \infty} j^{(m)},$$

que é denominada força dos juros equivalente a j. A equação 3-5 pode ser reescrita na forma:

$$j^{(m)} = \frac{(1 + j)^{1/m} - (1 + j)^0}{1/m}.$$

Conseqüentemente, pode-se dizer que δ é a derivada de $(1+j)^x$ no ponto $x = 0$. Assim,

$$\delta = \ln(1 + j)$$

ou

$$e^{\delta} = 1 + j.$$

Portanto, o fator de acumulação para um período de h anos, $h \in \mathbb{R}$, é $(1 + j)^h = e^{\delta h}$ e o fator de desconto para o mesmo período é $v^h = e^{-\delta h}$.

3.1.3 Pagamentos antecipados

Até agora foi assumido que os rendimentos são creditados no fim do período de aplicação. Mas algumas vezes é útil assumir que os rendimentos são creditados no início de cada período de aplicação. Rendimentos creditados dessa forma são também conhecidos como *descontos*, e a taxa de juros correspondente é chamada de *taxa de desconto* ou *taxa de juros antecipada*.

Seja d uma taxa anual de desconto efetiva. Uma pessoa que investir uma quantidade C de capital principal vai ter creditado imediatamente a quantia dC, e o capital investido C vai ser retornado no fim do período. Investindo o rendimento dC nas mesmas condições, o investidor vai receber um rendimento adicional de $d(dC) = d^2C$. Novamente, ao aplicar a quantia d^2C, o investidor receberá d^3C como retorno de seu investimento. Repetindo esse processo infinitamente, o investidor vai receber no fim de um ano a seguinte quantia

$$C + dC + d^2C + d^3C + \ldots = \frac{1}{1-d}C$$

como retorno de seu investimento inicial C.

A taxa de juros equivalente j para esse tipo de investimento é obtida pela equação

$$\frac{1}{1-d} = 1 + j,$$

que é equivalente dizer que:

$$d = \frac{j}{1+j}$$

ou

$$j = \frac{d}{1-d}.$$

Seja $d^{(m)}$ a taxa de desconto nominal equivalente a d só que creditada m vezes ao ano. O investidor, então, recebe no início de cada período de conversão $\frac{d^{(m)}}{m}C$ e o seu capital principal C é retornado no fim do período.

Usando a igualdade

$$\frac{1}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} = 1 + \frac{j^{(m)}}{m} = (1+j)^{1/m},$$

pode-se dizer que:

$$d^{(m)} = m[1 - (1+j)^{-1/m}].$$

Por um pequeno algebrismo, pode-se dizer também que:

$$d^{(m)} = \frac{j^{(m)}}{1+\frac{j^{(m)}}{m}}.$$

Daí, pode-se tirar uma relação muito simples entre $j^{(m)}$ e $d^{(m)}$:

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{j^{(m)}}.$$

Com essa relação, conclui-se que a diferença entre a taxa de desconto e a taxa de juros some quando elas são consideradas contínuas, pois:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} j^{(m)} = \delta.$$

3.1.4 Perpetuidades

Essa seção introduz certos tipos de seqüências de pagamentos perpétuos (*perpetuidades*) e calcula seus valores presentes.

Inicialmente, considere as perpetuidades de pagamentos anuais de uma unidade monetária. Se o primeiro pagamento ocorre no tempo 0, a perpetuidade é chamada de *perpetuidade antecipada* e seu valor presente é dado por

$$\ddot{a}_{\infty\rceil} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}.$$

Se o primeiro pagamento ocorre no fim do primeiro ano, a perpetuidade é chamada de *perpetuidade postecipada* e seu valor presente é dado por

$$a_{\infty\rceil} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{j}.$$

Considere agora que pagamentos de $\frac{1}{m}$ unidades monetárias são feitas m vezes ao ano. Se os pagamentos são feitos antecipadamente (primeiro pagamento no tempo 0), então o valor presente desse tipo de perpetuidades é:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\infty\rceil} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \cdots = \frac{1}{m}\frac{1}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{d^{(m)}}.$$

Por sua vez, se o primeiro pagamento é feito no fim do período $1/m$, então o valor presente da perpetuidade é:

$$a^{(m)}_{\infty\rceil} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \frac{1}{m}v^{3/m} + \cdots = \frac{1}{m}\frac{v^{1/m}}{1-v^{1/m}} = \frac{1}{j^{(m)}}.$$

3.1.5 Anuidades

Uma *anuidade* é definida como uma seqüência de pagamentos durante um tempo limitado, que é denotado por n. Na prática, as anuidades são mais usadas que as perpetuidades.

