

7

Exemplos Numéricos

7.1

Trecho de ferrovia submetido a uma carga súbita

Considere um trecho de ferrovia constituída por 10 dormentes sujeito a uma carga súbita $P(t)$ constante e igual a $100kN$, aplicada na posição indicada na figura (7.1), correspondente ao nó localizado imediatamente acima do quinto dormente.

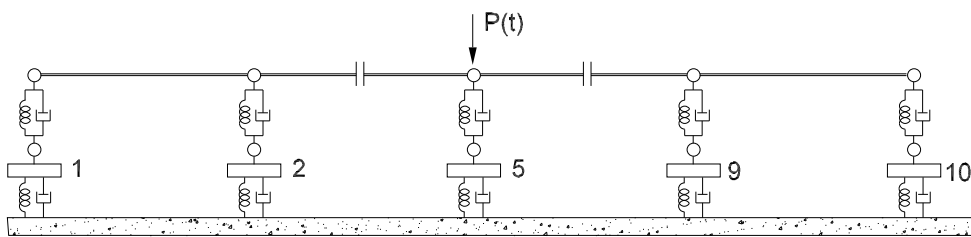


Figura 7.1: Posição do carregamento.

Para cada um dos modelos, as matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento são obtidas de acordo com a numeração indicada nas figuras (5.8), (5.7) e (5.5), e desenvolvidas utilizando a abordagem mostrada na seção (3.4).

A resposta transiente do sistema é obtida utilizando a formulação desenvolvida nas seções (3.5)-(3.6). As propriedades físicas do trilho, dormentes e palmilhas são dadas nas tabelas (5.1) a (5.3), respectivamente.

Primeiramente será apresentado os resultados obtidos em cada modelo para em seguida iniciar uma análise comparativa dos mesmos, avaliando a convergência quando se varia o número de termos da expansão em série das matrizes.

Para o modelo 2, figura (5.8), são plotados os deslocamentos normalizados em relação ao valor estático obtido no grau de liberdade #9 (Fator de amplificação) nos pontos nodais central e extremo do trecho sugerido.

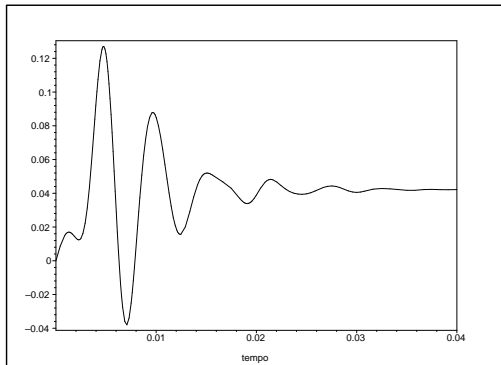


Figura 7.2: Resposta para uma carga súbita no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = 1, 20 \cdot 10^{-5}m$, modelo 2.

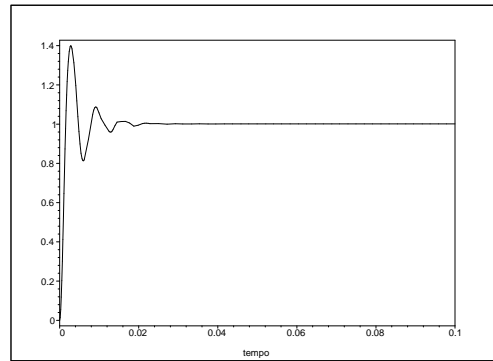


Figura 7.3: Resposta para uma carga súbita no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = -2, 86 \cdot 10^{-4}m$, modelo 2.

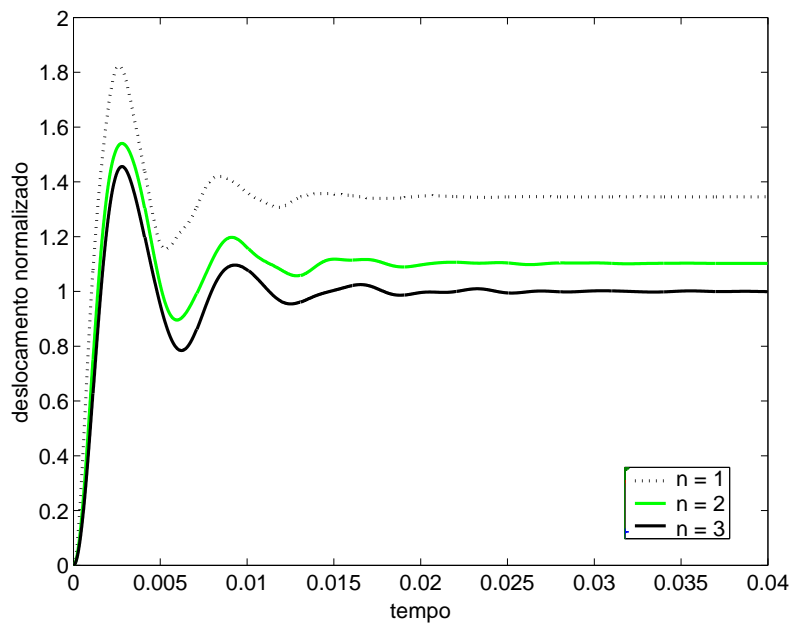


Figura 7.4: Comparação das respostas obtidas no grau de liberdade #9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.

Os resultados mostram que os deslocamentos oscilam em torno da resposta estática, ou seja, as amplitudes diminuem rapidamente devido ao amortecimento, até convergirem ao valor unitário. Na figura (7.2) a amplificação é pequena, na ordem de 12% do deslocamento estático obtido no grau de liberdade 9. Na figura (7.3), ponto onde é aplicada a carga, a amplificação é na ordem de 40% maior que a resposta estática. Observa-se na figura (7.4) que os resultados obtidos utilizando $n = 2$ e $n = 3$ são próximos comparados com $n=1$. Nota-se que há uma variação na resposta permanente quando se varia n pelo truncamento da série de frequências.

Nas figuras (7.5) a (7.8) são plotados os deslocamentos nodais do modelo 3, figura (5.8), em alguns pontos do trilho e dormentes.

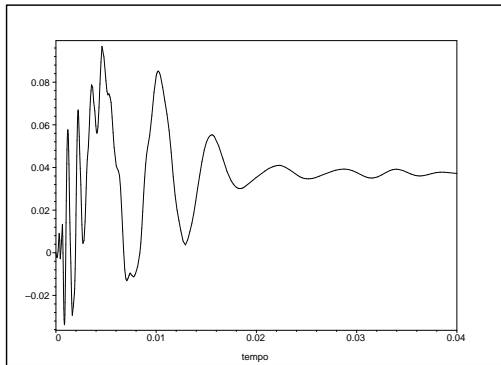


Figura 7.5: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, modelo 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 1,24 \cdot 10^{-5}m$.

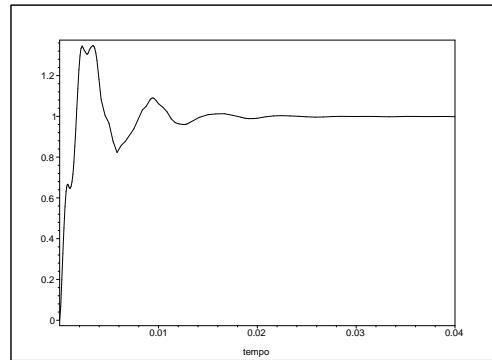


Figura 7.6: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 13, modelo 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,34 \cdot 10^{-4}m$.

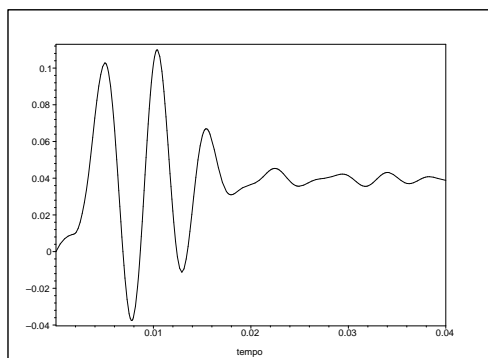


Figura 7.7: Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3 fixando $n=3$ e $d_0 = -1,50 \cdot 10^{-6}m$, modelo 3.

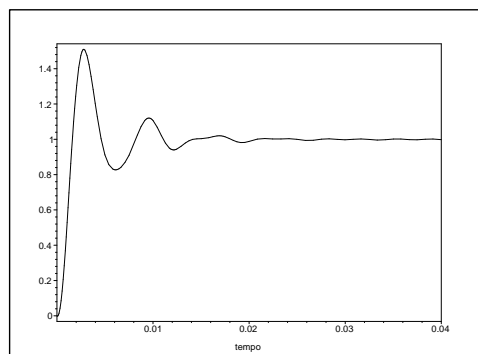


Figura 7.8: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 15 fixando $n=3$ e $d_0 = -2,45 \cdot 10^{-4}m$, modelo 3.

Nos pontos nodais onde a carga foi aplicada, figuras (7.6) e (7.8), o sistema oscila com ampliações de 1.4 e 1.5 (em relação ao deslocamento estático do grau #15), respectivamente; e devido ao grande amortecimento, rapidamente converge à resposta estática. Nos pontos extremos, figuras (7.5) e (7.7), há uma perturbação inicial com amplitudes pequenas que após um curto intervalo de tempo tende à resposta estática.

