4
Elementos finitos dinâmicos unidimensionais

Neste capítulo serão desenvolvidos os elementos unidimensionais de treliça e viga utilizados na modelagem da via férrea. Para cada elemento são apresentadas as equações de equilíbrio, suas soluções e os procedimentos para a montagem das matrizes de rigidez no domínio da freqüência. Por fim são apresentados 2 exemplos para a análise de resultados.

4.1
Matriz de rigidez para um elemento de treliça

4.1.1
Formulação do problema

Para um elemento de treliça com amortecimento, a equação diferencial referente ao problema é dada por

$$E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{4-1}$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ρ é a densidade específica (por unidade de volume) e $\mu = 2\zeta\rho$ é o coeficiente de amortecimento viscoso, definido por unidade de volume.

Supondo-se uma solução por separação de variáveis, o deslocamento $u\left(x,t\right)$ pode ser definido como:

$$u\left(x,t\right) = u^*\left(x\right)e^{-i\omega t} \tag{4-2}$$

Assim, a equação (4-1) se expressa

$$E\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + \rho\left(\omega^2 + 2i\zeta\omega\right)u^*(x) = 0 \tag{4-3}$$

ou

$$\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + k^2 u^*(x) = 0 \tag{4-4}$$

onde

$$k^2 = \frac{\rho}{E}\left(\omega^2 + 2i\zeta\omega\right) \tag{4-5}$$

4.1.2

Montagem da matriz de rigidez

A solução geral da equação (4-4) se expressa

$$u^*(x) = C_1 \frac{\sin(kx)}{k} + C_2 \cos(kx) \tag{4-6}$$

de tal modo que

$$\lim_{k \to 0} u^*(x) = C_1 x + C_2 \tag{4-7}$$

Como se está analisando um problema no domínio da freqüência, em termos de uma superposição de harmônicos, pode-se usar

$$C_2 = 0 \tag{4-8}$$

para uma solução que oscila em torno de $u^*(0) = 0$, sem prejuízo da formulação geral, como se mostra a seguir.

O campo de deslocamentos pode ser expresso na forma

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \begin{array}{cc} \dfrac{\sin kx}{k} & \dfrac{\sin k(l-x)}{k} \end{array} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \end{array} \right\} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \tag{4-9}$$

em função de dois parâmetros de forças, numa formulação híbrida de elementos finitos, conforme os sistemas de coordenadas da figura (4.1). Nota-se que o resultado será o mesmo se usarmos $u_2^* = \cos kx$ na equação (4-9), assim como não se usar a divisão pela constante k.

Conseqüentemente, obtém-se para as tensões normais:

$$\sigma^* = E \frac{du}{dx} = \frac{1}{A} \left\langle \begin{array}{cc} \cos kx & -\cos k(l-x) \end{array} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \end{array} \right\} \equiv \sigma^* \mathbf{p}^* \tag{4-10}$$

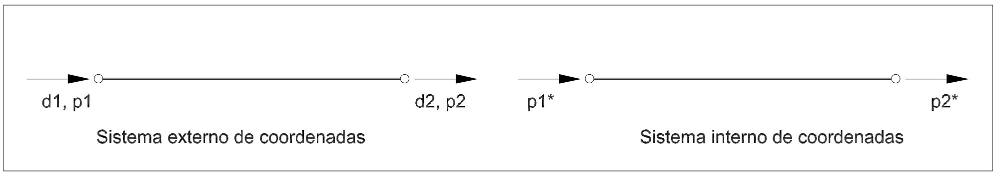


Figura 4.1: Sistemas de coordenadas para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça de uma formulação híbrida

Por outro lado, pode-se descrever para os deslocamentos nas extremidades do elemento, definidas como contornos Γ_1 e Γ_2:

$$u = \left\langle \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \text{ em } \Gamma_1 \quad u = \left\langle \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \text{ em } \Gamma_2 \tag{4-11}$$

A matriz $\mathbf{H}$ de transformação cinemática entre os sistemas $\mathbf{d}$ e $\mathbf{p}^*$ se expressa:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \int_\Gamma \sigma^{*\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -\cos kl \end{array}\right\}(-1)\left\langle \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array}\right\rangle + \left\{\begin{array}{c} \cos kl \\ -1 \end{array}\right\}\left\langle \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array}\right\rangle \\ &= \left[\begin{array}{cc} -1 & \cos kl \\ \cos kl & -1 \end{array}\right] \qquad (4\text{-}12)\end{aligned}$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno $\mathbf{p}^*$ se expressa

