

4 Modelo

4.1. Fundamentação teórica

No desenvolvimento do modelo matemático do elemento viga-duto enterrado, formulado a partir do Método dos Elementos Finitos, consideram-se as premissas básicas abaixo (SOUZA, 2005):

- Análise da flexão da viga, sem considerar os efeitos das deformações de cisalhamento, onde a superfície média (linha neutra) da viga permanece reta durante a deformação, e a rotação angular é igual à curvatura da superfície média da mesma - hipótese de Bernoulli (Fig.4-1);

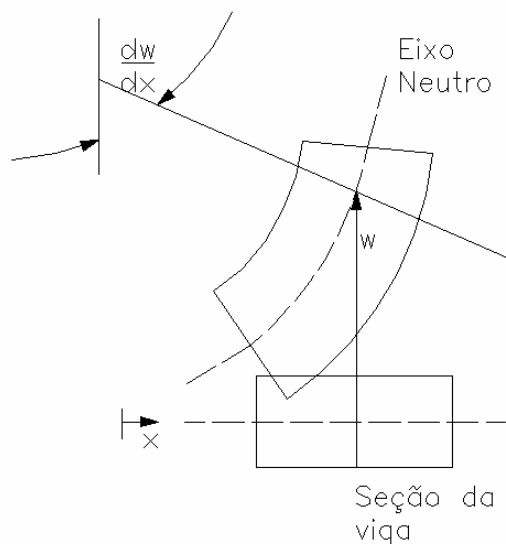


Figura 4-1 - Deformações de viga, sem o efeito do cisalhamento (SOUZA, 2005).

- Ocorrência exclusiva de tensões tangenciais e radiais sob dutos submetidos à pressão interna;
- Comportamento elastoplástico para o material do duto;
- Modelo do solo conforme o modelo de *Winkler*.

Na análise da descrição do carregamento e do movimento de um duto, adota-se a formulação Lagrangeana Total (L.T.), isto é, todas as partículas do corpo em seu movimento são acompanhadas da configuração original para a final. Neste

referencial, os deslocamentos são medidos a partir da configuração inicial deformada, conforme ilustrado na Fig. 4-2.

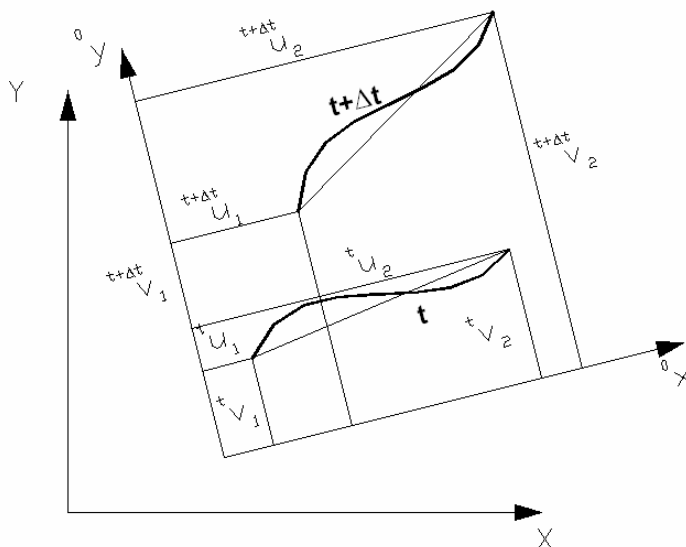


Figura 4-2 - Referencial Lagrangeano Total (SOUZA, 2005).

A equação do movimento linearizada na formulação L.T. é expressa por:

$$\int_{\theta_V} C_{ijrs} {}^0 e_{rs} \delta {}^0 e_{ij} d^0 V + \int_{\theta_V} {}^t S_{ij} \delta {}^0 e_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} - \int_{\theta_V} {}^t S_{ij} {}^0 \delta e_{ij} d^0 V \quad (4.1)$$

onde ${}^t S_{ij}$, ${}^t e_{rs}$, ${}^t C_{ijrs}$, V e $\mathfrak{R}$ são, respectivamente, as componentes do tensor de tensões segundo *Piola-Kirchhoff*, o tensor de deformações de *Green-Lagrange*, as componentes do tensor elástico, o volume e o trabalho externo.

