



Adenilson Costa de Oliveira

**Um modelo de interação dinâmica entre os
elementos estruturais de uma via férrea**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Julho de 2006



Adenilson Costa de Oliveira

**Um modelo de interação dinâmica entre os
elementos estruturais de uma via férrea**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Webe João Mansur

Departamento de Engenharia Civil — Coppe-Rio

Prof. João Luís Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 17 de Julho de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Adenilson Costa de Oliveira

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Federal do Pará – UFPA em 2003. Iniciou o curso de Mestrado na PUC-Rio em 2004, atuando na linha de pesquisa de Métodos de elementos de contorno e dinâmica das estruturas.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Adenilson Costa de

Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea / Adenilson Costa de Oliveira; orientador: Ney Augusto Dumont. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2006.

v., 114 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Elementos de uma via férrea. 3. Análise modal avançada. 4. Elementos finitos híbridos. 5. Elementos finitos dinâmicos. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

À Deus

Sobretudo, a minha mãe, Suely Costa de Oliveira por todo amor com que me criou, registro aqui meu orgulho por ela.

Aos meus avós Oneide Costa de Oliveira e Arlindo Ferreira de Oliveira, pela orientação nas situações mais complicadas.

À minha Tia, Samira Costa de Oliveira, pelo grande apoio durante o mestrado.

Ao meu irmão, Blendo Costa de Oliveira, parceiro de todos os momentos de descontração e lazer.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, pela orientação e motivação.

Ao Professor Remo Magalhães de Sousa, pelo incentivo e exemplo.

Aos amigos de mestrados, em especial Klessis Dias, Ygor Netto, Renato Mendes, Jean Aguilera, Rafael Araújo, Plínio Glauber, Sílvio do Valle, pelos momentos de descontração e esporte.

Aos meus amigos de sala 609, André Muller, Christiano, Frederico, Diego, Igor e Thiago Pecin.

À agência CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Oliveira, Adenilson Costa de; Dumont, Ney Augusto. **Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em uma ferrovia, o veículo interage dinamicamente com a superestrutura (trilhos, palmilha e dormentes) e a subestrutura (lastro, sublastro e sub-base). O conforto dos passageiros, a vibração no solo e a frequência dos trabalhos, de manutenção tanto dos veículos como também dos trilhos são determinadas considerando-se que todos os elementos estruturais interagem entre si. A resposta de cada componente estrutural é sensível à pressão do eixo da roda no trilho, às irregularidades na superfície do trilho e à velocidade do trem, que está relacionada com a velocidade crítica na ferrovia (velocidade da fase mínima com que as ondas se propagam no trilho e no dormente). No projeto de uma nova ferrovia, como também na própria avaliação das condições de trabalho de ferrovias existentes, todos os aspectos brevemente mencionados acima têm que ser levados em conta em um modelo matemático. A interação trilho-palmilha-dormente-lastro é representada por um modelo unidimensional em que os trilhos são representados por vigas de Timoshenko, assim como os dormentes; o lastro é representado por uma fundação elástica com amortecimento viscoso. A interação local entre trilho e dormente é simulada utilizando um elemento de treliça com rigidez e amortecimento. As propriedades mecânicas de cada componente da ferrovia são na maioria dos casos desconhecidas, principalmente as propriedades do lastro. Para cada elemento, são desenvolvidas as equações de equilíbrio entre esforços e deslocamentos. As equações de equilíbrio global são dadas por um desenvolvimento em série das matrizes de massa, rigidez e amortecimento em função de uma frequência circular de vibração. O interesse final é a resposta transiente no domínio do tempo, obtida utilizando técnicas de superposição modal. Por fim, são propostos três modelos globais para a ferrovia, obtidos considerando algumas modificações no dormente.

Palavras-chave

Elementos de uma via férrea. Análise modal avançada. Elementos finitos híbridos. Elementos finitos dinâmicos.