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int_\Gamma \sigma^{*\mathrm{T}}\mathbf{u}^*\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma \\ &= \frac{1}{EA}\left[\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -\cos kl \end{array}\right\}(-1)\left\langle \begin{array}{cc} 0 & \dfrac{\sin kl}{k} \end{array}\right\rangle + \left\{\begin{array}{c} \cos kl \\ -1 \end{array}\right\}\left\langle \begin{array}{cc} \dfrac{\sin kl}{k} & 0 \end{array}\right\rangle\right] \\ &= \frac{\sin kl}{kEA}\left[\begin{array}{cc} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{array}\right] \qquad (4\text{-}13)\end{aligned}$$

com a correspondente inversa

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\sin kl}{kEA}\left[\begin{array}{cc} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{array}\right] \qquad (4\text{-}14)$$

Finalmente, obtém-se para a matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} = \frac{kEA}{\sin kl}\left[\begin{array}{cc} \cos kl & -1 \\ -1 & \cos kl \end{array}\right] \quad \text{onde } k^2 = \frac{\rho}{E}\left(\omega^2 + 2i\zeta\omega\right) \qquad (4\text{-}15)$$

pode-se verificar que

$$\lim_{k\to 0}\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \qquad (4\text{-}16)$$

4.2 Elemento de viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento

Seja um elemento de viga de Timoshenko de comprimento L e área de seção transversal A, sob uma base elástica e com amortecimento viscoso. Para este elemento consideram-se tanto a deformação por cisalhamento quanto a inércia de rotação.

4.2.1 Formulação do problema

Devido à deformação por cisalhamento, a rotação $\psi(x,t)$ de uma seção transversal, sobre a qual o momento fletor realiza trabalho:

$$M = EI\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \tag{4-17}$$

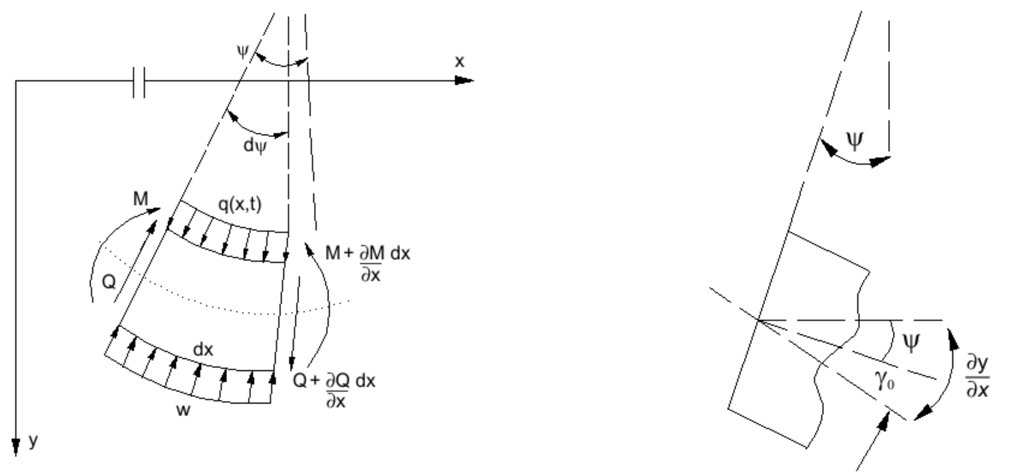
e a derivada da elástica $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ diferem entre si de uma parcela $\gamma_0(x,t)$:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \tag{4-18}$$

devido a deformação causada pelo esforço cortante:

$$Q = GA\kappa\gamma_0 \tag{4-19}$$

onde κ é um fator de forma que leva em conta como a seção se deforma sob cisalhamanto. A equação (4-18) expressa a compatibilidade de deformações de uma seção de viga, para momento fletor M e esforço cortante Q obtidos segundo as equações constitutivas (4-17) e (4-19).