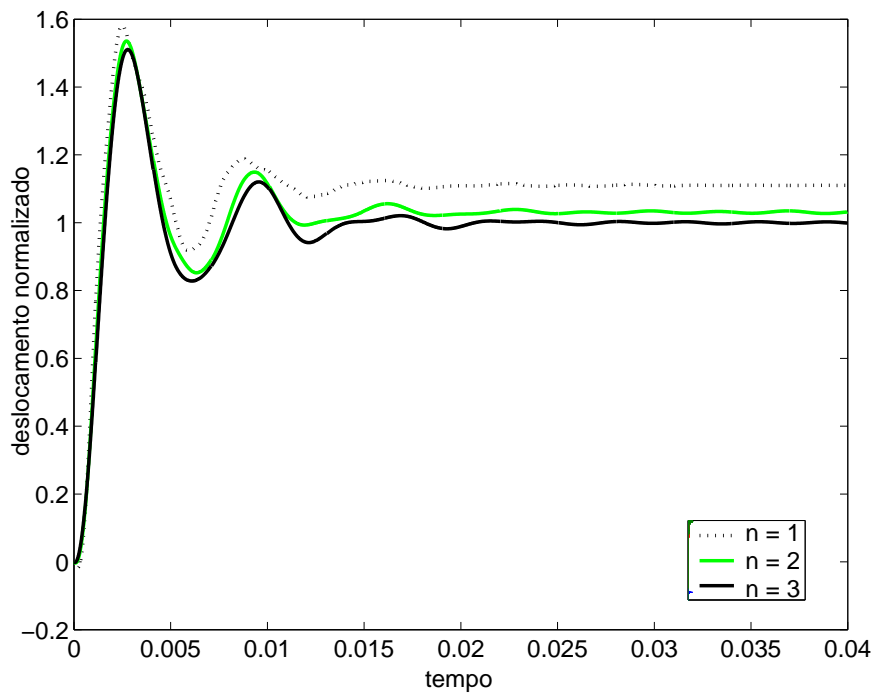


Figura 7.9: Comparação das respostas obtidas no quinto dormente, grau #15, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 3.

Na figura (7.9) percebe-se novamente que os resultados são melhores com o uso de mais matrizes de massa e amortecimento.

Para modelo 5, figura (5.5), são plotados nas figuras (7.10) à (7.13) os deslocamentos normalizados nos mesmos pontos nodais do modelo 3.

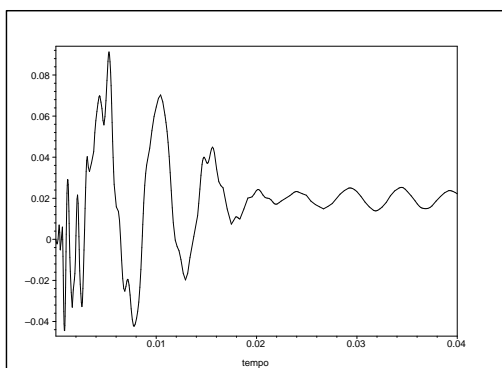


Figura 7.10: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 7,02 \cdot 10^{-5} m$.

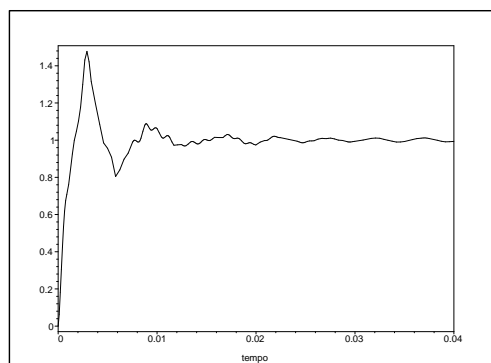


Figura 7.11: Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 21, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,57 \cdot 10^{-4} m$.

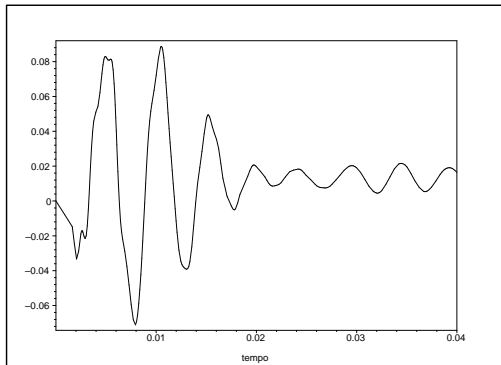


Figura 7.12: Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = 3,66 \cdot 10^{-6}m$.

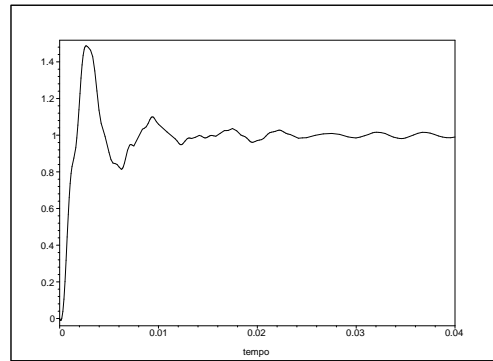


Figura 7.13: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = -2,80 \cdot 10^{-4}m$.

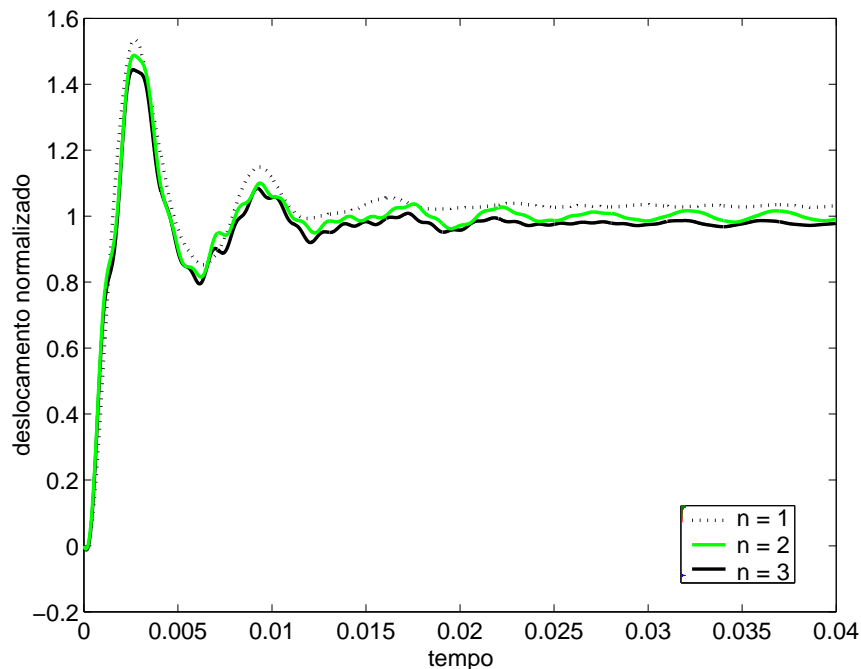


Figura 7.14: Comparação das respostas obtidas no quinto dormente, grau de liberdade 23, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 5.

Percebe-se que o sistema apresenta o mesmo comportamento dos modelos anteriores, ou seja, oscila e tende rapidamente à resposta estática. Na figura (7.14) pode-se verificar a convergência dos resultados. Nota-se ainda nessa mesma figura que o modelo 5 apresentou uma maior aproximação dos mesmos quando se varia n , comparados aos obtidos nos modelos 2 e 3.

7.1.1 Análise comparativa dos modelos 2, 3 e 5

Nas figuras (7.16) e (7.17), são plotados os deslocamentos normalizados obtidos nos modelos 3 e 5 em um mesmo ponto (quinto dormente), num certo intervalo de tempo. Observa-se que os resultados apresentam uma boa aproximação, que melhora à medida que aumenta-se o número de matrizes.

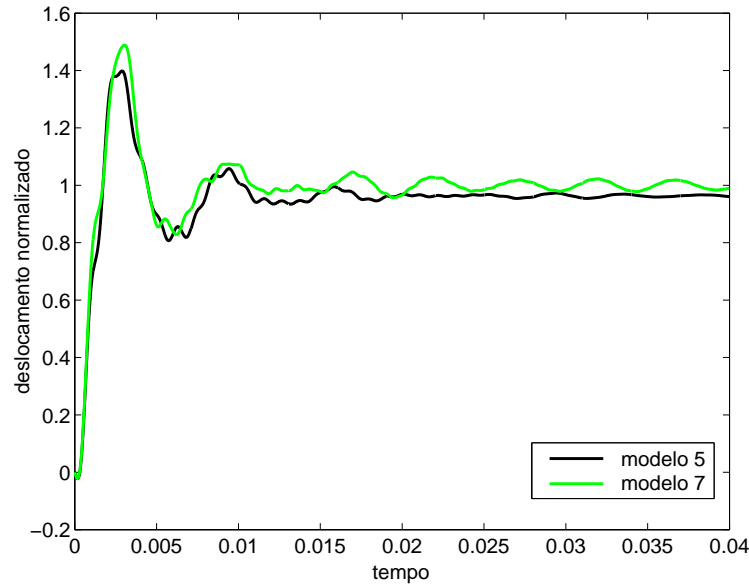


Figura 7.15: Resposta para uma carga súbita no quinto dormente para $n=1$, modelos 5 e 7.

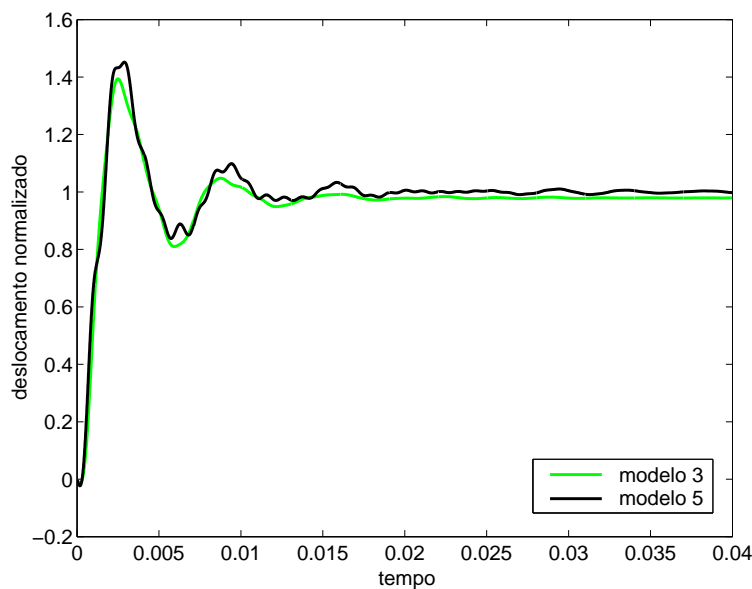


Figura 7.16: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=1$, modelos 3 e 5.