O valor presente de uma anuidade com n pagamentos anuais de uma unidade monetária começando no instante 0 é:

$$\ddot{a}_{n\rceil} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}.$$

Pode-se representar a anuidade como a diferença entre duas perpetuidades, uma iniciada no instante 0 e outra no instante n. Assim, tem-se que:

$$\ddot{a}_{n\rceil} = \ddot{a}_{\infty\rceil} - v^n \ddot{a}_{\infty\rceil} = \frac{1}{d} - v^n \frac{1}{d} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

De forma similar, pode-se obter a fórmula para o valor presente da anuidade com o primeiro pagamento feito no final do primeiro ano da seguinte maneira:

$$a_{n\rceil} = \frac{1 - v^n}{j}.$$

A fórmula para o valor presente de uma anuidade com m pagamentos parciais de $1/m$ unidade monetária iniciada no tempo 0 é:

$$\ddot{a}^{(m)}_{n\rceil} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}.$$

E, por fim, a fórmula para o valor presente de uma anuidade com m pagamentos parciais de $1/m$ unidade monetária iniciada no tempo 1 é:

$$a^{(m)}_{n\rceil} = \frac{1 - v^n}{j^{(m)}}.$$

Observe que o denominador varia dependendo da forma de pagamento e da freqüência que eles são feitos.

O valor acumulado s das anuidades é também de interesse. As fórmulas para cada um dos tipos acima são respectivamente:

$$\ddot{s}_{n\rceil} = \frac{(1 + j)^n - 1}{d},$$

$$s_{n\rceil} = \frac{(1 + j)^n - 1}{j},$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{n\rceil} = \frac{(1 + j)^n - 1}{d^{(m)}},$$

e

$$s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+j)^n - 1}{j^{(m)}}.$$

No caso de previdência e de seguros do ramo vida, sob o ponto de vista atuarial, as contas das anuidades devem levar em consideração a probabilidade do indivíduo estar vivo para fazer o pagamento. A seguir serão introduzidos conceitos básicos atuariais para tal fim.

3.2
Conceitos básicos da matemática atuarial

Um dos elementos básicos dos seguros que lidam com a vida humana é a tábua de mortalidade. Essa seção apresenta inicialmente um modelo probabilístico para a sobrevivência de um indivíduo. Depois, introduz-se as tábuas de mortalidade, e por fim, descreve as anuidades considerando as probabilidades de um indivíduo estar vivo para fazer o pagamento.

3.2.1
Modelo probabilístico para sobrevivência de um indivíduo

Considere um indivíduo com x anos e T seu tempo futuro de vida, denotado por $T(x)$. Portanto, a idade em que o indivíduo morre é $x + T(x)$.

O tempo futuro de vida T de um indivíduo é uma variável aleatória com uma função de distribuição

$$G(t) = Pr(T \leq t),\ t \geq 0.$$

A função $G(t)$ representa a probabilidade que o indivíduo morrerá dentro de t anos, para qualquer valor de t. Assume-se que a função de distribuição de probabilidade de T, denotada por G, é conhecida e é contínua. Mais ainda, é considerado que G possui uma função de densidade g ($g(t) = G'(t)$).