4.2(a): Equilíbrio de um elemento infinitesimal de viga de Timoshenko

4.2(b): Detalhes da adição cinemática devido as deformações por esforço cortante

Figura 4.2: Elemento infinitesimal de viga submetido a uma carga distribuída e apoiado em base base elástica

Um elemento infinitesimal da viga, figura (4.2), está em equilíbrio segundo as equações:

$$\sum F_y = 0 \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + q - m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m\frac{\partial y}{\partial t} - wy = 0 \tag{4-20}$$

$$\sum M = 0 \Longrightarrow Q - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{mI}{A}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{4-21}$$

Considerando o carregamento transversal $q = 0$, tem-se das equações (4-17) a (4-21):

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m\frac{\partial y}{\partial t} - wy = 0 \tag{4-22}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)+EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{mI}{A}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{4-23}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y^*(x)e^{-i\omega t} \\ \psi(x,t) &= \psi^*(x)e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{4-24}$$

têm-se as equações (4-22) e (4-23) na forma transformada:

$$GA\kappa\left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)+\left(m\omega^2+2i\omega\zeta m-w\right)y^*=0 \tag{4-25}$$

$$GA\kappa\left(\frac{\partial y^*}{\partial x}-\psi^*\right)+EI\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+\frac{mI}{A}\omega^2\psi^*=0 \tag{4-26}$$

Nestas equações, E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é módulo de elasticidade transversal , I é o momento de inércia, m é a densidade específica, $\mu = 2\zeta m$ é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento, κ é o fator de forma para a deformação de uma seção por esforço cortante e w é a constante de rigidez da reação da fundação, definida por unidade de comprimento e proporcional ao deslocamento (constante de Winkler).

Eliminando-se $\psi^*(x)$ nas equações (4-25) e (4-26) tem-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4}+T\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}-k^4y^*(x)=0 \tag{4-27}$$

onde

$$k^4=\frac{m}{EI}\left(\omega^2+2i\zeta\omega-\frac{w}{m}-\frac{I}{GA\kappa}\left(m\omega^4+2i\zeta m\omega^3+w\omega^2\right)\right) \tag{4-28}$$

$$T=\frac{m}{EI}\left[\left(1+\frac{E}{G\kappa}\right)\frac{I}{A}\omega^2+\frac{EI}{mGA\kappa}\left(2i\zeta m\omega-w\right)\right] \tag{4-29}$$

A solução da equação (4-27) é expressa convenientemente na forma

$$\begin{aligned} y^*(x) &= C_1\frac{\sin k_1x+\sinh k_2x}{k}+C_2\frac{\sin k_1x-\sinh k_2x}{k^3} \\ &+C_3\cos k_1x+\cosh k_2x+C_4\frac{\cos k_1x-\cosh k_2x}{k^2} \end{aligned} \tag{4-30}$$

onde

$$k_1=\sqrt{\sqrt{k^4+\frac{T^2}{4}}+\frac{T}{2}},\qquad k_2=\sqrt{\sqrt{k^4+\frac{T^2}{4}}-\frac{T}{2}} \tag{4-31}$$

Analogamente, obtém-se da equação (4-25) a expressão de $\psi^*(x)$:

$$\psi^*(x) = C_1\frac{K_2\cos k_1x + K_1\cosh k_2x}{k} + C_2\frac{K_2\cos k_1x - K_1\cosh k_2x}{k^3}$$
$$+ C_3\left(-K_2\sin k_1x + K_1\sinh k_2x\right) + C_4\frac{-K_2\sin k_1x - K_1\sinh k_2x}{k^2} \tag{4-32}$$

onde

$$K_1 = \frac{k_1^2 - \dfrac{m\omega^2}{EA}}{k_2}, \qquad K_2 = \frac{k_2^2 + \dfrac{m\omega^2}{EA}}{k_1} \tag{4-33}$$

As expressões de $y^*(x)$ e $\psi^*(x)$ foram obtidas de tal modo que

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ \omega\to 0}} y^*(x) = 2C_3 + 2C_1x - C_4x^2 - C_2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{EIx}{2GA\kappa}\right) \tag{4-34}$$

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ \omega\to 0}} \psi^*(x) = 2C_1 - 2C_4x - C_2\left(x^2 + \frac{3EI}{2GA\kappa}\right) \tag{4-35}$$