Abstract

Oliveira, Adenilson Costa de; Dumont, Ney Augusto (advisor). **A dynamic Interaction model of track Railway Structural Elements**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. MsC Thesis — Department of Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In a railway, the vehicle interacts dynamically with a track superstructure (rails, rail pad and sleepers) and sub-structure (ballast, sub-ballast, sub-grade). Passengers' comfort, environmental loading (ground vibration) and frequency of maintenance works of vehicles as well as of the track are determined by the way all the structural elements interact. The response of each single structural component is sensitive to the wheel-axle pressure on the track, the effects of joint in un welded rails, the unevenness of wheel and rail, and the train speed as referred to the track critical velocity (minimum phase velocity of bending waves propagating in the track rails, supported by the ballast). An important issue is for example how the ballast will be affected when old, soft, timber sleepers and replaced by much, stiffer, prestressed concrete elements, and how newly introduced irregularities propagate along the track, among uncountable mathematical model possibilities, the presents a rail-pad-sleeper-ballast model mainly based on an assemble of Timoshenko beam elements (for the rail) including, in case of the sleepers, elastic foundation (for the ballast) and viscous damping. The local interaction of the rail-pad-sleeper set is simulated with a bar element that includes damping. The dissertation reports on the numerical model, which relies on exact, dynamic beam and truss elements derived on a variational basis for the frequency-domain analysis. The model enable the assessment of the vibration characteristics of a rail track, the inverse evaluation of several mechanical properties of the structural components and eventually, if everything goes well, the assessment of a dynamic behavior of the rail track actual service load. Theoretical basis for transient analysis is the advanced mode superposition technique. Finally, are proposed three global models for the railway, obtained considering some modifications in the sleeper.

Keywords

Railway elements. Advanced modal analysis. Hybrid finite elements. Dynamic finite elements.

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Organização do texto	19
1.2	Objetivos	20
2	Revisão Bibliográfica	21
2.1	Cenário ferroviário Brasileiro	21
2.2	Componentes estruturais de uma via férrea	22
2.3	Modelos Computacionais	29
2.4	Alguns modelos de interação dinâmica em ferrovias	31
2.5	Considerações sobre análise dinâmica em vigas	37
2.6	Considerações sobre elementos finitos dinâmicos.	38
3	Elementos Finitos Híbridos	40
3.1	Formulação do Problema	40
3.2	Formulação no domínio da frequência	41
3.3	Equações matriciais de equilíbrio	42
3.4	Expansão das matrizes na forma de séries de frequência	43
3.5	O Problema de Autovalor não-linear	45
3.6	Resposta transiente do sistema	45
3.7	Condensação dinâmica	47
4	Elementos finitos dinâmicos unidimensionais	49
4.1	Matriz de rigidez para um elemento de treliça	49
4.2	Elemento de viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento	51
4.3	Exemplo para o elemento de treliça	57
4.4	Exemplo para o elemento de viga	58
5	Modelos para representação da ferrovia	61
5.1	Considerações iniciais	62
5.2	Modelo com 5 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 5)	63
5.3	Modelo com 3 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 3)	64
5.4	Modelo com 2 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 2)	64
5.5	Modelo com 7 graus de liberdade por dormente para a ferrovia (modelo 7)	65
5.6	Propriedades dos elementos da via férrea	65
6	Solução particular para o caso de viga de Timoshenko	72
6.1	Generalização da solução para um elemento viga de Timoshenko	72
6.2	Primeiro caso: Viga esbelta com amortecimento	74
6.3	Segundo caso particular: Carga Impulsiva	75

6.4	Terceiro caso particular: Carga móvel	76
7	Exemplos Numéricos	78
7.1	Trecho de ferrovia submetido a uma carga súbita	78
7.2	Pulso retangular	87
7.3	Comparação dos resultados entre os modelos 2, 3 e 5	90
7.4	Pulso Triangular simétrico	91
7.5	Sistema com amortecimento reduzido	94
7.6	Trecho de ferrovia com 20 dormentes	98
8	Conclusão	101
8.1	Sobre o método de formulação dos elementos finitos desenvolvidos em séries de frequência.	101
8.2	Quanto ao modelo de interação	102
8.3	Sugestões para trabalhos futuros	103
	Referências Bibliográficas	104
A	Procedimento de transferência de dados entre Maple, Fortran e Matlab	109