Em termos da relação deformação-deslocamento, tem-se para a deformação longitudinal, num dado tempo t , a seguinte expressão (SOUZA, 2005):

$${}_t \varepsilon_x = {}_t \varepsilon_0 - Y {}_t \phi_z + Z {}_t \phi_y \quad (4.2)$$

nos quais os incrementos totais de deformação axial e das curvaturas são constituídos de uma parcela linear (${}_t \varepsilon_x^L$) e uma parcela não-linear (${}_t \varepsilon_x^{NL}$), função das deformações incrementais longitudinais no centróide (${}_t \varepsilon_0$) e das curvaturas em torno dos eixos x_2 (${}_t \phi_y$) e x_3 (${}_t \phi_z$).

4.2.

Comportamento elástico do material

Um material está em regime elástico quando as deformações causadas por um dado carregamento desaparecem completamente quando o mesmo é retirado.

A relação entre tensões e deformações presentes em um corpo submetido a certo sistema de forças denomina-se relação constitutiva ou relação tensão-deformação, descrita em termos da elasticidade.

Obtém-se a descrição material para análise de grandes deformações a partir da generalização das relações elásticas lineares segundo a formulação Lagrangeana Total (L.T.), conforme segue:

$${}^tS_{ij} = {}^tC_{ijrs} {}^te_{rs} \quad (4.3)$$

Considerando as condições de tensões tridimensionais, resulta para a matriz de tensão-deformação em:

$$[C^E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

no qual E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Na análise de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações, a relação contida em (4.3) fornece uma descrição material natural, visto que tanto o tensor de tensões segundo *Piola-Kirchhoff* quanto o tensor de deformações de *Green-Lagrange* são invariantes sob rotações de corpo rígido.

4.3.

Comportamento inelástico do material

Na resposta inelástica, a tensão total no tempo t depende, além da determinação da deformação total, do histórico da tensão e deformação. (BATHE,1996)

Na análise incremental da resposta inelástica, a formulação L.T. é utilizada na descrição cinemática de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações.

O incremento de tensão é obtido a partir da decomposição da deformação em parcelas elástica e inelástica, como segue (BATHE, 1996):

$$dS_{ij} = C_{ijrs}^E d\varepsilon_{rs}^E = C_{ijrs}^E (d\varepsilon_{rs} - d\varepsilon_{rs}^P) \quad (4.5)$$

no qual $d\varepsilon_{rs}$, $d\varepsilon_{rs}^E$ e $d\varepsilon_{rs}^P$ representam as componentes de deformação incremental total, elástica e plástica, nesta ordem.

A fim de descrever o comportamento elastoplástico do material, e com isso determinar as deformações plásticas, faz-se necessária a avaliação de certos fatores, tais como:

- Relação tensão-deformação;
- Funções de escoamento;
- Lei de escoamento;
- Lei de endurecimento.

A função de escoamento apresenta a condição de escoamento correspondente ao estado de tensão multiaxial no início do escoamento plástico. A forma geral da função de escoamento no tempo t é dada por:

$${}^t\Phi({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots) \quad (4.6)$$

onde $({}^tS_{ij}, {}^t\varepsilon_{rs}^P, \dots)$ exprime as variáveis que dependem da caracterização material.

Para ${}^t\Phi < 0$, a resposta material instantânea é elástica; sendo ${}^t\Phi = 0$, a resposta pode ser elástica ou plástica, dependendo da condição de escoamento; condição inadmissível quando ${}^t\Phi > 0$.

O encruamento ou endurecimento é um fenômeno onde a deformação plástica modifica a tensão de escoamento inicial, aumentando a faixa de comportamento elástico do material. Em casos onde o módulo de encruamento é igual na tração e na compressão, o material é dito com endurecimento isotrópico.

Para o material do duto em sua espessura e o material do reforço em um dado ponto, é admitido em regime elástico um comportamento linear. Em regime plástico adota-se o critério de escoamento de Von Mises com endurecimento isotrópico. Para o caso de tubos de paredes finas, a tensão radial, por seu valor muito menor

em comparação com as tensões longitudinais e circunferenciais, é considerada nula.