Dentro desse contexto, a probabilidade que um indivíduo na idade x morra dentro de t anos, denotada por ${}_tq_x$, pode ser escrita da seguinte maneira:

$${}_tq_x = G(t).$$

Similarmente, a probabilidade de um indivíduo sobreviver por mais t anos, denotada por ${}_tp_x$ é:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x.$$

A probabilidade que um indivíduo com x anos sobreviva por mais s anos e depois morra dentro de t anos é:

$$_{s|t}q_x = Pr(s < T < s+t) = G(s+t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x.$$

A probabilidade condicional de que um indivíduo com x anos sobreviva mais t anos depois de ter chegado a idade $x+s$ é:

$$_tp_{x+s} = Pr(T > s+t|T > s) = \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)}.$$

Da mesma forma, pode-se dizer que a probabilidade de um indivíduo morrer dentro de t anos dado que ele atingiu a idade $x+s$ é:

$$_tq_{x+s} = Pr(T \leq s+t|T > s) = \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)}.$$

Seguem duas igualdades interessantes, pois levam a interpretações:

$$_{s+t}p_x = 1 - G(s+t) = [1 - G(s)]\frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)} = {}_sp_{x\,t}p_{x+s}$$

e

$$_{s|t}q_x = G(s+t) - G(s) = [1 - G(s)]\frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_sp_{x\,t}q_{x+s}.$$

O valor esperado do tempo restante de um indivíduo com idade x é $E[T]$, e será denotado por $\mathring{e}_x$, Sua definição é:

$$\mathring{e}_x = E[T] = \int_0^\infty tg(t)dt.$$

De agora em diante, se $t = 1$ o índice t é omitido nas notações apresentadas.

A *força de mortalidade* de um indivíduo com idade $x+t$ é definida por:

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}ln[1 - G(t)].$$

Como a função densidade $g(t)$ representa a probabilidade de um indivíduo hoje com idade x morrer entre $x+t$ e $x+t+dt$, onde dt representa um intervalo infinitesimal de tempo, g pode ser expressa na forma:

$$g(t)dt = Pr(t < T < t+dt).$$

Observe que a expressão acima pode ser reescrita utilizando a definição de força de mortalidade:

$$g(t)dt = {}_tp_x\mu_{x+t}dt.$$

Como conseqüência, a expectativa futura de vida de um indivíduo com x anos pode também ser expressa em função da força de mortalidade:

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} t_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Por outro lado, a força de mortalidade pode ser definida também da seguinte forma:

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} ln({}_t p_x).$$

Integrando a equação anterior, tem-se que:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^{\infty} \mu_{x+s} ds}.$$

Define-se agora a variável aleatória K que representa o número de anos completos futuros vividos por um indivíduo com uma idade x. Assim, pode-se dizer que

$$Pr(K = k) = Pr(k \leq T < k+1) = {}_k p_x \ q_{x+k}, \ \ k = 0, 1, \ldots .$$

O valor esperado de K é chamado de valor esperado de truncamento do tempo de vida futura de um indivíduo com idade x, e é denotado por e_x. Portanto,

$$e_x = E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k Pr(K = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k_k p_x \ q_{x+k}.$$

Ou então,

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} Pr(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

Seja S uma fração do ano durante o qual o indivíduo com idade inicial x morre, isto é,

$$T = K + S.$$

A variável aleatória S tem distribuição contínua entre 0 e 1. Como usualmente é feito, nesse trabalho considera-se que a variável S é distribuída uniformemente entre 0 e 1. Será considerado também nesse trabalho, como também é de costume na literatura, que as variáveis K e S são independentes.

Assim, pode-se mostrar que:

$$\overset{\circ}{e}_x = e_x + \frac{1}{2},$$

e que

$$\text{Var}[T] = \text{Var}[K] + \frac{1}{12}.$$

Para inteiros positivos m, pode-se definir a variável aleatória

$$S^{(m)} = \frac{1}{m}[mS + 1].$$

É obtida como um arredondamento para o menor múltiplo de $1/m$ maior que S. A densidade de massa de $S^{(m)}$ existe nos pontos $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, 1$. Observe que a independência entre K e S implica na independência entre K e $S^{(m)}$. Mais ainda, como foi assumido que S é uniforme entre 0 e 1, então pode-se provar que $S^{(m)}$ tem uma distribuição discreta uniforme.

