3
Elementos Finitos Híbridos

Neste capítulo é mostrada resumidamente a formulação híbrida de elementos finitos dinâmicos que será utilizada no desenvolvimento dos elementos de treliça e viga. São mostradas as equações matriciais de equilíbrio, de acordo com a formulação simplificada de elementos de contorno. Por fim é apresentada uma metodologia que faz uma análise no domínio do tempo a partir de uma formulação no domínio da freqüência onde as matrizes são dadas na forma de séries em função de uma freqüência circular de vibração.

3.1
Formulação do Problema

O efeito do tempo na abordagem abaixo surge devido a inércia do corpo elástico. Assim, tenta-se encontrar um campo de deslocamentos u_i (Dumont-2006-2), correspondente às tensões σ_{ij}, que satisfaça a equação de equilíbrio dinâmico

$$\sigma(x,y,z,t)_{ij,j} + b(x,y,z,t)_i - \rho\ddot{u}(x,y,z,t)_i - \mu\dot{u}(x,y,z,t)_i = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad (3\text{-}1)$$

para uma massa específica ρ, coeficiente de amortecimento $\mu = 2\zeta\rho$ e forças de massa b_i que são funções do espaço e do tempo. Os índices i e j podem assumir os valores 1, 2 e 3, para o caso de problemas tridimensionais. O índice após a vírgula indica uma derivada na direção considerada e o ponto indica derivada em relação ao tempo. Índices repetidos indicam um somatório de termos, em geral para problemas tridimensionais.

Na equação (3-1) o domínio Ω pode ser uma estrutura ou parte dela, isto é, uma subestrutura ou um elemento finito. O campo de deslocamentos deve satisfazer as condições de contorno

$$u(x,y,z,t)_i = \bar{u}(x,y,z,t)_i \ \text{ em } \ \Gamma_u, \quad (3\text{-}2)$$

onde $\bar{u}(x,y,z,t)_i$ são os deslocamentos prescritos no contorno Γ_u. O campo de tensões $\sigma(x,y,z,t)_{ij}$ também deve estar em equilíbrio com as forças de tração $\bar{t}(x,y,z,t)_i$ prescritas no contorno Γ_σ. Assim,

$$\sigma(x,y,z,t)_{ij}\eta_j = \bar{t}(x,y,z,t)_i \ \text{ em } \ \Gamma_\sigma. \quad (3\text{-}3)$$

onde η_j são os co-senos diretores de Γ em Ω. Além disso, os deslocamentos e velocidades iniciais devem ser conhecidos no instante inicial $t = 0$:

$$u(x, y, z, t = 0)_i = \bar{u}(x, y, z, t = 0)_i, \quad \dot{u}(x, y, z, t = 0)_i = \bar{v}(x, y, z, t = 0)_i \text{ em } \Omega \tag{3-4}$$

Deve-se mencionar que uma solução que satisfaça exatamente todas as condições acima é possível em certos casos particulares.

3.2 Formulação no domínio da freqüência

Uma solução aproximada do problema proposto na seção anterior pode ser obtida investigando a resposta harmônica para ações dinâmicas variando no tempo de acordo com a função exponencial $e^{-i\omega t}$, onde ω é a freqüência circular de vibração. Então, pode-se escrever os deslocamentos,

$$u(x, y, z, t)_i = \bar{u}(x, y, z, \omega)_i \, e^{-i\omega t} \tag{3-5}$$

ou por simplicidade de notação,

$$u(x, y, z, t)_i = u \, e^{-i\omega t} \tag{3-6}$$

onde a dependência de (x, y, z, ω) é implicitamente assumida.

Essa separação de variáveis e a notação simplificada também se aplicam para as tensões como também para as ações externas. Assim as equações (3-1) e (A-2) tornam-se

$$\sigma_{ji,j} + b_i + \rho k^2 u_i = 0 \quad \text{em} \;\; \Omega \tag{3-7}$$

$$u_i = \bar{u}_i \;\; \text{ao longo}\, \Gamma_u, \quad \sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \;\; \text{ao longo}\, \Gamma_\sigma \tag{3-8}$$

onde para uma dada freqüência circular ω,

$$k^2 = \omega^2 + 2i\zeta\omega \tag{3-9}$$

As condições iniciais da equação (3-4) serão utilizadas mais tarde, logo após a transformação da solução do problema para o domínio do tempo em termos de superposição modal, como será visto na seção (3.6).