Considerando as tensões e deformações de cisalhamento desprezíveis, estabelece-se a relação incremental tensão-deformação elasto-plástica para os elementos de viga para o duto e o para o reforço (MEJÍA,2003):

$$\begin{Bmatrix} {}^tS_\theta \\ {}^tS_r \\ {}^tS_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' - {}^tP_{\theta\theta} & \lambda - {}^tP_{\theta r} & \lambda - {}^tP_{\theta x} \\ \lambda - {}^tP_{r\theta} & \lambda' - {}^tP_{rr} & \lambda - {}^tP_{rx} \\ \lambda - {}^tP_{x\theta} & \lambda - {}^tP_{xr} & \lambda' - {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\varepsilon_\theta \\ {}^t\varepsilon_r \\ {}^t\varepsilon_x \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

onde

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.8)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.9)$$

$${}^tP_{mn} = \frac{3G}{\left(1 + \frac{H'}{3G}\right)} {}^tS_{mm} {}^tS_{nn} \quad (4.10)$$

$m, n = \theta, r, x$

O módulo de encruamento H' é expresso por:

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (4.11)$$

em que E_T representa o módulo tangente do material em questão.

As propriedades do material (E , ν , G) são constantes se o material for homogêneo, e variáveis ao longo da espessura para os materiais com gradação funcional. Além disso, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda' - {}^tP_{\theta\theta} & \lambda - {}^tP_{\theta r} \\ \lambda - {}^tP_{r\theta} & \lambda' - {}^tP_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda - {}^tP_{\theta x} \\ \lambda - {}^tP_{rx} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

As expressões para a matriz constitutiva elastoplástica, tensão efetiva e deformação plástica incremental são apresentadas a seguir:

$${}^tC^{EP} = {}^tC_{\theta x}(\lambda - {}^tP_{x\theta}) + {}^tC_{rx}(\lambda - {}^tP_{xr}) - (\lambda' - {}^tP_{xx}) \quad (4.13)$$

$$\bar{S} = \sqrt{({}^tS_\theta^2 - {}^tS_\theta {}^tS_x - {}^tS_x^2)} \quad (4.14)$$

$${}^t\varepsilon^P = \sqrt{\frac{3}{2}({}^t\varepsilon_\theta^2 + {}^t\varepsilon_r^2 + {}^t\varepsilon_x^2)} \quad (4.15)$$

em que as componentes da deformação incremental elasto-plástica provêm de (MEJÍA, 2003):

$$\begin{Bmatrix} {}^t\varepsilon_\theta \\ {}^t\varepsilon_r \\ {}^t\varepsilon_x \end{Bmatrix} = \frac{I}{E} \begin{bmatrix} I & -\nu & -\nu \\ -\nu & I & -\nu \\ -\nu & -\nu & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \\ I \end{Bmatrix} {}^t\varepsilon_x \quad (4.16)$$

4.4.

Avaliação incremental das tensões

Com intuito de se avaliar os incrementos de tensões para uma determinada deformação incremental, é estabelecido um algoritmo, de acordo com o critério de escoamento de Von Mises (SOUZA, 2005).

Neste processo de cálculo, para efeito de integração pela técnica RMDI, a seção transversal, tanto do duto quanto do reforço, é discretizada em camadas radiais e circunferenciais, ilustrada na Fig. 4-3, devido ao fato de que a simetria verificada neste caso permite simplificações nos cálculos relevantes, e por ser esta discretização mais adequada na determinação das propriedades materiais do FGM, conceitualmente dependente da posição radial de seu centro geométrico.

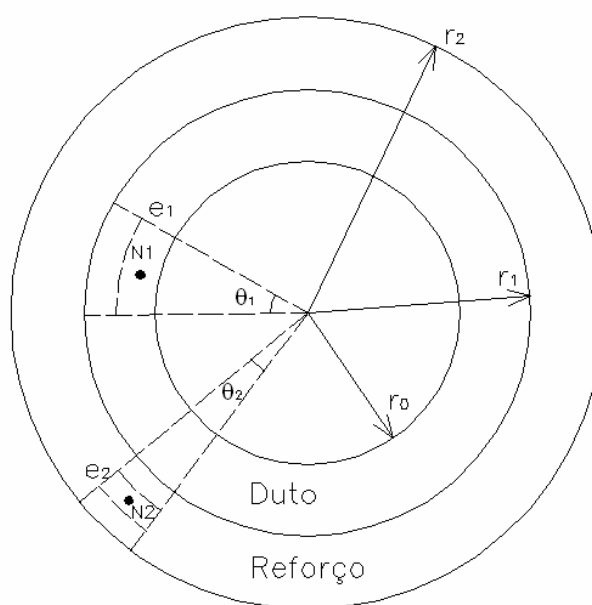


Figura 4-3 - Discretização da seção transversal do conjunto duto-reforço

O procedimento de cálculo da tensão axial total no tempo está esquematizado na Fig. 4-4:

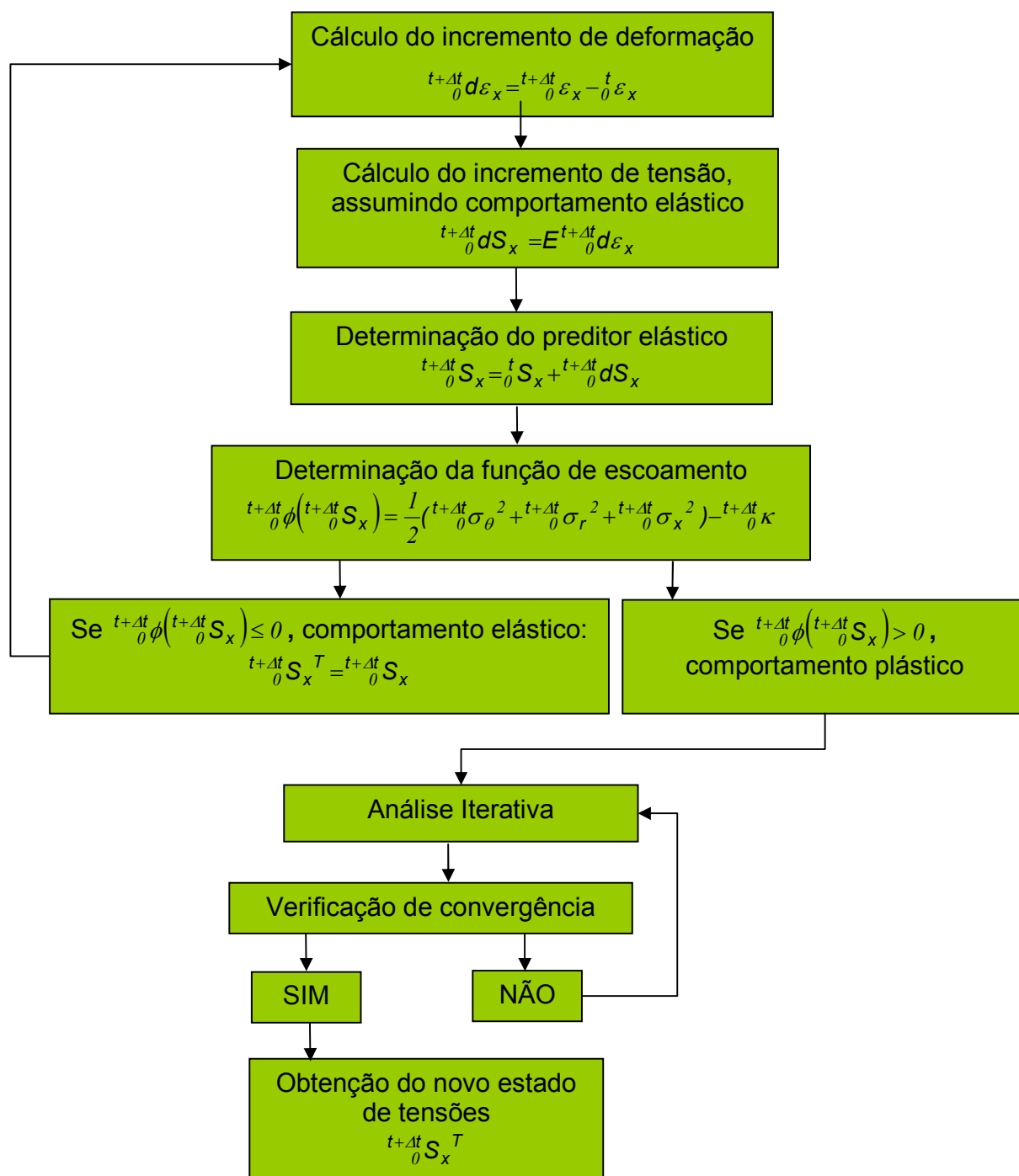


Figura 4-4 – Procedimento de cálculo da tensão total no regime elastoplástico.