4.2.2 Obtenção da matriz de rigidez

O campo de deslocamentos transversais $y^*(x)$ é expresso por

$$y^* = \left\langle\, y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^* \quad y_4^* \,\right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \mathbf{y}^*\mathbf{p}^* \tag{4-36}$$

onde

$$y_1^* = \frac{\sin k_1x + \sinh k_2x}{k}, \qquad y_2^* = \frac{\sin k_1x - \sinh k_2x}{k^3} \tag{4-37}$$
$$y_3^* = \cos k_1x + \cosh k_2x, \qquad y_4^* = \frac{\cos k_1x - \cosh k_2x}{k^2}$$

As rotações $\psi^*(x)$ são expressas por

$$\psi^* = \left\langle\, \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^* \,\right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \psi^*\mathbf{p}^*$$

onde

$$\psi_1^* = \frac{K_2\cos k_1x + K_1\cosh k_2x}{k}, \quad \psi_2^* = \frac{K_2\cos k_1x - K_1\cosh k_2x}{k^3}$$
$$\psi_3^* = -K_2\sin k_1x + K_1\sinh k_2x, \quad \psi_4^* = \frac{-K_2\sin k_1x - K_1\sinh k_2x}{k^2} \tag{4-38}$$

p_1^*, p_2^*, p_3^* e p_4^* são quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Os parâmetros $\mathbf{p}^*$ não têm sentido físico definido, embora se pudesse fazer alguma atribuição a partir dos limites das equações (4-34) e (4-35).

Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\left\{ \begin{array}{c} y^* \\ \psi^* \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \\ \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{array} \right\} \equiv \mathbf{u}^*\mathbf{p}^* \tag{4-39}$$

Conseqüentemente, obtêm-se os esforços seccionais, segundos as equações (4-17) a (4-19):

$$\left\{ \begin{array}{c} Q^* \\ M^* \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}^*\mathbf{p}^* \tag{4-40}$$

onde

$$\mathbf{N}^* = EI \begin{bmatrix} \frac{d^2\psi_1^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_1^* & \frac{d^2\psi_2^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_2^* & \frac{d^2\psi_3^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_3^* & \frac{d^2\psi_4^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA}\psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \tag{4-41}$$

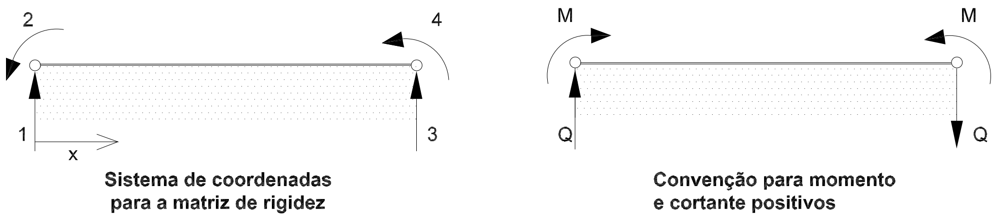


Figura 4.3: Sistemas de coordenadas e convenção de esforços para a viga.

Por outro lado, usando a primeira das figuras (4.3) para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, pode-se descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos Γ_1 e Γ_2, assim como para as matrizes $\mathbf{\Lambda}$ com os co-senos diretores:

$$\left\{ \begin{array}{c} y^* \\ \psi^* \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}_1\mathbf{d} \qquad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \tag{4-42}$$

$$\left\{\begin{array}{c} y^* \\ \psi^* \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{array}\right\} \equiv \mathbf{N}_2\mathbf{d} \qquad \mathbf{\Lambda}_2 = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \text{ em } \Gamma_2 \tag{4-43}$$

A matriz $\mathbf{H}$ de transformação cinemática entre os sistemas $\mathbf{d}$ e $\mathbf{p}^*$ se expressa

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=0}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=l}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{N}_2 \tag{4-44}$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno $\mathbf{p}^*$ se espressa

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=0}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{u}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=l}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{u}^{*\mathrm{T}}\Big|_{x=l} \tag{4-45}$$

Após a avaliação da inversa $\mathbf{F}^{-1}$, obtém-se a matriz de rigidez do elemento através da seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} \tag{4-46}$$

Alternativamente, (Dumont-2003), podemos obter a matriz de rigidez utilizando a matriz $\mathbf{U}^*$, de acordo com a segunda das equações (3-17).