Lista de figuras

2.1	Elementos estruturais de uma ferrovia típica	23
2.2	Elementos de fixação longitudinal do trilho (Railway-2004)	24
2.3	Alguns sistemas de fixação e transferência de cargas em ferrovias. Fonte: (Railway-2004) p.63,70	25
2.4	Alguns tipos de dormentes em ferrovias (Rail-One) e (Railway-2004)	26
2.5	Seção transversal típica de uma ferrovia	28
2.6	Aspectos dinâmicos envolvidos na análise da interação entre veículo e ferrovia.	29
2.7	Programas computacionais desenvolvidos ou em uso na Universidade Técnica de Delft (Anuario) 97/98	30
2.8	Modelo dinâmico de análise da interação veículo-ferrovia-solo (Niakas-2001)	32
2.9	Modelo de interação veículo-ferrovia-solo (Martin-2003)	33
2.10	Modelo dinâmico experimental (Esveld-1998)	37
4.1	Sistemas de coordenadas para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça de uma formulação híbrida	50
4.2	Elemento infinitesimal de viga submetido a uma carga distribuída e apoiado em base base elástica	52
4.3	Sistemas de coordenadas e convenção de esforços para a viga.	55
4.4	Barra com extremidades apoiada e livre submetida a uma força P constante ($t \geq 0$) discretizada em 5 elementos de treliça.	57
4.5	Resposta transiente do deslocamento no segundo nó ($x = 0.4L$) para $n = 1$ (teoria clássica) e $n = 4$ (expansão usando termos de ordem ω^8), comparadas com a solução analítica.	58
4.6	Viga biapoiada sob base elástica com amortecimento.	58
4.7	Respostas para as amplificações da viga no nó central	59
4.8	Comparação dos resultados em um pequeno intervalo de tempo e $n=2$.	60
5.1	Modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.	61
5.2	Vista frontal do modelo global para os componentes estruturais da ferrovia.	61
5.3	Sistema 1 de coordenadas para o dormente.	62
5.4	Sistema 2 de coordenadas para o dormente.	63
5.5	Modelo 5 para representação da ferrovia.	63
5.6	Representação do engaste, com eliminação de um grau de liberdade e indicação dos graus de liberdade condensados.	63
5.7	Modelo 3 para representação da ferrovia.	64
5.8	Modelo 2 para representação da ferrovia.	65
5.9	Modelo 7 para representação da ferrovia.	65
5.10	Medidas geométricas da seção transversal do trilho UIC 60 em milímetros (CORUS).	66
5.11	Medidas geométricas do meio dormente e palmilha em metros.	66

5.12	Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n .	68
5.13	Comparação dos autovalores obtidos em cada modelo para diferentes valores de n para um sistema com pouco amortecimento.	71
7.1	Posição do carregamento.	78
7.2	Resposta para uma carga súbita no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = 1,20 \cdot 10^{-5}m$, modelo 2.	79
7.3	Resposta para uma carga súbita no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$ e deslocamento estático $d_0 = -2,86 \cdot 10^{-4}m$, modelo 2.	79
7.4	Comparação das respostas obtidas no grau de liberdade #9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), model 2.	79
7.5	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 1,24 \cdot 10^{-5}m$.	80
7.6	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 13, model 3, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,34 \cdot 10^{-4}m$.	80
7.7	Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3 fixando $n=3$ e $d_0 = -1,50 \cdot 10^{-6}m$, model 3.	80
7.8	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 15 fixando $n=3$ e $d_0 = -2,45 \cdot 10^{-4}m$, modelo 3.	80
7.9	Comparação das respostas obtidas no quinto dormente , grau #15, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 3.	81
7.10	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 1, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = 7,02 \cdot 10^{-5}m$.	81
7.11	Resposta para uma carga retangular do grau de liberdade 21, modelo 5, para $n=3$ e deslocamento estático $d_0 = -3,57 \cdot 10^{-4}m$.	81
7.12	Resposta para uma carga retangular no primeiro dormente, grau de liberdade 3, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = 3,66 \cdot 10^{-6}m$.	82
7.13	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, fixando $n=3$ e $d_0 = -2,80 \cdot 10^{-4}m$.	82
7.14	Comparação das respostas obtidas no quinto dormente , grau de liberdade 23, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 5.	82
7.15	Resposta para uma carga súbita no quinto dormente para $n=1$, modelos 5 e 7.	83
7.16	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=1$, modelos 3 e 5.	83
7.17	Resposta para uma carga retangular no quinto dormente para $n=3$, modelos 3 e 5.	84
7.18	Deslocamentos nodais dos dormentes para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 3 e 5.	84
7.19	Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 3.	85
7.20	Deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$, modelo 5.	85
7.21	Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 3.	86
7.22	Deslocamentos nodais ao longo dos dormentes para $t=0,05s$, modelo 5.	86