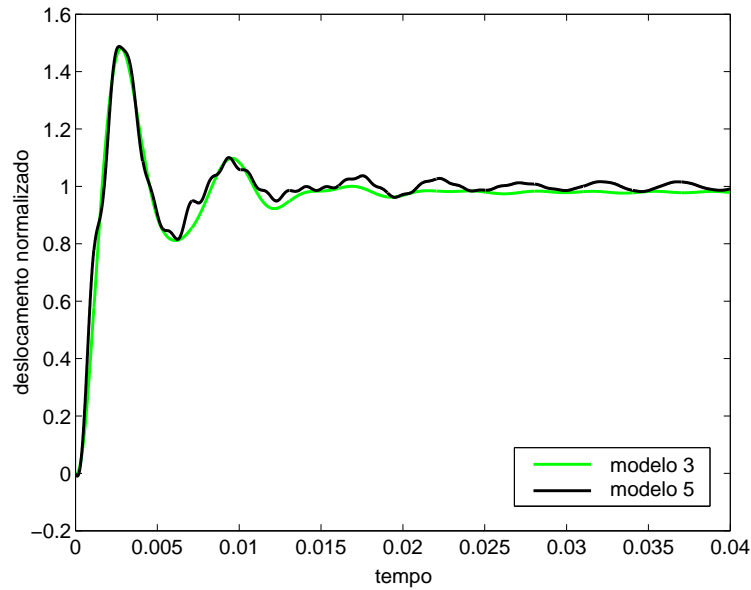


Figura 7.17: Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=3$, modelos 3 e 5.

Na figura (7.18), são plotados os deslocamentos nodais dos dormentes no ponto imediatamente abaixo do trilho (ver figuras (5.7) e (5.5)) obtidos ao longo do trecho de ferrovia, para um certo valor de tempo.

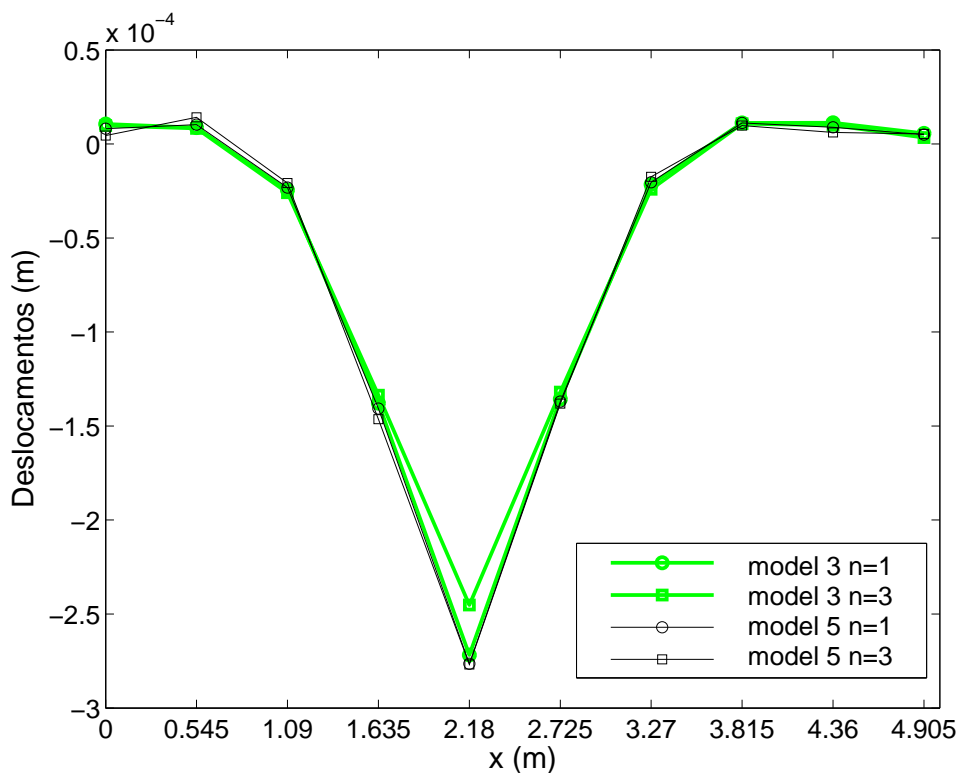


Figura 7.18: Deslocamentos nodais dos dormentes para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 3 e 5.

Nota-se que na região central da figura (7.18) há uma diferença no valor

do deslocamento do modelo 3 obtido variando-se n . Conforme visto na tabela (7.1), na expansão com $n=3$, ou seja, com mais matrizes, os deslocamentos tendem a serem menores que os obtidos para $n=1$, pelo acréscimo de rigidez, massa e amortecimento ao elemento. Comparando-se os modelos, os resultados obtidos para $n=1$ no modelo 3 são próximos aos obtidos no modelo 5. Isso acontece porque no modelo 3 o grau de liberdade que representa o dormente detém as propriedades dos graus de liberdade presentes no modelo 5, incluindo a do grau de liberdade comparado.

Nas figuras (7.19) à (7.22) são plotados os deslocamentos ao longo do trilho e dormentes obtidos nos modelos 3 e 5. Percebe-se ao se variar n no modelo 5 que há pouca alterações nos resultados. No modelo 3, é notada uma diferença comparando-se os resultados utilizando $n=1$ e $n=3$.

| | model 3 ($\times 10^{-6}$) | | model 5 ($\times 10^{-6}$) | |
|----|------------------------------|----------|------------------------------|----------|
| nó | $n = 1$ | $n = 3$ | $n = 1$ | $n = 3$ |
| 1 | 10,5835 | 9,7948 | 8,0892 | 4,4648 |
| 2 | 8,7301 | 8,3127 | 10,2888 | 14,1814 |
| 3 | -24,4846 | -25,959 | -23,1966 | -20,7618 |
| 4 | -137,864 | -133,612 | -140,719 | -146,376 |
| 5 | -271,801 | -245,186 | -276,415 | -276,875 |
| 6 | -135,655 | -131,918 | -136,999 | -138,092 |
| 7 | -21,5031 | -24,1037 | -20,377 | -17,5002 |
| 8 | 11,2053 | 10,7479 | 11,189 | 9,7739 |
| 9 | 11,2511 | 9,9793 | 8,8333 | 6,157 |
| 10 | 5,643 | 3,3641 | 4,9514 | 5,3297 |

Tabela 7.1: Valores dos deslocamentos nodais ($\times 10^{-6}$) dos dormentes ao longo do trecho, modelos 3 e 5 fixando $t=0,05s$.

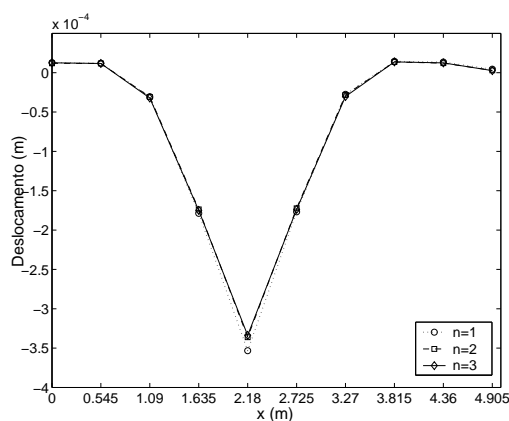


Figura 7.19: Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 3.

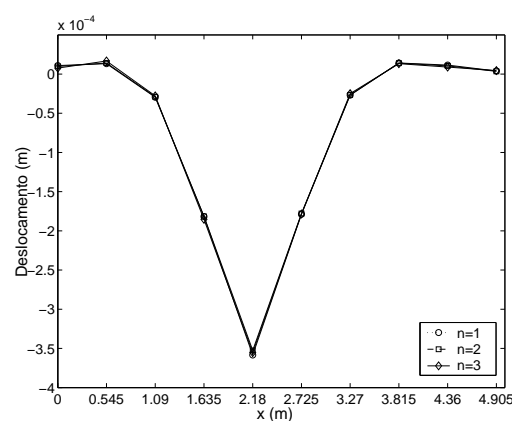


Figura 7.20: Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 5.

Nas figuras (7.23) e (7.24) pode-se observar que os valores dos deslocamentos ao longo do trilho obtidos no modelo 2 são menores aos obtidos no

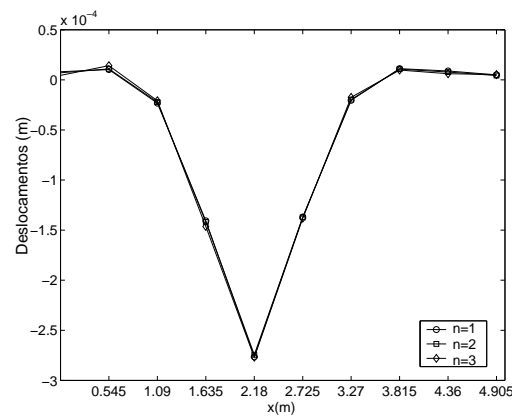
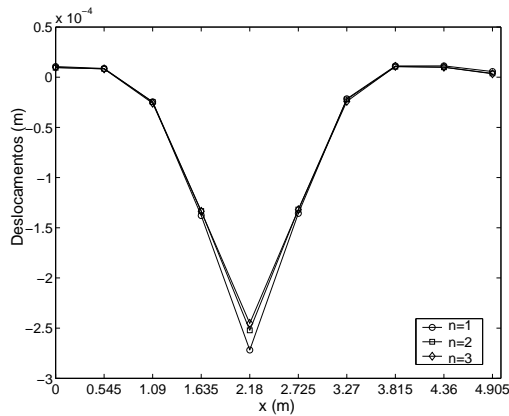


Figura 7.21: Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 3.