Apesar da grande quantidade de termos, podemos representar a matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko de forma fechada, em função dos parâmetros definidos nas equações (4-28) e (4-29) e escrevendo, por simplicidade, $C = \cosh kx$, $c = \cos kx$, $S = \sinh kx$ e $s = \sin kx$. Considerando-se a simetria escrevemos

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \ddots & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \ddots & \ddots & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{K}_{44} \end{array}\right] \tag{4-47}$$

em função dos termos cujas expressões são

$$\mathbf{K}_{11} = -\frac{EIK_1K_2(cK_1S + CK_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-48}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{EIK_2K_1((-K_1k_2 + K_2k_1)(-1 + cC) + (-k_2K_2 - k_1K_1)sS)}{2K_2K_1(-1 + cC) + (K_2^2 - K_1^2)sS} \tag{4-49}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \frac{EIK_1K_2(K_1S + K_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-50}$$

$$\mathbf{K}_{14} = -\frac{EIK_1K_2(C - c)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-51}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \frac{EI(-sK_1C + K_2cS)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-52}$$

$$\mathbf{K}_{23} = \frac{EIK_1K_2(C - c)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-53}$$

$$\mathbf{K}_{24} = -\frac{EI(K_2S - sK_1)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-54}$$

$$\mathbf{K}_{33} = -\frac{EIK_1K_2(cK_1S + CK_2s)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-55}$$

$$\mathbf{K}_{34} = -\frac{EIK_1K_2((-K_1k_2 + K_2k_1)(-1 + cC) + (-k_2K_2 - k_1K_1)sS)}{2K_2K_1(-1 + cC) + (K_2^2 - K_1^2)sS} \tag{4-56}$$

$$\mathbf{K}_{44} = \frac{EI(-sK_1C + K_2cS)(K_1k_2 + K_2k_1)}{2K_2K_1Cc + (K_2^2 - K_1^2)sS - 2K_2K_1} \tag{4-57}$$

4.3 Exemplo para o elemento de treliça

Na figura (4.4) temos uma barra elástica com extremidades apoiada e livre representada por 5 elementos de treliça e submetida a uma carga constante P na extremidade livre. As propriedades mecânicas, em unidades coerentes (Dumont-2005), são apresentadas na tabela (4.1).

A	L	E	ρ	ζ
1	1	1000	1	5

Tabela 4.1: Propriedades físicas e geométricas para os elementos de treliça.

Figura 4.4: Barra com extremidades apoiada e livre submetida a uma força P constante ($t \geq 0$) discretizada em 5 elementos de treliça.

Para uma carga constante aplicada, com correspondente deslocamento independente do tempo $u(x) = \mathrm{P}x/EA$, a solução transiente é obtida utilizando a equação (3-33) e impondo a condição inicial de deslocamentos $u(x, t = 0)$=$-Px/EA$. Na figura (4.5), observamos que os resultados obtidos utilizando $n = 4$ (expansão em série de freqüência com termos acima de ω^8) são mais próximos aos valores analíticos, comparados com a abordagem clássica, que usa somente dois termos na expansão (ω e ω^2) para problemas com amortecimento.