7.23	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0.05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 3.	86
7.24	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho para $t=0,05s$ variando o valor de n , modelos 2 e 5.	87
7.25	Pulso retangular.	87
7.26	Deslocamento obtido no primeiro nó, grau de liberdade 1 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.	88
7.27	Deslocamento obtido no quinto nó, grau de liberdade 9 para $n=2$, modelo 2, para um pulso retangular.	88
7.28	Comparação dos deslocamentos obtidos no quinto nó, grau de liberdade 9, variando n de 1 (termos na ordem de ω e ω^2) até 3 (termos de ordem de ω^5 e ω^6), modelo 2.	88
7.29	Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.	89
7.30	Deslocamento obtido no trilho, grau de liberdade 1 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.	89
7.31	Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 3, para um pulso retangular.	89
7.32	Deslocamento obtido no primeiro dormente, grau de liberdade 3 para $n=3$, modelo 5, para um pulso retangular.	89
7.33	Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 15, modelo 3, para um pulso retangular.	90
7.34	Deslocamento no quinto dormente, grau de liberdade 23, modelo 5, para um pulso retangular.	90
7.35	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 2 e 3, para um pulso retangular.	90
7.36	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 2 e 5, para um pulso retangular.	90
7.37	Comparação dos deslocamentos nodais ao longo do trilho, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.	91
7.38	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes, modelos 3 e 5, para um pulso retangular.	91
7.39	Posição do carregamento.	91
7.40	Pulso triangular.	91
7.41	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 2 e 7 para $t=0,025s$.	92
7.42	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.	93
7.43	Comparação dos deslocamentos nodais no trilho obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.	93
7.44	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 3 e 7 para $t=0,025s$.	94
7.45	Comparação dos deslocamentos nodais nos dormentes obtidos nos modelos 5 e 7 para $t=0,025s$.	94
7.46	Deslocamento no primeiro dormente obtido no modelo 3, variando o número de matrizes de massa e amortecimento e $P(t) = 100kN$.	95
7.47	Deslocamento no primeiro dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.	96

7.48	Deslocamento no quinto dormente imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5 para $n = 2$.	96
7.49	Comparação dos deslocamentos nodais obtidos nos dormentes, imediatamente abaixo do trilho, modelos 3 e 5.	97
7.50	Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 1$.	97
7.51	Deslocamentos nodais dos trilhos obtidos variando t e fixando $n = 3$.	98
7.52	Distribuição dos graus de liberdade nodais no trecho simulado	98
7.53	Frequências (ao quadrado) em ordem crescente	99
7.54	Modos de vibração ao longo dos dormentes ($\times 10^{-3}m$)	99
7.55	Amplificação no grau de liberdade # 64, para $n = 2$.	100
7.56	Amplificação no grau de liberdade # 1, para $n = 2$.	100
A.1	Distribuição dos autovalores no plano real e imaginário	114

Lista de tabelas

4.1	Propriedades físicas e geométricas para os elementos de treliça.	57
4.2	Propriedades físicas e geométricas para a viga.	59
5.1	Propriedades físicas e geométricas para o trilho UIC 60. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.2	Propriedades físicas e geométricas para o dormente. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.3	Propriedades físicas e geométricas para a palmilha. Fonte dos dados: (Zhai-2003).	67
5.4	Autovalores obtidos no modelo 2 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.5	Autovalores obtidos no modelo 3 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.6	Autovalores obtidos no modelo 5 para $n=1, 2$ e 3 .	69
5.7	Autovalores obtidos no modelo 7 para $n=1, 2$ e 3 .	70
5.8	Propriedades físicas e geométricas para o trilho.	70
5.9	Propriedades físicas e geométricas para o dormente.	70
5.10	Propriedades físicas e geométricas para a palmilha.	70
5.11	Módulo dos seis primeiros autovalores obtidos nos modelos com a redução do amortecimento e rigidez.	71
7.1	Valores dos deslocamentos nodais ($\times 10^{-6}$) dos dormentes ao longo do trecho, modelos 3 e 5 fixando $t=0,05s$.	85

Lista de símbolos

Caracteres latinos

a_n, b_n	Constantes de normalização modal no modelo de Martin et al
K_{bi}	Coefficiente de rigidez do lastro no modelo de Niakas et al
K_{pi}	Coefficiente de rigidez da palmilha no modelo de Niakas et al
K_s	Coefficiente de Rigidez da suspensão do veículo no modelo de Martin et al
C_{bi}	Coefficiente de amortecimento do lastro no modelo de Niakas et al
C_{pi}	Coefficiente de amortecimento da palmilha no modelo de Niakas et al
C_s	Coefficiente de amortecimento na suspensão do veículo no modelo de Martin et al
M_{si}	Massa do dormente no modelo de Niakas et al
M_b	Massa do veículo no modelo de Martin et al
M_w	Massa da roda no modelo de Martin et al
Z_r	Deslocamento ao longo do trilho no modelo de Niakas et al
\mathbf{z}	Vetor de deslocamentos globais no modelo de Martin et al
z_0	Deslocamento inicial do sistema no modelo de Martin et al
$q_k(t)$	Função dependente do tempo no modelo de Niakas et al
m_r	Massa do trilho por unidade de comprimento no modelo de Niakas et al
$\mathbf{F}(t)$	Vetor de forças externas no modelo de Niakas et al