3.2.2
Tábuas de mortalidade

Partindo-se de um número fechado de participantes, denominado "raiz", em que o gênero pode ser levado em consideração, a *tábua de mortalidade* revela a quantidade de pessoas vivas anualmente em cada idade, ou seja, trata-se de uma tábua determinada pelas taxas anuais de mortalidade ou de sobrevivência.

Existem vários tipos de tábuas atuariais, como a AT-49, AT-83 e a AT-2000, onde AT quer dizer *annuity table* e o número refere-se ao ano em que as estatísticas passadas começaram a valer. Tábuas mais modernas, como a AT-2000, é adotada em várias empresas no Brasil, principalmente para planos mais flexíveis como o PGBL. Ela possui o tempo de vida médio mais elevado que as outras, reduzindo assim, o valor do benefício a ser pago pelas empresas.

Por exemplo, na AT-49 a expectativa de sobrevida para alguém com 60 anos é de 18,5 anos, na AT-83 é de 22,6 e na AT-2000 é de 24,6. As tábuas mais modernas não devem ser vistas como injustas ou benéficas apenas às seguradoras. Refletem as mudanças que a sociedade vem sofrendo, como o aumento da expectativa de vida, melhores condições sanitárias e avanços na medicina. Nos Estados Unidos, por exemplo, a quantidade de pessoas centenárias passou de 4000 em 1940, para mais de 61000, em 1997. Em resumo, se uma empresa trabalhar com tábuas desatualizadas, ela corre o risco de não ter como pagar no futuro a renda mensal vitalícia aos beneficiários.

A construção dessas tábuas pode ser oriunda da experiência das seguradoras ou se valer dos dados dos censos demográficos.

As tábuas, sob condição universal, são compostas de seis colunas:

x : coluna de idades, em anos;

l_x : número de pessoas vivas na idade x do grupo em estudo, de um total inicial hipotético de 100.000 novos nascimentos;

d_x : número de pessoas do grupo que morrem entre as idades x e $x+1$;

q_x : probabilidade anual de morte, ou seja, a razão entre o número de pessoas do grupo que morrem numa idade w (d_w) pelo número de pessoas da idade de w (l_w). Matematicamente, tem-se: $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ou $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$;

p_x : probabilidade anual de sobrevivência, obtida pela relação: $p_x = 1 - q_x$;

e_x : expectativa de vida para um indivíduo com idade x.

Observe que a distribuição de K e outras variáveis podem ser calculadas pela tábua. Por exemplo,

$$_kp_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} \dots p_{x+k-1}, \ \ k = 1, 2, 3, \dots.$$

Para se obter a distribuição de T através da tábua deve-se usar uma interpolação.

Um tipo de interpolação assume que $_uq_x$ é uma função linear em u, para u entre 0 e 1 e x sendo um número inteiro. Nesse caso, pode-se escrever que:

$$_uq_x = uq_x.$$

Além dessa hipótese, se for considerado que K e S são independentes e que S é distribuída uniformemente entre 0 e 1, então:

$$_up_x = 1 - uq_x,$$

e

$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - uq_x}.$$

No final do capítulo, apresenta-se nas tabelas a Tábua de Mortalidade AT-2000.

3.2.3
Anuidades de vida inteira

Uma *anuidade de vida inteira* consiste numa série de pagamentos que são feitos por um indivíduo com idade inicial x enquanto ele estiver vivo. Portanto, ela possui uma dependência do tempo de sobrevida do indivíduo. Assim, o valor presente da anuidade deve ser considerado como uma variável aleatória. Essa variável será denotada por Y. Considere novamente, que os pagamentos são de uma unidade monetária, e que são feitos nos tempos $0, 1, \ldots, K$. O valor presente desses pagamentos é, portanto:

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{k+1\rceil}.$$

A função de distribuição de probabilidade de Y é dada por:

$$Pr(Y = \ddot{a}_{(k+1)\rceil}) = Pr(K = k) = {}_k p_x q_{x+k}$$

O valor esperado de Y é denotado por $\ddot{a}_x$. Pode-se escrever que:

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{k+1\rceil} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Por outro lado, o valor Y pode também ser reescrito na forma:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{\{K \geq k\}},$$

onde $I_{\{K \geq k\}}$ é uma variável indicadora para o evento $K \geq k$. Conseqüentemente,

$$\ddot{a}_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x,$$

onde $v = \frac{1}{1+i}$ é o fator de desconto para uma taxa i.