As ações transformadas $b_i \equiv b(x, y, z, \omega)_i$ e $\bar{t}_i \equiv \bar{t}(x, y, z, \omega)_i$ aparecem formalmente nos desenvolvimentos no domínio da freqüência e não há a necessidade de calcula-las.

Na presente formulação híbrida, assume-se um campo de deslocamentos discreto na forma

$$\bar{u}_i = u_{ir} d_r \quad \text{ao longo} \;\; \Gamma \tag{3-10}$$

em termos dos deslocamentos nodais $d_r \equiv d(\omega)_r$ no contorno do elemento e funções de interpolação,

$$u_{ir} = u(x, y, z)_{ir} \tag{3-11}$$

desde que $d_r = \bar{d}_r$ nos correspondentes pontos nodais r para deslocamentos prescritos $\bar{u}_i$ ao longo de Γ_u.

Assume-se também um campo de deslocamento diferente,

$$u_i^f = u_i^\star + u_i^b \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3-12}$$

para um domínio inteiro, de tal modo que o equilíbrio da equação (3-7) é identicamente satisfeito. Dessa forma se pode definir uma solução particular u_i^b tal que o campo de tensões correspondente σ_{ij}^b satisfaça a equação

$$\sigma_{ji,j}^b + b_i + \rho k^2 u_i^b = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3-13}$$

e também uma solução homogênea para o campo de tensões $\sigma_{ij}^\star$ tal que

$$\sigma_{ji,j}^\star + b_i + \rho k^2 u_i^\star = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3-14}$$

Isso caracteriza uma solução fundamental,

$$u_i^\star = u_{is}^\star p_{s,}^\star \qquad \sigma_{ij}^\star = \sigma_{ijs}^\star p_s^\star \tag{3-15}$$

para ser obtida em termos de algum parâmetro nodal de forças $p_s^\star$ dependente da freqüência, onde o subscrito s se refere a cada um dos graus de liberdade do modelo discreto.

3.3
Equações matriciais de equilíbrio

O método híbrido de elementos de contorno, introduzido por (Dumont-1987) como uma generalização dos conceitos desenvolvidos por Pian no método dos elementos finitos, só exige avaliação de integrais ao longo do contorno, desde que se usem soluções fundamentais como funções de interpolação no domínio.

O método trata de um domínio arbitrário na forma de um único macro elemento finito com tantos graus de liberdade como se requer em termos de precisão numérica. O método tem sido aplicado com sucesso em uma variedade de problemas de potencial e elasticidade, incluindo problemas dependentes do tempo, e da mecânica de fratura . Numa abordagem mais simplificada deste método desenvolvida mais recentemente (Chaves-2003), abdica-se do modelo original completo e consistente para chegar a uma formulação computacional mais rápida que a anterior. A formulação simplificada tem como resultado o par de equações matriciais

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{\star}\mathbf{p}^{\star} &= \mathbf{d} - \mathbf{d}^{b} \\ \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}^{\star} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}^{b}\end{aligned} \tag{3-16}$$

onde $\mathbf{d} \equiv d_r$ é o vetor de deslocamentos nodais introduzido na equação (3-10), $\mathbf{d}^b \equiv d_r^b$ é o vetor nodal de deslocamentos da solução particular u_i^b da equação (3-12) e (3-13), e $\mathbf{U}^{\star}$ é a matriz de deslocamentos, onde os coeficientes $U_{sr}^{\star}$ que pertencem a ela são os valores da solução fundamental $u_i^{\star}$, equação (4-39), obtidas nos pontos nodais r para um parâmetro de força $p_s^{\star}$. A matriz de equilibrio $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ e os vetores de forças nodais equivalente para tração e forças no domínio, $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}^b$, são dados em termos das integrais:

$$\left[\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{p} \quad \mathbf{p}^{b}\right] \equiv \int_{\Gamma} \{u_{ir}\} < \sigma_{jis}^{\star}\eta_j \quad \bar{t}_i \quad \sigma_{ji}^{b}\eta_j > \mathrm{d}\Gamma \tag{3-17}$$

Eliminado $\mathbf{p}^{\star}$ na equação (3-16), obtemos a equação da matriz de rigidez

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{b}\right) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^{b}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{U}^{\star}\right)^{-1} \tag{3-18}$$

Pode-se demonstrar que a matriz de rigidez dada na equação acima, é simétrica se (e somente se) a função de interpolação $u_{ir}^{\star}$ introduzida na equação (3-10) pode representar analiticamente no contorno as expressões de $u_{is}^{\star}$ introduzidas na equação (4-39) para deslocamentos no domínio (Dumont-2003). Para o caso de elementos de treliça e viga, o contorno coincide com os pontos nodais (Prazeres-2005, Dumont-2006-2).