Figura 7.22: Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 5.

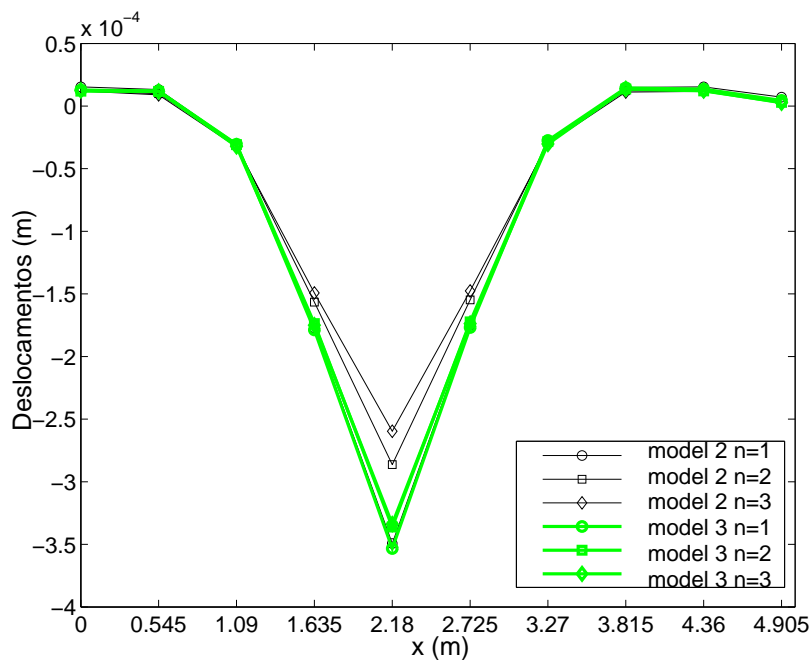


Figura 7.23: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0.05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 3.

modelo 3 e 5. Isso se deve novamente ao fato que no modelo 2 o grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do trilho detém as propriedades do dormente, de acordo com as condensações feitas na seção (5.4).

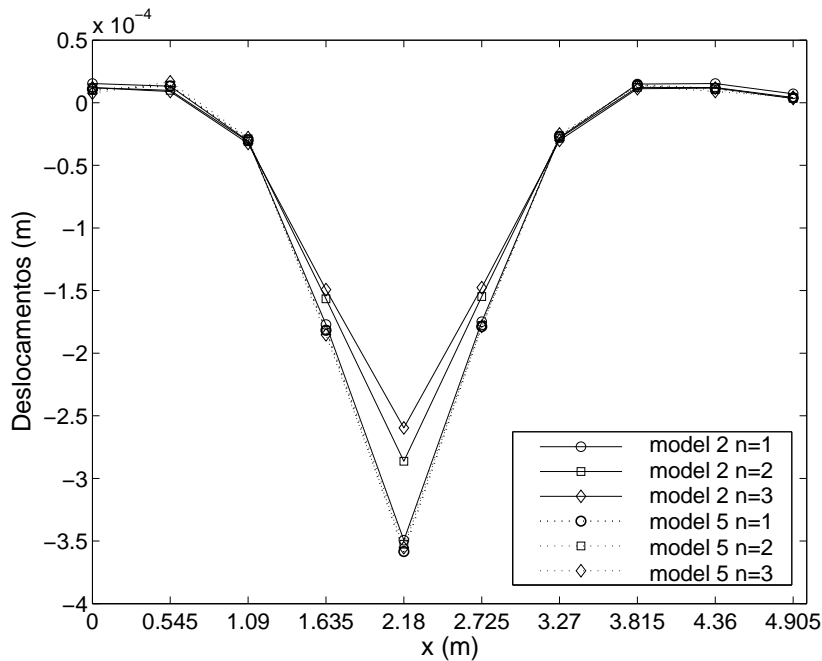


Figura 7.24: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 5.

7.2 Pulso retangular

Com o intuito de observar o comportamento dos modelos para uma ação de curta duração, aplica-se o pulso retangular, equação (7-1), com $P_0 = 100kN$ e $t_1 = 0,04s$, na mesma posição indicada na figura (7.1),

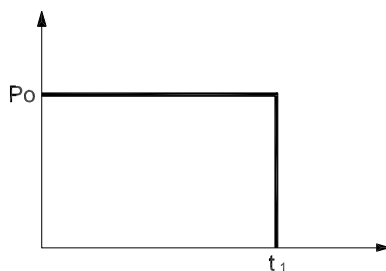


Figura 7.25: Pulso retangular.

$$P(t) = P_0 \text{Heaviside}(t) \text{Heaviside}(t_1 - t) \tag{7-1}$$

onde a função *Heaviside* assume valor 0 para $t < 0$ e 1 para $t > 0$, podendo ser definida pela relação

$$\frac{d}{dt}(\text{Heaviside}(t)) = \delta(t) \tag{7-2}$$

onde δ é o delta de Dirac.

Para cada um dos modelos, são plotados ao longo do tempo os deslocamentos verticais obtidos no primeiro e quinto nós do trilho e nos pontos nodais referentes aos dormentes localizados imediatamente abaixo.

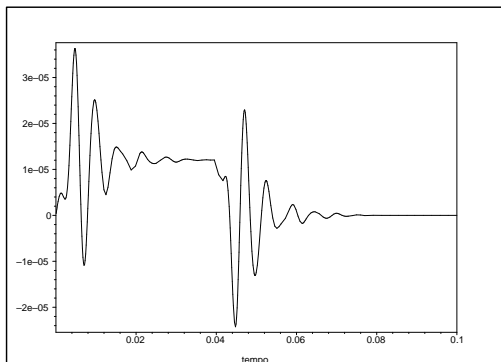


Figura 7.26: Deslocamento obtido no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.

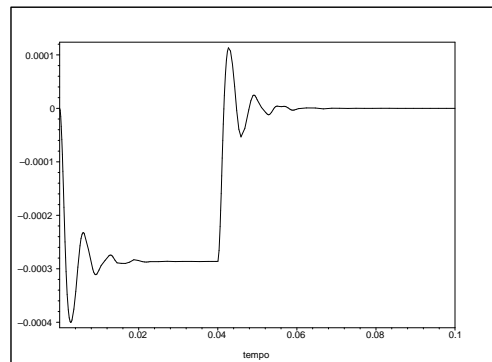


Figura 7.27: Deslocamento obtido no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.

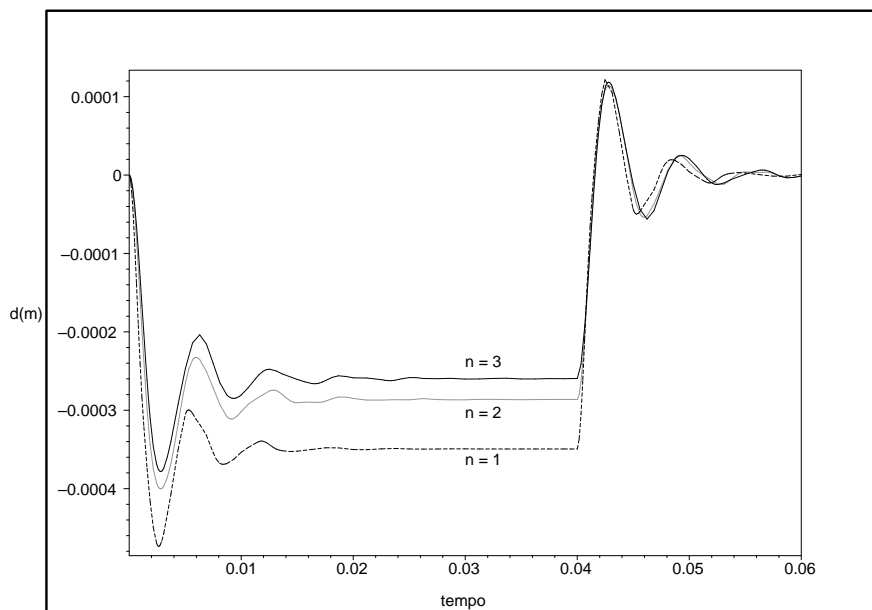


Figura 7.28: Comparação dos deslocamentos obtidos no quinto nó, grau de liberdade 9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.

Nas figuras (7.26) e (7.27) são plotados os deslocamentos obtidos no modelo 2. Pode-se observar que durante o pulso ($t \leq t_1$) os deslocamentos oscilam em torno do valor correspondente ao deslocamento estático da carga retangular do exemplo anterior. Após o pulso ($t > t_1$) os deslocamentos passam a oscilar em torno de zero diminuindo exponencialmente até assumirem o valor nulo.

Ainda no modelo 2, na figura (7.49) verificamos o comportamento do deslocamento variando n . Assim como no exemplo anterior percebe-se que os resultados utilizando mais matrizes são mais próximos.

Nas figuras (7.31) à (7.34) são plotados os resultados obtidos nos modelos 3 e 5.

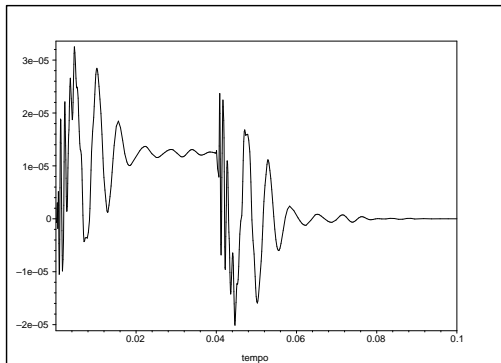


Figura 7.29: Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.

