6
Solução particular para o caso de viga de Timoshenko

6.1
Generalização da solução para um elemento viga de Timoshenko

Na seção (4.2) foi desenvolvida a solução geral homogênea para uma viga de Timoshenko, com carregamento transversal q nulo. Agora deseja-se obter uma solução particular geral, para qualquer carregamento $q(x,t)$.

Nas equações de equilíbrio apresentadas anteriormente, considera-se agora um carregamento q não nulo, tal que

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-2\zeta m\frac{\partial y}{\partial t}-wy=-q \tag{6-1}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)+EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{mI}{A}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{6-2}$$

Primeiramente assume-se que o carregamento

$$q(x,t)=q^*(x)e^{-i\omega t} \tag{6-3}$$

possa ser representado pelo produto de duas funções dependentes do espaço e do tempo.

Aplicando-se esta equação juntamente com as definições dadas na equação (4-24) têm-se as equações (6-1) e (6-2) na forma transformada:

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)+\left(m\omega^2+2i\omega\zeta m-w\right)y^*=q^* \tag{6-4}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y^*}{\partial x}-\psi^*\right)+EI\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+\frac{mI}{A}\omega^2\psi^*=0 \tag{6-5}$$

Eliminando-se ψ^* nas equações (6-4) e (6-5), têm-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4}+T\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}-k^4 y^*(x)=\left(\frac{m\omega^2}{EGA^2\kappa}-\frac{1}{EI}\right)q^*+\frac{1}{GA\kappa}\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} \tag{6-6}$$

onde os parâmetros k e T são os mesmos definidos nas equações (4-28) e (4-29).

A equação (6-6) no domínio do tempo tem a forma

$$y^{IV} - (\frac{m}{EA} + \frac{m}{GA\kappa})\ddot{y}'' - \frac{2\zeta m}{GA}\dot{y}'' - \frac{w}{GA}y'' + \frac{m^2}{EGA^2\kappa}\ddddot{y} + (\frac{m}{EI} + \frac{mw}{EGA^2\kappa})\ddot{y} -$$
$$\frac{2\zeta m^2}{EGA^2\kappa}\dddot{y} + \frac{2\zeta m}{EI}\dot{y} + \frac{w}{EI}y = -\frac{m}{EGA^2\kappa}\ddot{q} + \frac{1}{GA\kappa}q'' - \frac{1}{EI}q \tag{6-7}$$

onde o ponto indica uma derivada em relação ao tempo e as aspas indicam a ordem das derivadas em relação a x.

A solução particular da equação (6-7) terá a seguinte forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) y_n(x) \tag{6-8}$$

em que a função $y_n(x)$ é um modo normal da solução homogênea, tão simples quanto possível. Escolhe-se, da equação (4-30)

$$y_n(x) = \sin \beta_n x \tag{6-9}$$

onde $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, ...$

No caso,

$$\beta_n = \sqrt{\sqrt{k_n + \frac{T_n^2}{4}} + \frac{T_n}{2}} \tag{6-10}$$

para

$$\begin{aligned} k_n &= \left(\frac{m}{EI}\left(\omega_n^2 + 2i\zeta\omega_n - \frac{w}{m} - \frac{I}{GA\kappa}\left(m\omega_n^4 + 2i\zeta m\omega_n^3 + w\omega_n^2\right)\right)\right)^{\dfrac{1}{4}} \\ T_n &= \frac{m}{EI}\left[\left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right)\frac{I}{A}\omega_n^2 + \frac{EI}{mGA\kappa}\left(2i\zeta m\omega_n - w\right)\right] \end{aligned} \tag{6-11}$$

Pode-se obter diretamente ω_n a partir de $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, ...$; mas não se faz necessário, conforme se verá.

Tem-se , portanto,

$$y_n'' = -{\beta_n}^2 y_n; \qquad y_n^{IV} = {\beta_n}^4 y_n \tag{6-12}$$

Substituindo a expressão de $y(x,t)$ da equação (6-8) na equação (6-7) e tendo em vista a equação (6-12), para amortecimento:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{A_n q_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \dddot{q}_n + C_n \ddddot{q}_n\right\} y_n(x) = Q(x,t) \tag{6-13}$$

sendo

$$\begin{aligned} A_n &= {\beta_n}^4 + \frac{{\beta_n}^2 w}{GA} + \frac{w}{EI}, \qquad\qquad D_n = 2\zeta m \left(\frac{1}{EI} + \frac{{\beta_n}^2}{GA}\right) \\ B_n &= {\beta_n}^2 \left(\frac{m}{EA} + \frac{m}{GA}\right) + \left(\frac{m}{EI} + \frac{mw}{EGA^2\kappa}\right) \\ E_n &= -\frac{2\zeta m}{EGA^2\kappa}, \qquad\qquad C_n = \frac{m^2}{EGA^2\kappa} \end{aligned} \tag{6-14}$$

com $A_n > 0$, $B_n > 0$, $A_n > B_n$, $D_n \geq 0$, $E_n \leq 0$ e $C_n \geq 0$.