$\mathbf{Y}(t)$	Vetor de deslocamentos no modelo de Niakas et al
m_r	Massa do trilho por unidade de comprimento no modelo de Niakas et al
l, L	Comprimento do elemento
\mathbf{x}^t	Vetor de deslocamentos no modelo de Martin et al
\mathbf{M}^t	Matriz de massa no modelo de Martin et al
\mathbf{C}^t	Matriz de amortecimento no modelo de Martin et al
\mathbf{K}^t	Matriz de rigidez no modelo de Martin et al
\mathbf{F}^{wr}	Vetor de forças no modelo de Martin et al
\mathbf{y}^t	Vetor de deslocamentos e velocidades no modelo de Martin et al
\mathbf{x}_a^v	Vetor de deslocamento vertical da interface roda-trilho no modelo de Martin et al
\mathbf{N}	Função de forma no modelo de Martin et al
\mathbf{x}^{irr}	Vetor de irregularidades prescritas na superfície da ferrovia no modelo de Martin et al
\mathbf{P}^{rw}	Matriz modal no modelo de Martin et al
P_0	Força estática aplicada
t	Tempo
t_1	Duração do pulso
x	Coordenadas cartesianas
y	Coordenadas cartesianas
\mathbf{M}	Matriz de massa
\mathbf{C}	Matriz de amortecimento
\mathbf{K}	Matriz de rigidez
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de deslocamentos no modelo de Esveld et al
FFT	Transformada rápida de Fourier
\mathbf{d}	Vetor de deslocamentos nodais

\mathbf{d}^b	Vetor de deslocamentos nodais da solução particular
\mathbf{p}	Vetor de forças nodais
\mathbf{p}^*	Parâmetro de forças nodais dependentes da frequência
\mathbf{p}^b	Vetor de forças nodais particular
\mathbf{F}	Matriz de flexibilidade
\mathbf{H}	Matriz de equilíbrio
\mathbf{U}^*	Matriz de deslocamentos
u_i^*	Solução fundamental de deslocamentos
u_i^p	Solução particular de deslocamentos
\bar{u}_i	Campo de deslocamentos discreto
E	Módulo de elasticidade longitudinal do material
G	Módulo de elasticidade transversal do material
A	Área da seção transversal do elemento
I	Momento de inércia da seção transversal
w	Constante elástica da fundação
M	Momento fletor na seção transversal
Q	Esforço cortante na seção transversal
y^*	Deslocamento transversal da solução homogênea
C_i	Constantes de integração
\mathbf{N}^*	Matriz de compatibilidade de deslocamentos
q	Carregamento ao longo do elemento

Caracteres gregos

$\Phi_k(x)$	Função de forma para os modos de vibração no modelo de Niakas et al
Ω	Domínio do corpo elástico
$\mathbf{\Omega}$	Matriz de autovalores
σ_{ij}	Tensões normais
σ_{ij}^*	Tensões referentes à solução fundamental
σ_{ij}^p	Tensões referentes à solução particular
ρ	Massa específica
μ	Coefficiente de amortecimento
σ_{ij}	Parâmetro de amortecimento
Γ	Contorno do elemento
Γ_u	Região do contorno onde se têm deslocamentos prescritos
Γ_σ	Região do contorno onde se têm forças prescritas
ω	Frequência circular de vibração
η	Vetor de amplitude modal
$\bar{\eta}$	Vetor conjugado de amplitude modal
Λ	Cossenos diretores de um elemento
Φ	Matriz de autovetores
$\bar{\Phi}$	Matriz conjugada de autovetores
ψ^*	Rotação da seção transversal
γ_0	Deformação da seção transversal devido ao esforço cortante
κ	Fator de forma
β_n	Número de onda
δ	Delta de Kronecker
ξ	Coordenada de aplicação do carregamento particular
α_i	Raízes da equação polinomial