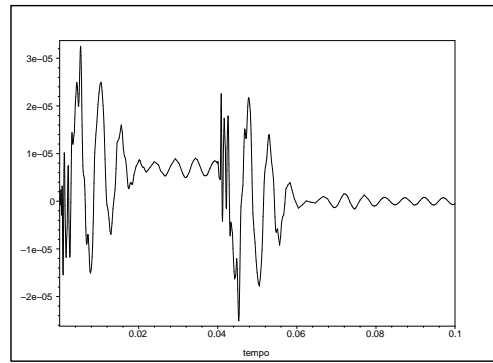


Figura 7.30: Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.

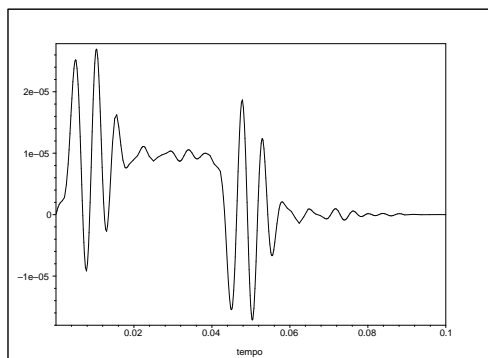


Figura 7.31: Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.

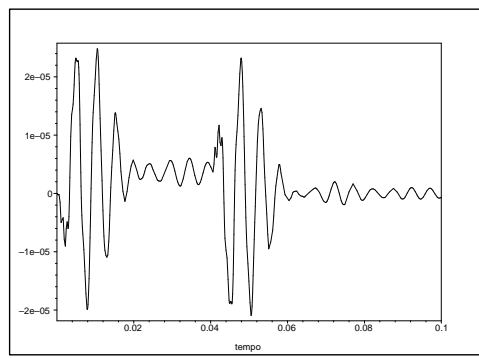


Figura 7.32: Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.

O comportamento dinâmico é similar ao obtido no modelo 2. Nota-se nas figuras (7.29) e (7.30) que na região próxima a origem dos eixos, principalmente no modelo 5, há uma maior perturbação comparada ao modelo 2, figura (7.26). Isso ocorre porque no modelo 2 houve a condensação do grau de liberdade que representa o deslocamento do dormente no trilho.

Na figura (7.34) percebe-se que ao variar n , o modelo 5 é menos sensível a alterações nos valores dos deslocamentos, já no modelo 3, figura (7.33), essa diferença é notada.

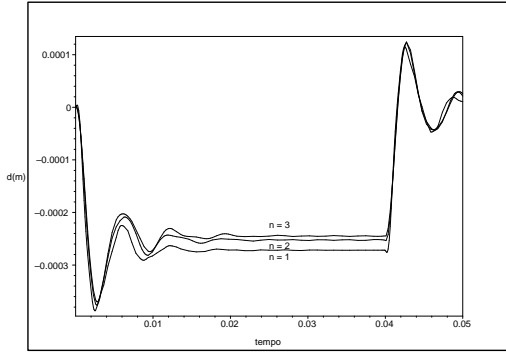


Figura 7.33: Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 15 , modelo 3, para um pulso retangular.

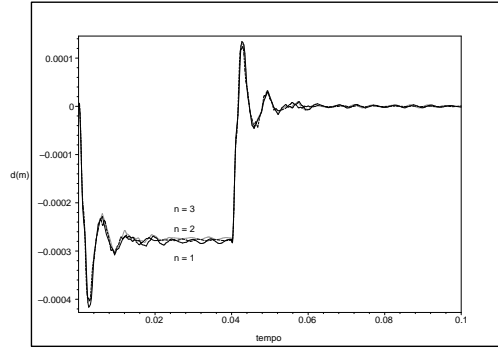


Figura 7.34: Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 23 , modelo 5, para um pulso retangular.

7.3

Comparação dos resultados entre os modelos 2, 3 e 5

Nas figuras (7.35) e (7.36) são feitas comparações entre os resultados obtidos no modelos 2 com os modelos 3 e 5, respectivamente com $t = 0,003s$, lembrando que o resultado comparado é o deslocamento do grau de liberdade vertical dos trilhos.

Por fim, nas figuras (7.37) e (7.38) são comparados os resultados obtidos para os deslocamentos verticais ao longo do trilho e dormentes obtidos nos modelos 3 e 5 com $t = 0,003s$.

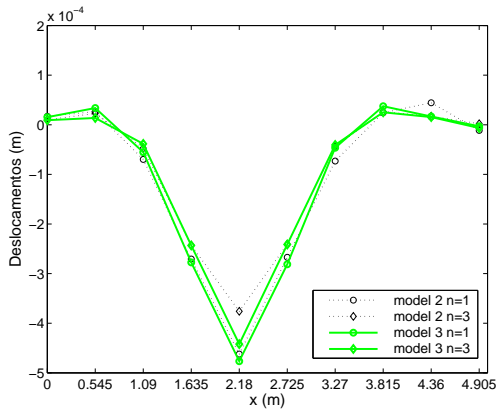


Figura 7.35: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho , modelos 2 e 3, para um pulso retangular.

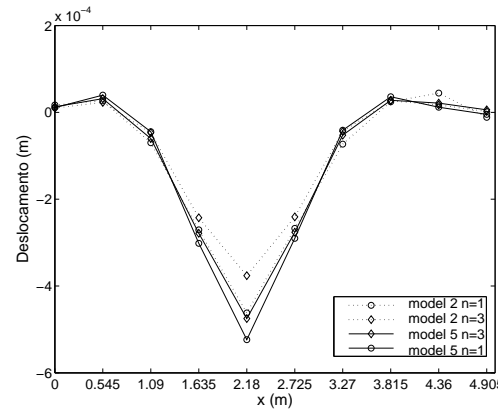


Figura 7.36: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho , modelos 2 e 5, para um pulso retangular.

Observando esses últimos resultados, nota-se a correspondência entre os modelos. Devido ao processo de condensação, há uma diferença de resultados, principalmente entre os modelos 2 e 5. Nas comparações entre os deslocamentos verticais ao longo do trilho e dormentes percebeu-se que o valor do deslocamento é menor nos modelos 2 e 3 comparado ao modelo 5.

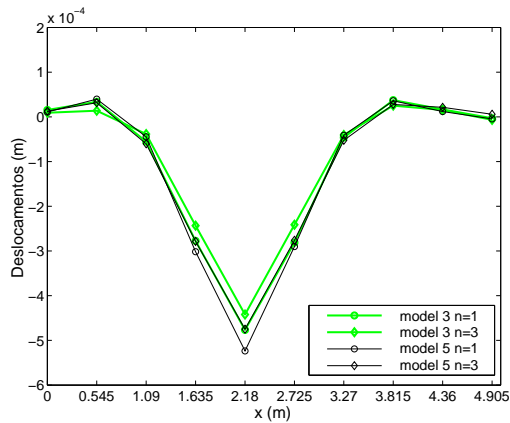


Figura 7.37: Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.

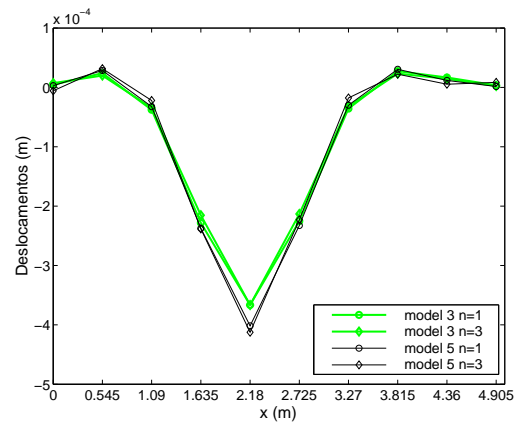


Figura 7.38: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.

7.4 Pulso Triangular simétrico

Considera-se como solicitação o pulso triangular da figura (7.40) com $P_0 = 1000kN$ e $t_1 = 0,04s$ atuando em três pontos nodais, figura(7.39).

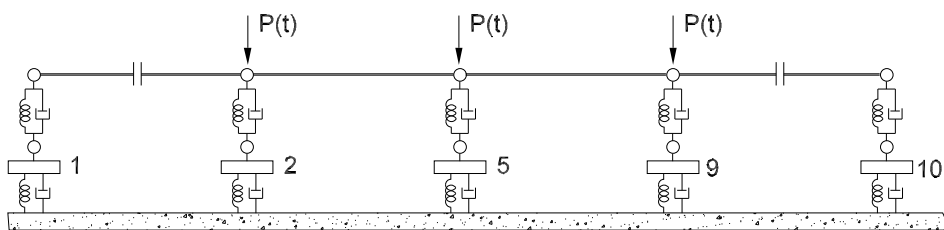


Figura 7.39: Posição do carregamento.

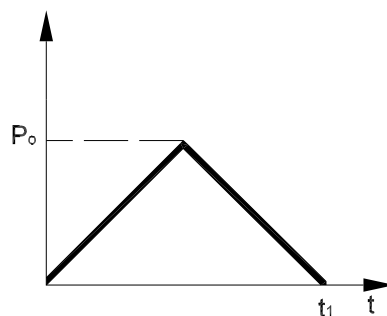


Figura 7.40: Pulso triangular.

$$P(t) = \frac{2P_0}{t_1} Heaviside(t) Heaviside\left(\frac{t_1}{2} - t\right) t +$$

$$Heaviside\left(t - \frac{t_1}{2}\right) Heaviside(t_1 - t) (t_1 - t) \quad (7-3)$$

São plotados nas figuras (7.41)-(7.43) os deslocamentos nodais verticais ao longo do trilho e dormentes (ponto imediatamente abaixo do trilho) obtidos nos modelos 2, 3 e 5 em relação ao modelo 7 (não condensado). O modelo 5 apresentou resultados quase idênticos aos obtidos no modelo 7 (não condensado). Comparando-se os modelos 3 e 7, percebe-se uma pequena diferença nos resultados. O modelo 2 apresentou a maior diferença, devido ao grande número de condensações.