Multiplicando a equação (6-13) por $y_n(x)$ e integrando de zero a L, obtém-se, pela condição de ortogonalidade,

$$A_n q_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \dddot{q}_n + C_n \ddddot{q}_n = \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t) y_n(x) \mathrm{d}x \tag{6-15}$$

ou

$$A_n q_n + D_n \dot{q}_n + B_n \ddot{q}_n + E_n \dddot{q}_n + C_n \ddddot{q}_n = F_n \qquad n = 1, 2, ... \tag{6-16}$$

Uma solução particular para esta equação (com todas as constantes de integração nulas) tem a forma:

$$q_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i (t-\tau)}}{\Delta_i} \mathrm{d}\tau, \qquad \Delta_i = D_n + 2B_n\alpha_i + 3E_n{\alpha_i}^2 + 4C_n{\alpha_i}^3 \tag{6-17}$$

onde α_i são as 4 raízes de $A_n + D_n\alpha_i + B_n{\alpha_i}^2 + E_n{\alpha_i}^3 + C_n{\alpha_i}^4 = 0$.

A seguir, serão desenvolvidas soluções para uma viga esbelta e alguns casos particulares de carregamento.

6.2
Primeiro caso: Viga esbelta com amortecimento

Para o caso particular de uma viga esbelta, têm-se na equação (6-14): $A_n = {\beta_n}^4$, $B_n = \dfrac{m}{EI}$, $C_n = 0$; $D_n = \dfrac{2\zeta m}{EI}$; $E_n = 0$.

Assim, a equação (6-13) se expressa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {\beta_n}^4 q_n + \frac{2\zeta m}{EI}\dot{q}_n + \frac{m}{EI}\ddot{q}_n \right\} y_n(x) = -\frac{1}{EI} q \tag{6-18}$$

Pode-se definir ${\beta_n}^4 = \dfrac{m}{EI}\bar{\omega}_n^2$, onde $\bar{\omega}_n \neq \omega_n$. Substituindo esta expressão em (6-18), obtêm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \bar{\omega}_n^2 q_n + 2\zeta \dot{q}_n + \ddot{q}_n \right\} y_n(x) = -\frac{1}{m} q \tag{6-19}$$

ou, eliminando-se $y_n(x)$

$$\bar{\omega}_n^2 q_n + 2\zeta \dot{q}_n + \ddot{q}_n = F_n \qquad n = 1, 2, ... \tag{6-20}$$

em que $F_n = -\dfrac{2}{mL}\displaystyle\int_0^L qy\mathrm{d}x$.

Por fim, utilizando a equação (6-17)

$$q_n = \frac{1}{mL\sqrt{\bar{\omega}^2 - \zeta^2}i}\int_0^t q(\tau)\left[e^{(-\sqrt{\bar{\omega}^2-\zeta^2}i-\zeta)(t-\tau)} - e^{(-\sqrt{\bar{\omega}^2-\zeta^2}i-\zeta)(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau \tag{6-21}$$

A partir desta equação pode-se obter os casos particulares de impacto e carga móvel, para viga esbelta.

6.3
Segundo caso particular: Carga Impulsiva

De acordo com equação (6-7), podemos representar o carregamento $Q(x,t)$ na forma

$$Q(x,t) = -\frac{m}{EGA^2\kappa}\ddot{q} + \frac{1}{GA\kappa}q'' - \frac{1}{EI}q \tag{6-22}$$

Para o caso particular de uma carga de impacto, cuja expressão matemática é $q(x,t) = P\delta(x-\xi)\delta(t)$, onde δ é o delta de Dirac, a equação (6-22) assume a forma

$$Q(x,t) = -\frac{m}{EGA^2\kappa}P\delta(x-\xi)\ddot{\delta}(t) + \frac{1}{GA\kappa}P\delta''(x-\xi)\delta(t) - \frac{1}{EI}P\delta(x-\xi)\delta(t) \tag{6-23}$$

Tem-se que

$$\int_0^L \delta(x-\xi)f(x)\mathrm{d}x = f(x), \qquad \int_0^L \delta'(x-\xi)f(x)\mathrm{d}\xi = -f'(\xi)$$
$$\int_0^L \delta''(x-\xi)f(x)\mathrm{d}\xi = f''(\xi), \text{ para} \qquad 0 \leq \xi \leq L. \tag{6-24}$$

onde ξ é a coordenada ao longo de x do ponto de aplicação do impacto .