O valor presente atuarial de uma anuidade de vida de uma unidade monetária por ano, pagável em prestações de $1/m$ no início de cada m-ésima de um ano enquanto um indivíduo com x anos sobrevive, é denotado por $\ddot{a}_x^{(m)}$.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} {}_{h/m} p_x.$$

A tradicional aproximação de $\ddot{a}_x^{(m)}$ pode ser escrita na forma:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Para $m = 12$, a anuidade de vida mensal é dada por :

$$\ddot{a}_x^{(12)} = \ddot{a}_x - \frac{11}{24}. \tag{3-6}$$

Todas os demais tipos de anuidades de vida inteira são deduzidos dessa mesma forma.

Para maiores detalhes sobre a teoria atuarial do ramo vida veja o livro do Gerber [3].

x	l_x	d_x	$p_x(\%)$	$q_x(\%)$	e_x
0	100.000	231	0.997689	0.002311	79.6
1	99.769	90	0.999094	0.000906	78.8
2	99.679	50	0.999496	0.000504	77.8
3	99.628	41	0.999592	0.000408	76.9
4	99.588	36	0.999643	0.000357	75.9
5	99.552	32	0.999676	0.000324	74.9
6	99.520	30	0.999699	0.000301	73.9
7	99.490	28	0.999714	0.000286	73.0
8	99.461	33	0.999672	0.000328	72.0
9	99.429	36	0.999638	0.000362	71.0
10	99.393	39	0.999610	0.000390	70.0
11	99.354	41	0.999587	0.000413	69.1
12	99.313	43	0.999569	0.000431	68.1
13	99.270	44	0.999554	0.000446	67.1
14	99.226	45	0.999542	0.000458	66.2
15	99.180	47	0.999530	0.000470	65.2
16	99.134	48	0.999519	0.000481	64.2
17	99.086	49	0.999505	0.000495	63.2
18	99.037	51	0.999490	0.000510	62.3
19	98.987	52	0.999472	0.000528	61.3
20	98.934	54	0.999451	0.000549	60.3
21	98.880	57	0.999427	0.000573	59.4
22	98.823	59	0.999401	0.000599	58.4
23	98.764	62	0.999373	0.000627	57.4
24	$98,702$	65	0.999343	0.000657	56.5
25	$98,637$	68	0.999314	0.000686	55.5
26	$98,570$	70	0.999286	0.000714	54.6
27	$98,499$	73	0.999262	0.000738	53.6
28	$98,427$	75	0.999242	0.000758	52.6
29	$98,352$	76	0.999226	0.000774	51.7
30	$98,276$	77	0.999216	0.000784	50.7
31	$98,199$	77	0.999211	0.000789	49.8
32	$98,121$	77	0.999211	0.000789	48.8
33	$98,044$	77	0.999210	0.000790	47.8
34	$97,967$	77	0.999209	0.000791	46.9
35	$97,889$	78	0.999208	0.000792	45.9
36	$97,812$	78	0.999206	0.000794	44.9
37	$97,734$	80	0.999177	0.000823	44.0
38	$97,653$	85	0.999128	0.000872	43.0

Tabela 3.1: Tábua de mortalidade AT-2000: idades entre 0 e 38 anos.