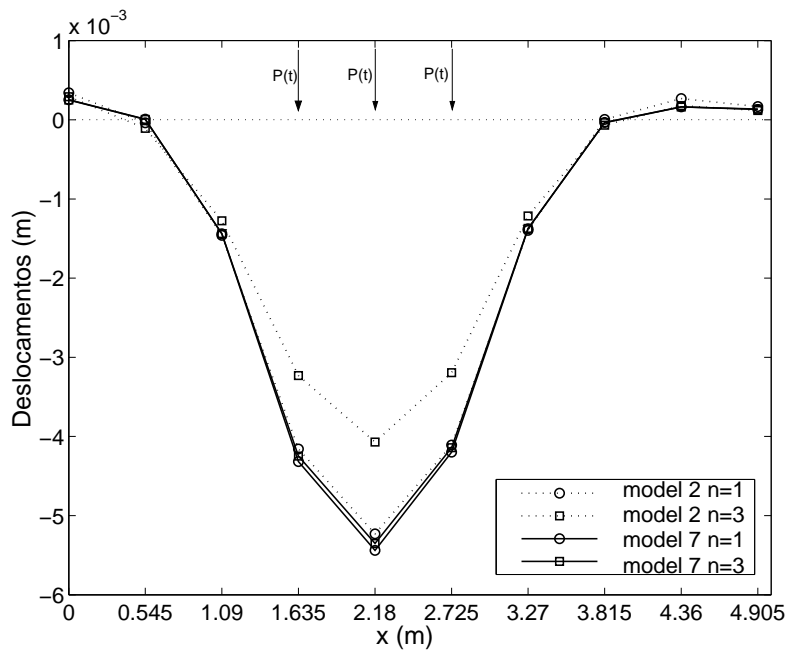


Figura 7.41: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 2 e 7 para $t=0,025s$.

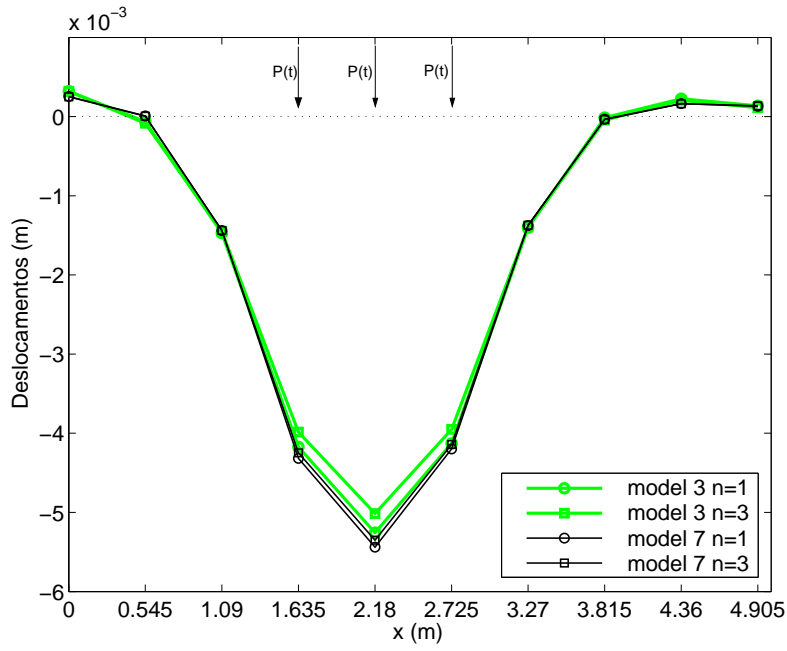


Figura 7.42: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.

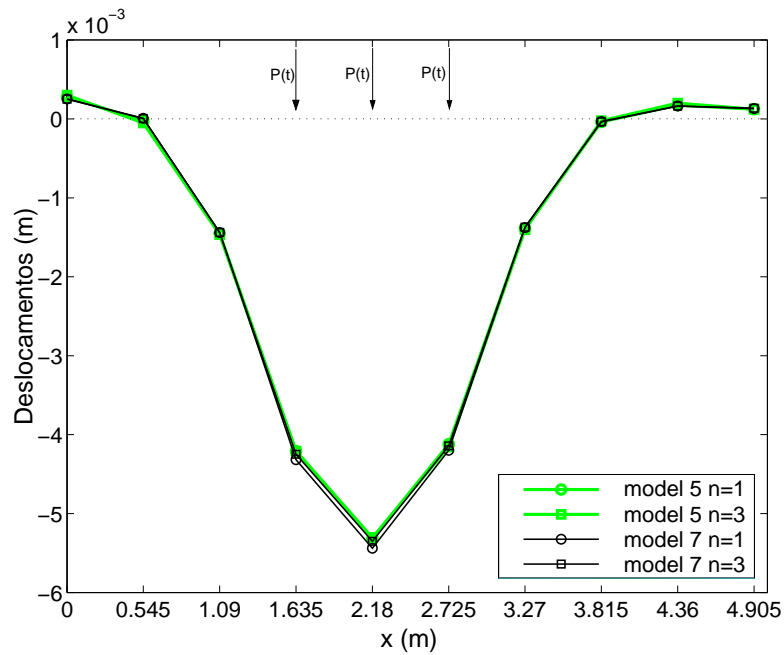


Figura 7.43: Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.

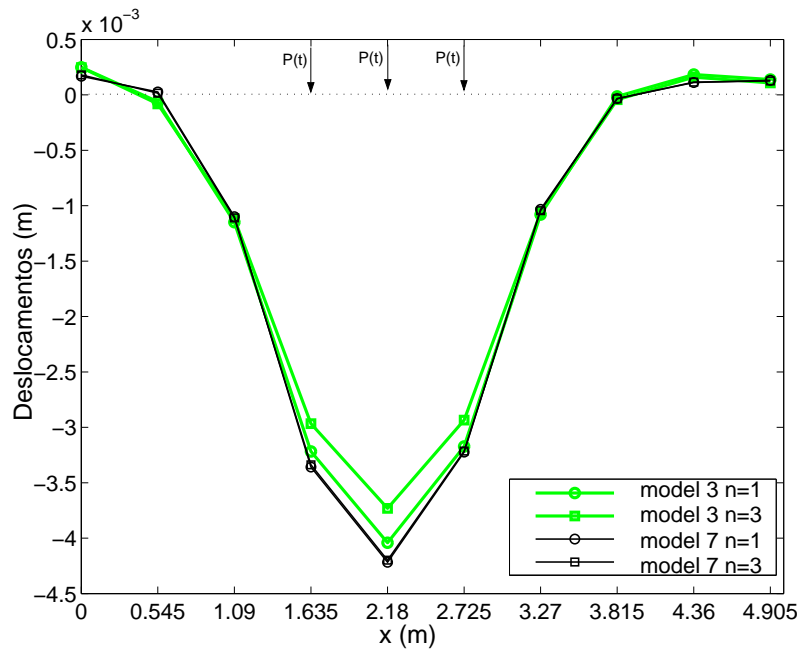


Figura 7.44: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.

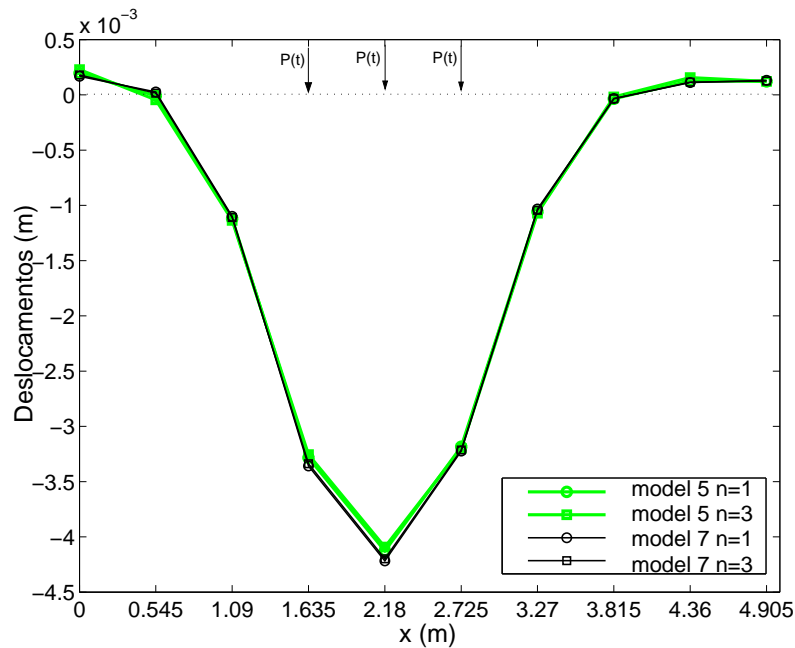


Figura 7.45: Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.

7.5 Sistema com amortecimento reduzido

Utilizando as propriedades listadas nas tabelas (5.8), (5.9) e (5.10), avalia-se agora o comportamento dos modelos quando se reduz consideravel-

mente o amortecimento.