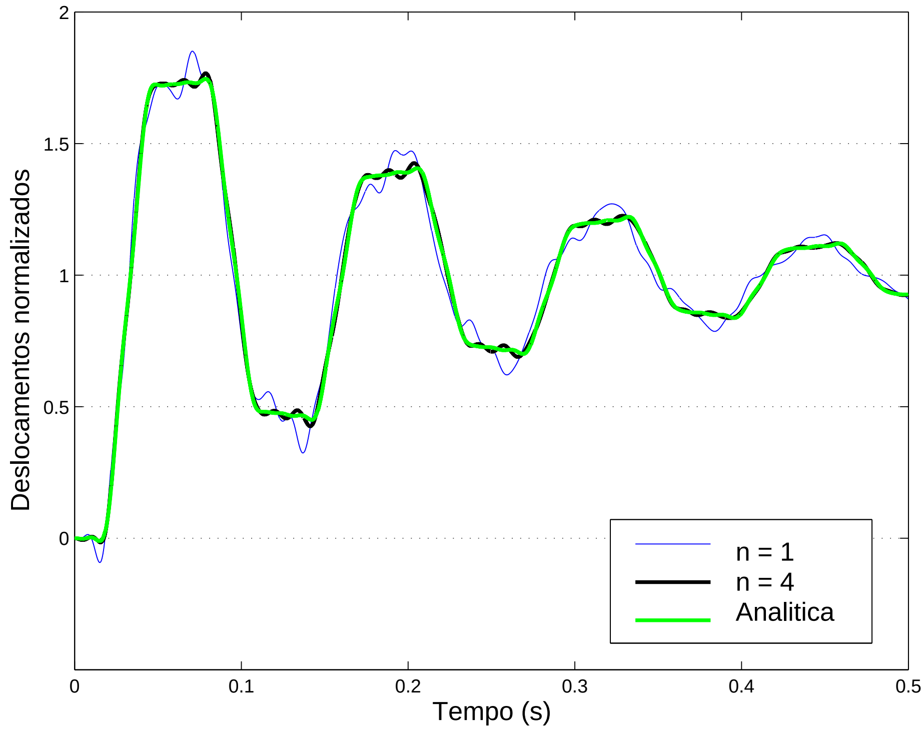


Figura 4.5: Resposta transiente do deslocamento no segundo nó ($x = 0.4L$) para $n = 1$ (teoria clássica) e $n = 4$ (expansão usando termos de ordem ω^8), comparadas com a solução analítica.

4.4 Exemplo para o elemento de viga

Vamos considerar uma viga biapoiada, figura (4.6), com propriedades conhecidas, submetida a uma carga retangular de $P(t) = 1000kN$ em $\frac{L}{2}$.

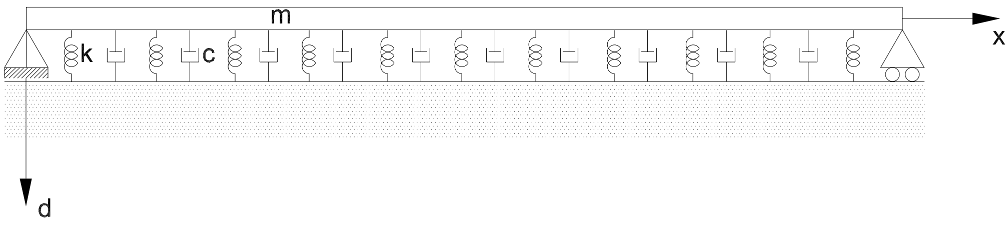
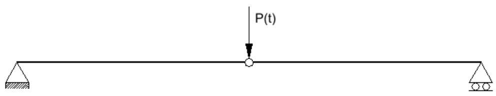


Figura 4.6: Viga biapoiada sob base elástica com amortecimento.

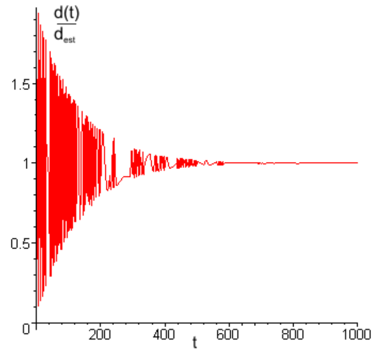
Utilizando o elemento de viga desenvolvido nas seções anteriores, iremos discretizar a viga da figura(4.6) utilizando 2, 4 e 6 elementos, respectivamente. As propriedades adotadas são listadas na tabela (4.2).

A (m^2)	I (m^4)	L (m)	κ	E (N/m^2)	m (kg/m)	$\zeta(1/s)$	w (N/m^2)
0,09	0,0027	2,00	$\frac{5}{6}$	$2,1.10^{10}$	60,25	0,49	$1,1.10^{8}$

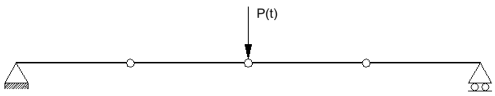
Tabela 4.2: Propriedades físicas e geométricas para a viga.