De acordo com a seção (3.1) a relação de rigidez vinda da equação (3-18) pode se referir ao domínio ou a uma parte dele, ou seja, um elemento finito. Então, todo o domínio pode ser composto com elementos finitos, desde que haja compatibilidade de deslocamentos entre esses elementos, como na equação (3-10) e como requer o método dos elementos finitos (que é conceitualmente o caso).

A seguir, no desenvolvimento das matrizes de rigidez, massa e amortecimento, não fica explícito se o desenvolvimento refere-se a um elemento único ou a um conjunto de elementos. Porém, o contexto sempre dirá qual é o caso.

3.4 Expansão das matrizes na forma de séries de freqüência

As equações desenvolvidas anteriormente foram definidas como funções de uma dada freqüência circular ω. Porém, ao invés de formularmos o problema para uma dada freqüência, pode-se expressar as soluções fundamentais como uma série de potência de freqüências. Assim, as matrizes $\mathbf{F}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{U}^{*}$, podem ser definidas como séries de freqüência para um número n arbitrário de termos, na seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{H} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{H}_j, \quad \mathbf{U}^* = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{U}_j^* \qquad (3\text{-}19)$$

assim como a matriz de rigidez $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{K}_j \equiv \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^{n} \left(i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j \right) \qquad (3\text{-}20)$$

onde $\mathbf{K}_0$ é a matriz de rigidez estática. As matrizes $\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}$, que surgem da expansão de $\mathbf{K}$, representam, respectivamente, matrizes de amortecimento e massa. A matriz $\mathbf{M}_1$, que tem como coeficiente ω^2, representa a matriz de massa da formulação clássica, cujos termos estão exclusivamente ligados à massa. As demais matrizes $\mathbf{M}$ são denominadas aqui de matrizes de massa generalizada e seus termos representam uma mescla de massa e rigidez.

A obtenção da matriz $\mathbf{K}$ como um série de freqüência requer a inversão da matriz $\mathbf{F}$, que também é dada por uma expansão em série de ω, segundo a equação (3-19), (Dumont-2006-1). Segundo (Dumont-2003), para um vetor de forças $\mathbf{p}(t)$ dependente do tempo atuando na viga, podemos modelar seu comportamento como

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^{n} \left(i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j \right) \right) \left(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b \right) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t)^b \qquad (3\text{-}21)$$

onde os vetores de deslocamentos $\mathbf{d}$ são as incógnitas do problema, a serem determinadas para forças, velocidades e deslocamentos iniciais.

Para n assumindo o valor de 2, por exemplo, a expressão resulta em

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{K}_0 - \omega_j \mathbf{C}_1 - \omega_j^2 \mathbf{M}_1 - \omega_j^3 \mathbf{C}_2 - \omega_j^4 \mathbf{M}_2 \right) \left(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b \right) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \qquad (3\text{-}22)$$

Alguns autores, como (Przemieniecki-1968), escrevem a matriz $\mathbf{K}$ da equação (3-20), sem amortecimento, na forma,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0 - \omega^4 \left(\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_4 \right) + O(\omega^6) \qquad (3\text{-}23)$$

A formulação clássica, utilizada em livros de dinâmica, é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_0 - O(\omega^4) \qquad (3\text{-}24)$$

correspondendo a uma expansão com n igual a 1 termo.

A vantagem da formulação baseada em séries de freqüência em relação à formulação clássica é que ela proporciona uma melhor satisfação da equação diferencial de equilíbrio dinâmico.

3.5 O Problema de Autovalor não-linear

O problema de autovalor não-linear associado à equação (3-21), tem a forma

$$\mathbf{K}_0\mathbf{\Phi} - \sum_{j=1}^{n}\left(i\mathbf{C}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j-1} + \mathbf{M}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j}\right) = \mathbf{0}, \tag{3-25}$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores ω, e $\mathbf{\Phi}$ é uma matriz cujas colunas são os autovetores. Essas grandezas representam, respectivamente, as freqüências e modos de vibração. Este problema não-linear de autovalor tem difícil tratamento, visto que a convergência numérica não é facilmente assegurada e erros de arredondamento podem ocorrer.