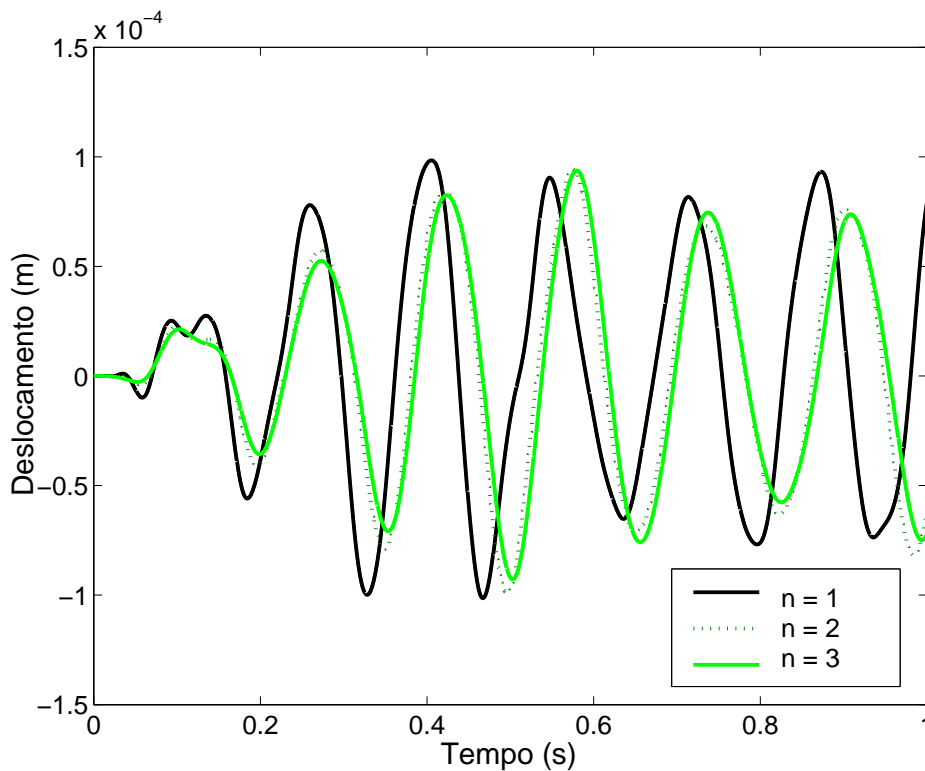


Figura 7.46: Deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando o número de matrizes de massa e amortecimento e $P(t) = 100kN$.

Com pouco amortecimento, o sistema oscila sem se notar uma redução nas amplitudes nos primeiros instantes. Na figura (7.46) observa-se o comportamento do deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando n .

Percebe-se, figuras (7.47) e (7.48), a aproximação dos resultados obtidos nos modelos 3 e 5. Na figura (7.49) é notada uma variação maior dos valores nodais dos deslocamentos ao longo dos dormentes, entre os modelos 3 e 5 se comparados aos resultados obtidos no primeiro exemplo.

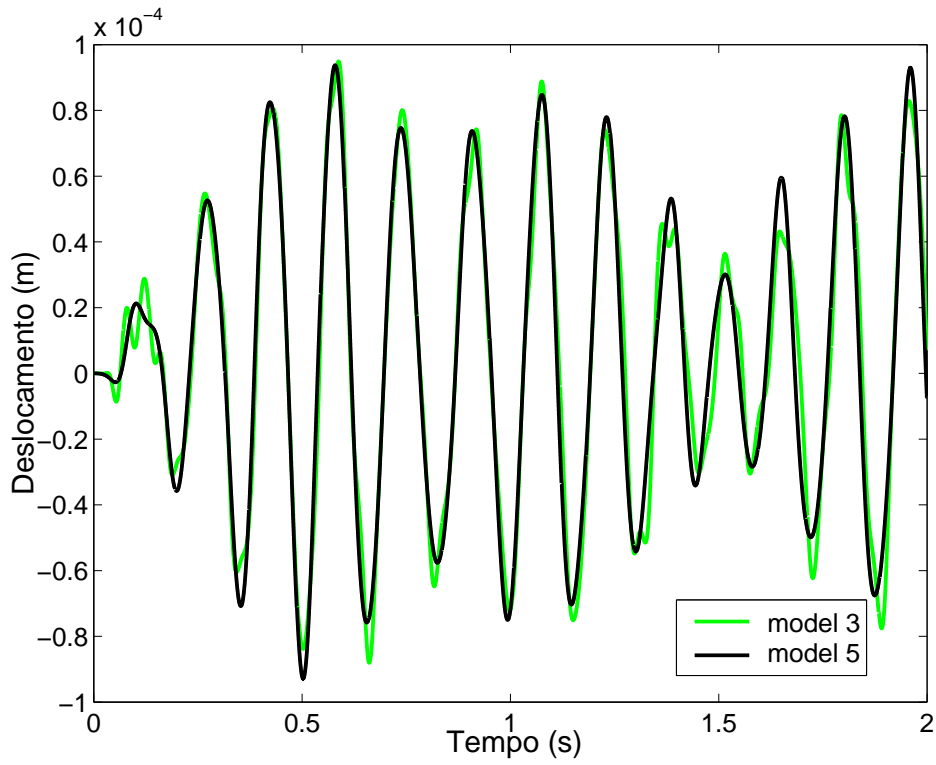


Figura 7.47: Deslocamento no primeiro dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.

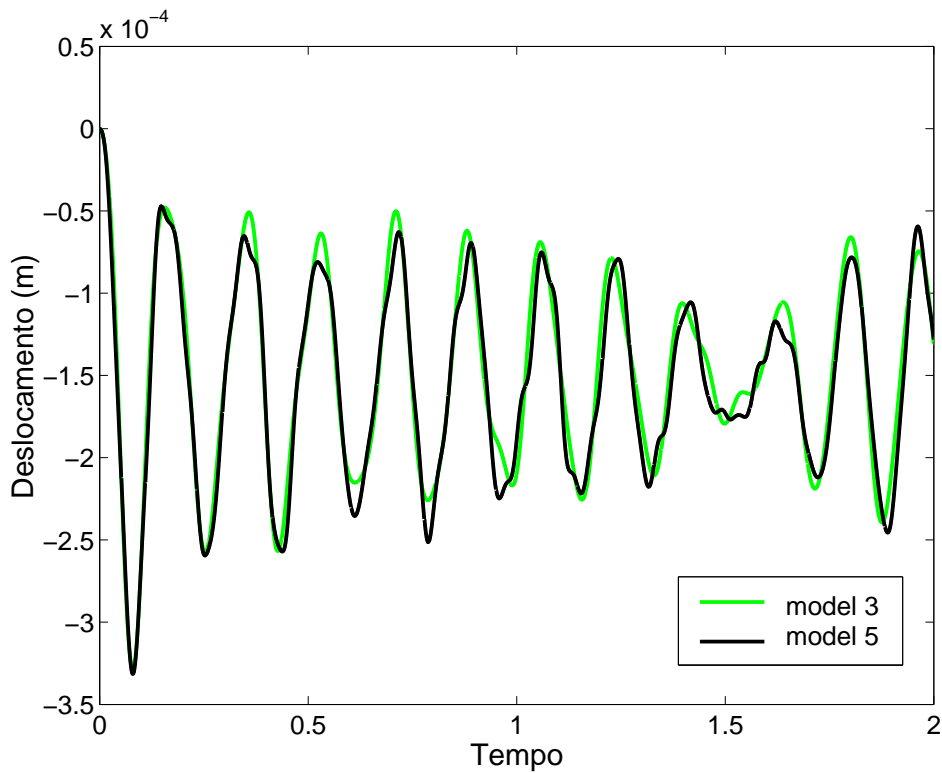


Figura 7.48: Deslocamento no quinto dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.

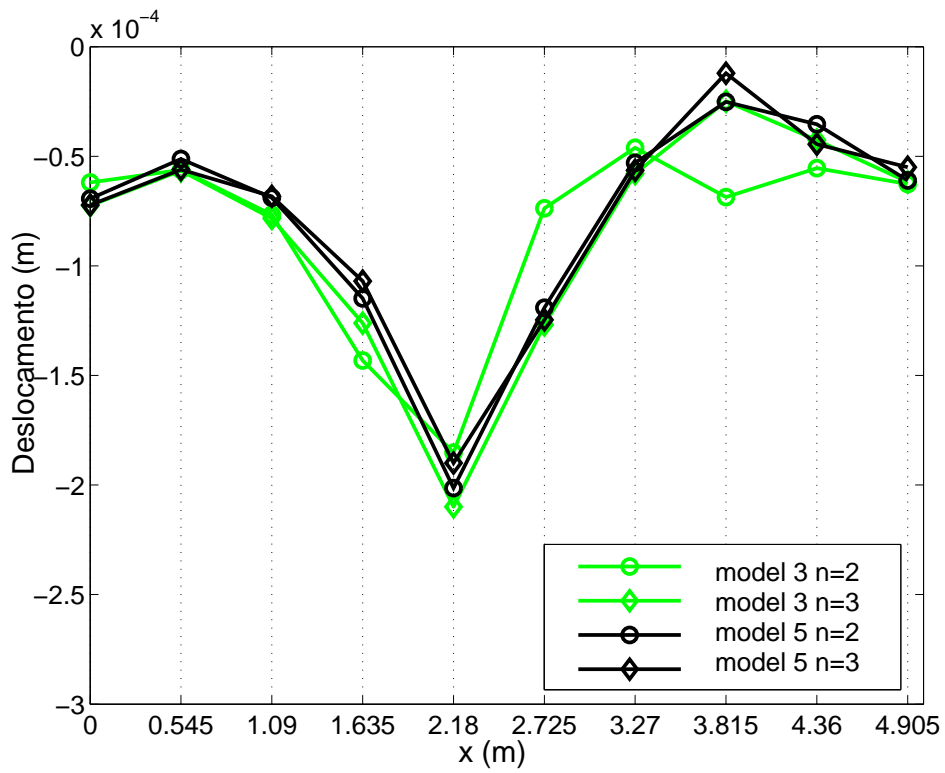


Figura 7.49: Comparação dos deslocamentos nodais obtidos nos dormentes, imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5.