Utilizando a definição de F_n dada na equação (6-15), obtemos

$$F_n = \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\sin\beta_n x\mathrm{d}x = \frac{2P}{L}\sin\beta_n\xi\left[\frac{-m}{EGA^2\kappa}\ddot{\delta}(t) - \left(\frac{{\beta_n}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI}\right)\delta(t)\right] \tag{6-25}$$

Utilizando a equação (6-17)

$$q_n(t) = \frac{-2P}{L} \sin \beta_n \xi \left[\frac{m}{EGA^2\kappa} \sum_{\alpha_i} \frac{{\alpha_i}^2 e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} + \left(\frac{{\beta_n}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} \right] \tag{6-26}$$

obtém-se a solução no domínio do tempo para a carga de impacto.

E por fim, de acordo com a equação (6-8)

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2P}{L} \sin \beta_n \xi \sin \beta_n x \left[\frac{m}{EGA^2\kappa} \sum_{\alpha_i} \frac{{\alpha_i}^2 e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} + \left(\frac{{\beta_n}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right) \sum_{\alpha_i} \frac{e^{\alpha_i t}}{\Delta_i} \right] \tag{6-27}$$

obtém-se a expressão para a solução particular da equação (6-7) para uma carga de impacto.

6.4 Terceiro caso particular: Carga móvel

Uma carga móvel pode ser representada por

$$q(x,t) = P\delta(x - Vt), \qquad 0 \leq Vt \leq L \tag{6-28}$$

onde V é a velocidade uniforme com que a carga se movimenta.

Utilizando novamente a equação (6-15), obtemos

$$F_n = \frac{2P}{L} \int_0^L \left[\left(\frac{-mV^2}{EGA^2\kappa} + \frac{1}{GA\kappa} \right) \delta''(x - Vt) - \frac{1}{EI} \delta(x - Vt) \right] \sin \beta_n x \mathrm{d}x \tag{6-29}$$

Observar que

$$\frac{\partial^2 \delta(x - Vt)}{\partial x^2} = \delta''(x - Vt); \qquad \frac{\partial^2 \delta(x - Vt)}{\partial t^2} = V^2 \delta''(x - Vt) \tag{6-30}$$

Integrando a equação (6-29) e agrupando-se os termos chega-se a expressão para F_n.

$$F_n = \frac{2P}{L} \left[\frac{m{\beta_n}^2 V^2}{EGA^2\kappa} - \frac{{\beta_n}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \tag{6-31}$$

Obtém-se, a partir da equação (6-17):

$$q_n(t) = \frac{2P}{L} \left[\frac{m{\beta_n}^2 V^2}{EGA^2\kappa} - \frac{{\beta_n}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \sum_{\alpha_i} \frac{\beta_n V \left(e^{\alpha_i} - \cos \beta_n V t \right) - \alpha_i \sin \beta_n V t}{\left({\alpha_i}^2 + {\beta_n}^2 V^2 \right) \Delta_i} \tag{6-32}$$

A solução particular final para uma carga móvel de acordo com a equação (6-8) tem a forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2P}{L} \sin \beta_n x \Omega_n \sum_{\alpha_i} \frac{\beta_n V \left(e^{\alpha_i} - \cos \beta_n V t\right) - \alpha_i \sin \beta_n V t}{\left(\alpha_i{}^2 + \beta_n{}^2 V^2\right) \Delta_i} \right) \tag{6-33}$$

onde

$$\Omega_n = \left[\frac{m \beta_n{}^2 V^2}{EGA^2 \kappa} - \frac{\beta_n{}^2}{GA\kappa} + \frac{1}{EI} \right] \tag{6-34}$$

O resultado acima pode ser dado diretamente para valores numéricos e $n = 1, 2, ...$, usando de preferência uma rotina em maple. Para amortecimento nulo, em ambos os casos particulares, o resultado pode ser obtido em forma explicita, considerando na equação (6-13), $D_n = 0$ e $E_n = 0$.