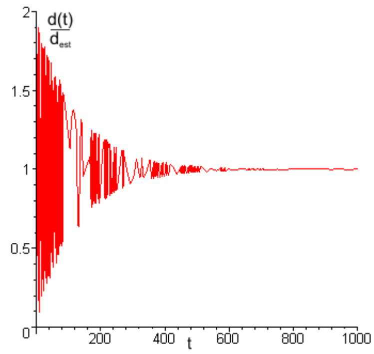
4.7(a): Discretização utilizando 2 elementos



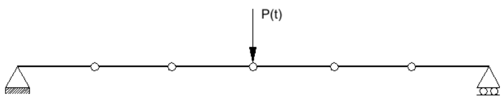
4.7(b): Amplificações para n=2



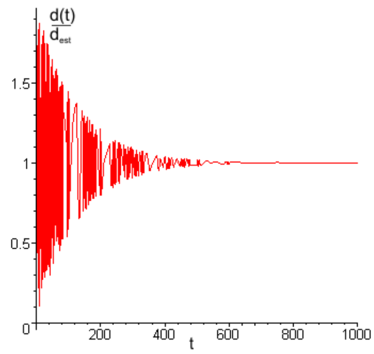
4.7(c): Discretização utilizando 4 elementos



4.7(d): Amplificações para n=2



4.7(e): Discretização utilizando 6 elementos



4.7(f): Amplificações para n=2

Figura 4.7: Respostas para as amplificações da viga no nó central

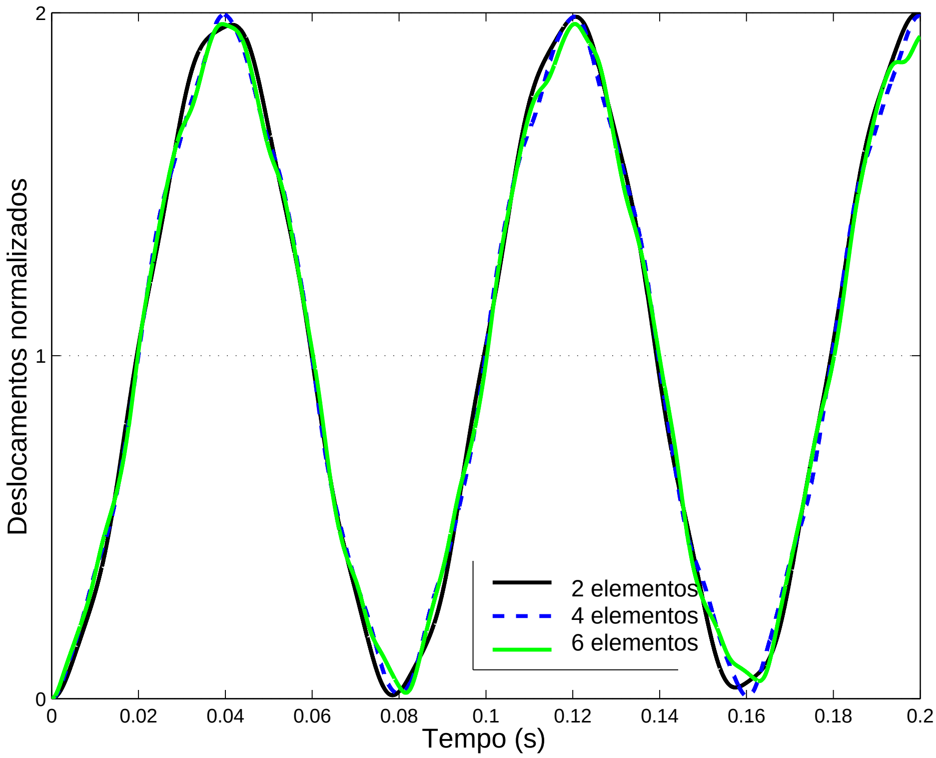


Figura 4.8: Comparação dos resultados em um pequeno intervalo de tempo e n=2.

A resposta transiente da viga é mostrada na figura (4.7b), (4.7d) e (4.7f). As amplitudes dos deslocamentos foram normalizadas em relação ao deslocamento estático em cada um dos casos.

Na figura (4.8) observa-se que houve uma boa correspondência dos resultados nos três modelos de discretização, para um mesmo número de matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizadas na expansão. Nas figuras (4.7) observamos que as amplitudes diminuem exponencialmente ao longo do tempo de acordo com a taxa de amortecimento ζ e os deslocamentos tendem ao valor estático.