A solução do problema de autovalor é dada por (Dumont-2006), que generalizou a solução para o caso de problemas com amortecimento, com $\mathbf{\Phi}$ satisfazendo as seguintes condições de ortogonalidade:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=2}^{2j}\mathbf{\Omega}^{k-2}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}i\mathbf{C}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j-k} + \sum_{k=1}^{2j}\mathbf{\Omega}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j-k}\right) = \mathbf{I} \tag{3-26}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_0\mathbf{\Phi} + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{2j-2}\mathbf{\Omega}^{k}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}i\mathbf{C}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j-k-1} + \sum_{k=1}^{2j-1}\mathbf{\Omega}^{k}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_j\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^{2j-k}\right) = \mathbf{\Omega} \tag{3-27}$$

Deve-se comentar que a solução do problema que inclui ou não o amortecimento tem a mesma forma de tratamento no que diz respeito a álgebra linear. A diferença entre eles está nos próprios autovalores e autovetores, que são todos reais para o caso sem amortecimento e complexos quando se considera o amortecimento viscoso.

3.6 Resposta transiente do sistema

Alternativamente, pode-se escrever a equação (3-21) na forma

$$\left(\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left(\mathbf{C}_j\frac{\partial^{2j-1}}{\partial t^{2j-1}} + \mathbf{M}_j\frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}}\right)\right)\left(\mathbf{d}-\mathbf{d}^b\right) = \left(\mathbf{p}-\mathbf{p}^b\right) \tag{3-28}$$

que corresponde a um sistema acoplado de equações diferencias de alta ordem de tempo que faz uso das matrizes obtidas na formulação dependente da freqüência (Dumont-2001, Dumont-2003, Dumont-2005).

Vamos introduzir um vetor auxiliar de deslocamentos $\mathbf{d}_j$, tal que

$$\mathbf{d}_j = (i)^j\frac{\partial^j\mathbf{d}(t)}{\partial t^j}, \qquad j = 1\cdots 2n. \tag{3-29}$$

Aplicando esse vetor à equação (3-28), pode-se reescrevê-la como

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & M_n \\
\mathbf{0} & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & M_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\
\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1^b \\
\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2^b \\
\mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_3^b \\
\vdots \\
\mathbf{d}_{2n}
\end{Bmatrix}
$$

$$
- \omega
\begin{bmatrix}
i\mathbf{C}_1 & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_n \\
\mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\
i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \vdots & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
M_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}}^b \\
\dot{\mathbf{d}}_1 - \dot{\mathbf{d}}_1{}^b \\
\dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_2{}^b \\
\dot{\mathbf{d}}_3 - \dot{\mathbf{d}}_3{}^b \\
\vdots \\
\dot{\mathbf{d}}_{2n} - \dot{\mathbf{d}}_{2n}{}^b
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\vdots \\
\mathbf{0}
\end{Bmatrix}
\tag{3-30}
$$

Utilizando conceitos de superposição modal, pode-se aproximar os deslocamentos dependentes do tempo pela soma finita de parcelas dadas pelo produto entre os autovetores normalizados $\mathbf{\Phi}$, equação (3-26), com os vetores de amplitudes $\eta(t)$, que passam a ser as incógnitas do problema.

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Phi}\eta \tag{3-31}$$

Aplicando essa expressão à equação (3-30) obtemos

$$\mathbf{\Omega}\left(\eta - \eta^b\right) - i\left(\dot{\eta} - \dot{\eta^b}\right) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b\right) \tag{3-32}$$

que corresponde a um sistema desacoplado de equações de primeira ordem, que pode ser resolvido pelos métodos tradicionais de integração.

Para o caso particular de estruturas com amortecimento, os deslocamentos expressos em (3-33) assumem a forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Phi}\eta + \bar{\mathbf{\Phi}}\bar{\eta} \tag{3-33}$$

sendo $\mathbf{d}$ o vetor de deslocamentos nodais $\mathbf{\Phi}$ os autovetores e $\bar{\mathbf{\Phi}}$ os seus conjugados complexos. A coordenada modal η é a solução da equação (3-32) e representa o vetor temporal de amplitudes; $\bar{\eta}$ é seu respectivo conjugado complexo.

3.7 Condensação dinâmica

No capítulo (5) serão mostrados os modelos de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea. Esses modelos são obtidos através de modificações nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento dadas pela condensação de alguns graus de liberdades no dormente. Nesta seção é mostrado o procedimento utilizado na inversão e condensação dessas matrizes.