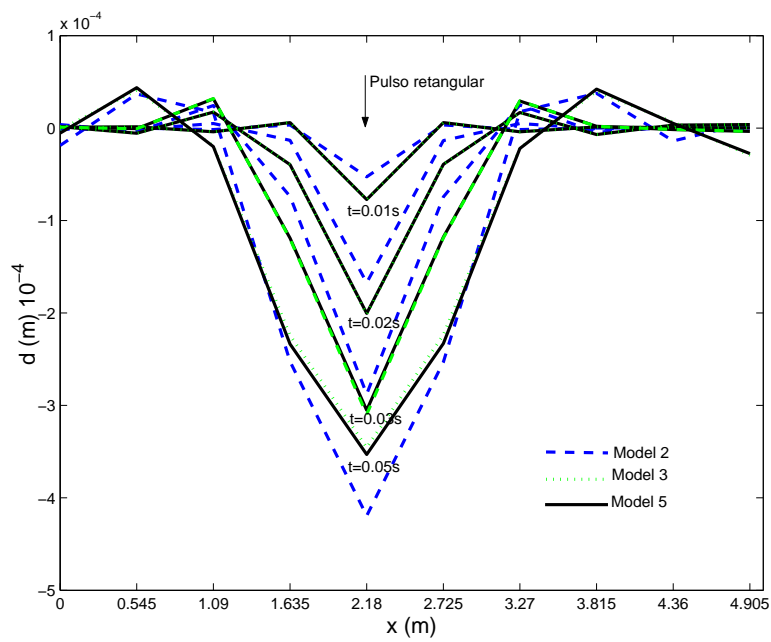


Figura 7.50: Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 1$.

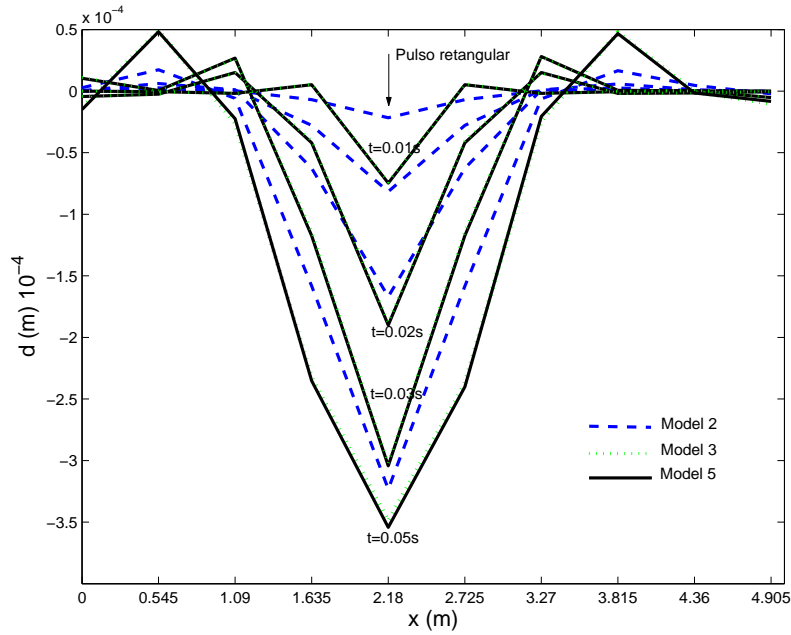


Figura 7.51: Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 3$.

Para o pulso retangular, (7-1), nas figuras (7.50) e (7.51) são plotados os deslocamentos nodais do trilho, englobando todos os modelos e fixando $n = 1$ e $n = 3$, respectivamente. O modelo 2 apresenta a maior dispersão de resultados, comparada aos modelos 3 e 5. Pode-se observar que os resultados obtidos nos modelos 3 e 5 são praticamente idênticos, principalmente para $n = 3$.

7.6 Trecho de ferrovia com 20 dormentes

Utiliza-se o modelo 7, figura (7.52), para simular um trecho de ferrovia constituída por 20 dormentes. Como solicitação aplica-se uma carga súbita de intensidade igual a $P_0 = 1MN$ no grau de liberdade 64 de cima para baixo.

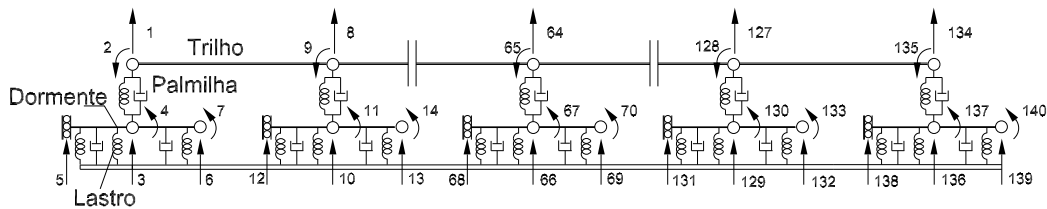


Figura 7.52: Distribuição dos graus de liberdade nodais no trecho simulado

Na figura (7.53) são plotadas as 140 frequências do problema em ordem crescente. Devido a simetria do problema, verifica-se a presença de zonas onde os valores das frequências são próximas (trecho horizontal do gráfico).

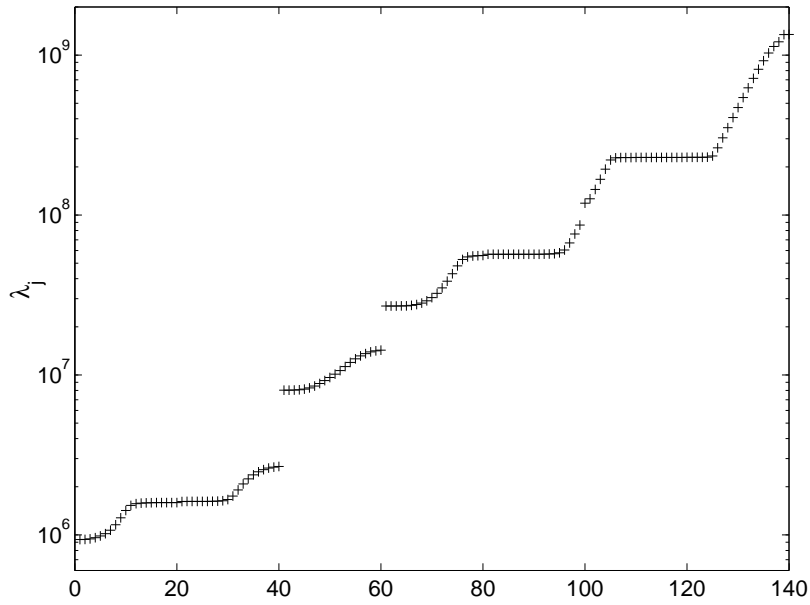


Figura 7.53: Freqüências (ao quadrado) em ordem crescente

Na figura (7.54), são plotados os modos de vibração $\phi_1, \phi_2, \phi_{84}, \phi_{85}, \phi_{94}$ e ϕ_{95} da estrutura. Observa-se que os modos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_{94} são simétricos e que os modos ϕ_{84}, ϕ_{85} e ϕ_{95} são anti-simétricos.

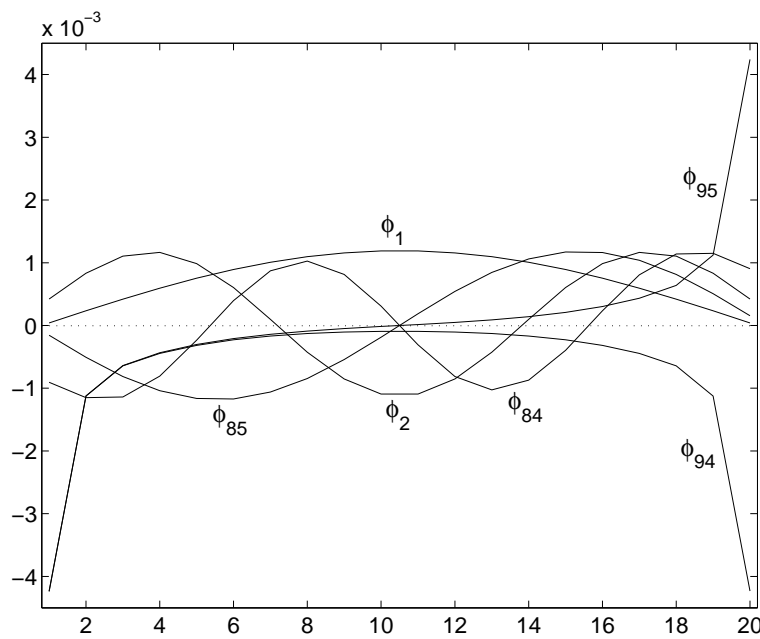


Figura 7.54: Modos de vibração ao longo dos dormentes ($\times 10^{-3}m$)

A resposta transiente dos graus de liberdade 64 e 1 são mostradas nas figuras (7.55) e (7.56).

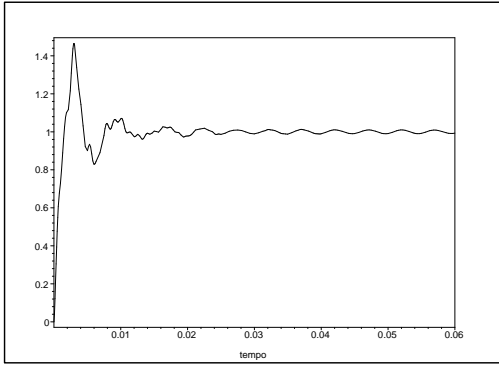


Figura 7.55: Amplificação no grau de liberdade # 64, para $n = 2$.

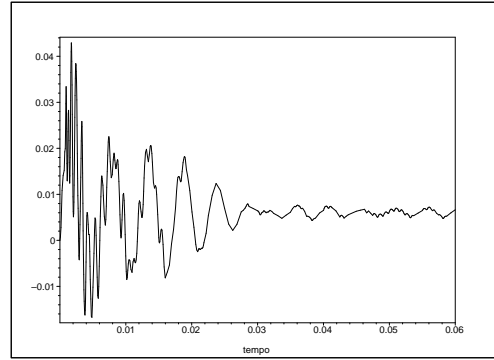


Figura 7.56: Amplificação no grau de liberdade # 1, para $n = 2$.

Percebe-se que a amplificação obtida no grau de liberdade 64 é de 1,5 vezes o valor do deslocamento estático ($d_0 = 3,61 \cdot 10^{-3}m$) nesse mesmo nó. No grau de liberdade 1, a amplificação em relação ao nó central é bem reduzida ($0,045d_0$).