x	l_x	d_x	$p_x(\%)$	$q_x(\%)$	e_x
39	97,568	92	0.999055	0.000945	42.1
40	97,476	102	0.998957	0.001043	41.1
41	97,374	114	0.998832	0.001168	40.1
42	97,261	129	0.998678	0.001322	39.2
43	97,132	146	0.998495	0.001505	38.2
44	96,986	166	0.998285	0.001715	37.3
45	96,820	189	0.998052	0.001948	36.4
46	96,631	212	0.997802	0.002198	35.4
47	96,419	237	0.997537	0.002463	34.5
48	96,181	264	0.997260	0.002740	33.6
49	95,918	290	0.996972	0.003028	32.7
50	95,627	318	0.996670	0.003330	31.8
51	95,309	348	0.996353	0.003647	30.9
52	94,961	378	0.996020	0.003980	30.0
53	94,583	410	0.995669	0.004331	29.1
54	94,174	442	0.995302	0.004698	28.2
55	93,731	476	0.994923	0.005077	27.4
56	93,255	510	0.994535	0.005465	26.5
57	92,746	544	0.994139	0.005861	25.7
58	92,202	578	0.993735	0.006265	24.8
59	91,624	613	0.993306	0.006694	24.0
60	91,011	653	0.992830	0.007170	23.1
61	90,358	697	0.992286	0.007714	22.3
62	89,661	748	0.991652	0.008348	21.5
63	88,913	808	0.990907	0.009093	20.7
64	88,104	878	0.990032	0.009968	19.8
65	87,226	959	0.989007	0.010993	19.0
66	86,267	1,051	0.987812	0.012188	18.3
67	85,216	1,157	0.986428	0.013572	17.5
68	84,059	1,274	0.984840	0.015160	16.7
69	82,785	1,403	0.983054	0.016946	16.0
70	81,382	1,540	0.981080	0.018920	15.3
71	79,842	1,682	0.978929	0.021071	14.6
72	78,160	1,828	0.976612	0.023388	13.9
73	76,332	1,975	0.974129	0.025871	13.2
74	74,357	2,123	0.971448	0.028552	12.5
75	72,234	2,274	0.968523	0.031477	11.9
76	69,960	2,427	0.965314	0.034686	11.3
77	67,534	2,581	0.961775	0.038225	10.7
78	64,952	2,737	0.957868	0.042132	10.1

Tabela 3.2: Tábua de mortalidade AT-2000: idades entre 39 e 78 anos.

x	l_x	d_x	$p_x(\%)$	$q_x(\%)$	e_x
79	62,216	2,888	0.953573	0.046427	9.6
80	59,327	3,033	0.948872	0.051128	9.0
81	56,294	3,167	0.943750	0.056250	8.5
82	53,127	3,284	0.938191	0.061809	8.0
83	49,844	3,381	0.932174	0.067826	7.6
84	46,463	3,453	0.925678	0.074322	7.1
85	43,010	3,498	0.918674	0.081326	6.7
86	39,512	3,511	0.911137	0.088863	6.3
87	36,001	3,491	0.903042	0.096958	5.9
88	32,510	3,434	0.894369	0.105631	5.5
89	29,076	3,340	0.885142	0.114858	5.2
90	25,737	3,207	0.875388	0.124612	4.9
91	22,529	3,038	0.865139	0.134861	4.6
92	19,491	2,837	0.854425	0.145575	4.3
93	16,654	2,610	0.843273	0.156727	4.0
94	14,044	2,363	0.831710	0.168290	3.7
95	11,680	2,105	0.819755	0.180245	3.5
96	9,575	1,844	0.807435	0.192565	3.2
97	7,731	1,587	0.794771	0.205229	3.0
98	6,144	1,344	0.781317	0.218683	2.8
99	4,801	1,120	0.766629	0.233371	2.6
100	3,680	919	0.750259	0.249741	2.4
101	2,761	741	0.731763	0.268237	2.2
102	2,021	585	0.710695	0.289305	2.0
103	1,436	450	0.686609	0.313391	1.8
104	986	336	0.659060	0.340940	1.6
105	650	242	0.627602	0.372398	1.4
106	408	166	0.591790	0.408210	1.2
107	241	108	0.551177	0.448823	1.0
108	133	66	0.505319	0.494681	0.9
109	67	37	0.453769	0.546231	0.7
110	31	18	0.396083	0.603917	0.6
111	12	8	0.331814	0.668186	0.4
112	4	3	0.260517	0.739483	0.3
113	1	1	0.181746	0.818254	0.2
114	0	0	0.095055	0.904945	0.1
115	0	0	0.000000	1.000000	0.0

Tabela 3.3: Tábua de mortalidade AT-2000: idades entre 79 e 115 anos.