No domínio da freqüência a equação matricial de equilíbrio pode ser escrita,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(ii)} & \mathbf{K}_{(ie)} \\ \mathbf{K}_{(ei)} & \mathbf{K}_{(ee)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_{(i)} - \mathbf{d}^b_{(i)} \\ \mathbf{d}_{(e)} - \mathbf{d}^b_{(e)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_{(i)} - \mathbf{p}^b_{(i)} \\ \mathbf{p}_{(e)} - \mathbf{p}^b_{(e)} \end{array} \right\} \tag{3-34}$$

onde os subscritos i e e dentro dos parênteses são os graus de liberdade internos e externos da estrutura discreta. Então é possível se expressar os deslocamentos nodais internos em função dos externos, obtendo assim um sistema matricial condensado.

$$\left[\mathbf{K}_{(ee)} - \mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}^{-1}_{(ii)}\mathbf{K}_{(ie)}\right]\left\{\mathbf{d}_{(e)}\right\} = \left\{\left(\mathbf{p}_{(e)} - \mathbf{p}^b_{(e)}\right) - \mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}^{-1}_{(ii)}\left(\mathbf{p}_{(i)} - \mathbf{p}^b_{(i)}\right)\right\} \tag{3-35}$$

Para um sistema em equilíbrio estático, esse tipo de procedimento é conhecido como condensação estática. Entretanto, as matrizes desenvolvidas nesse trabalho foram obtidas na forma de séries de potência de uma freqüência circular ω. Então a inversão de $\mathbf{K}_{(ii)}$ e dos produtos indicados na equação (3-35) devem ser interpretados na forma de séries de potência complexas, no caso geral de amortecimento viscoso. Nos desenvolvimentos seguintes, por motivo de conveniência, a matriz de rigidez efetiva $\mathbf{K}$ da equação (3-20) é expressa como

$$\mathbf{K} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{K}_j + O(\omega^{2n+1}), \qquad n \geq 0 \tag{3-36}$$

onde os termos $\mathbf{K}_{2j-1}$ e $\mathbf{K}_{2j}$ correspondem respectivamente às matrizes de amortecimento (C_j) e massa (M_j) dadas na equação (3-20), com mudanças alternadas de sinal. Então a inversa $\mathbf{K}^{-1}_{(ii)}$ de $\mathbf{K}_{ii}$, tal que

$$\mathbf{K}_{(ii)}\mathbf{K}^{-1}_{(ii)} = \mathbf{K}^{-1}_{(ii)}\mathbf{K}_{(ii)} = \mathbf{I} + O(\omega^{2n+1}) \tag{3-37}$$

é a série única

$$\mathbf{K}^{-1}_{(ii)} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \, \mathbf{K}^{-1}_{(ii)} j + O(\omega^{2n+1}) \tag{3-38}$$

com os coeficientes das matrizes expressos de maneira recursiva

$$\mathbf{K}^{-1}_{(ii)j} = -\mathbf{K}^{-1}_{(ii)0} \sum_{k=1}^{j} \mathbf{K}_{(ii)k}\mathbf{K}^{-1}_{(ii)j-k}, \qquad j = 0 \cdots 2n \tag{3-39}$$

Neste procedimento, somente é requerida a inversão direta de $\mathbf{K}_{(ii)0}$. Esse esquema falha quando $\mathbf{K}_{(ii)0}$ é uma matriz singular, pois não há meios de se obter uma inversa da matriz $\mathbf{K}_{(ii)0}^{-1}$ tal que $\mathbf{K}_{(ii)0}\mathbf{K}_{(ii)0}^{-1} = \mathbf{K}_{(ii)0}^{-1}\mathbf{K}_{(ii)0} = \mathbf{I}$, (Dumont-2006-1).

Além disso (Dumont-2006-2), não é possível reescrever a equação (3-36) como uma série de potência de ω^{-1}, desde que não só esta equação deva ser finita para $\omega \to 0$, mas também $\mathbf{K}_{(ii)2n}$ não possa ser o termo principal, já que é o coeficiente da matriz menos confiável em termos de precisão numérica e significado físico.

Coerentemente com isto, o produto $\mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}_{(ii)}^{-1}\mathbf{K}_{(ie)}$ da equação (3-35) é expresso como

$$\mathbf{K}_{(ei)}\mathbf{K}_{(ii)}^{-1}\mathbf{K}_{(ie)} = \sum_{j=0}^{2n} (-i\omega)^j \sum_{k=0}^{j} \mathbf{K}_{(ei)j-k} \sum_{l=0}^{k} \mathbf{K}_{(ii)l}^{-1}\mathbf{K}_{(ie)k-l} + O(\omega^{2n+1}) \quad (3\text{-}40)$$