4.5. Elemento do solo

Conforme SOUZA (2005), a interação solo-estrutura, e sua intrínseca relação com as propriedades do duto e do solo circundante, exerce significativa influência no desempenho do duto enterrado. O modelo de interação solo-duto é constituído por uma série de molas localizadas ao longo do duto, as quais concentram a reação do solo em pontos discretos (MEJÍA, 2003).

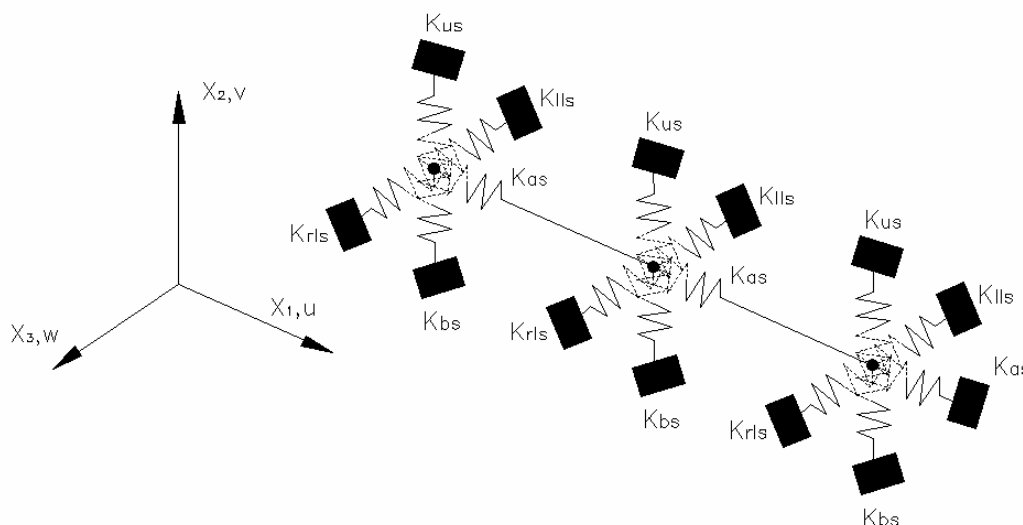


Figura 4-5 - Modelo de interação solo-duto (SOUZA, 2005).

As molas transversais apresentam relação força-deformação elástica ou perfeitamente plástica na compressão, e não possuem capacidade para transmissão de forças de tração. As forças incrementais de compressão nas molas referentes à base, ao topo, à lateral esquerda e à lateral direita do duto, definidas no sistema de coordenadas locais na configuração deformada corrente e em função das respectivas deformações, são expressas, nesta ordem, pelas equações (ZHOU & MURRAY, 1996):

$${}^tF_{BS} = {}^tK_{BS} {}^t\Delta_{BS} \quad 0 \leq {}^tF_{BS} \leq {}^tF_{YBS} \quad (4.17a)$$

$${}^tF_{US} = {}^tK_{US} {}^t\Delta_{US} \quad 0 \leq {}^tF_{US} \leq {}^tF_{YUS} \quad (4.17b)$$

$${}^tF_{LLS} = {}^tK_{LLS} {}^t\Delta_{LLS} \quad 0 \leq {}^tF_{LLS} \leq {}^tF_{YLLS} \quad (4.17c)$$

$${}^tF_{RLS} = {}^tK_{RLS} {}^t\Delta_{RLS} \quad 0 \leq {}^tF_{RLS} \leq {}^tF_{YRLS} \quad (4.17d)$$

As forças incrementais nas molas longitudinais, segundo o sistema de coordenadas locais na configuração deformada, são dadas por:

$${}^tF_{AS} = {}^tK_{AS} {}^t\Delta_{AS} \quad 0 \leq {}^tF_{AS} \leq {}^tF_{YAS} \quad (4.17e)$$

4.6.

Elemento da estrutura

O elemento de viga é um elemento tridimensional com capacidade para tração, compressão e flexão. Tal elemento compõe-se de 3 nós, sendo um nó localizado em cada extremidade da barra (i e j) e outro situado no centro da mesma (k). Cada um destes nós pode se deslocar nas direções transversais (x_2 e x_3), na direção longitudinal (x_1) e girar em torno dos eixos x_2 e x_3 . Portanto, cada nó apresenta 5 graus de liberdade ($u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3, \theta_{y1}, \theta_{y2}, \theta_{y3}, \theta_{z1}, \theta_{z2}, \theta_{z3}$), de acordo com o ilustrado na Fig. 4-6.

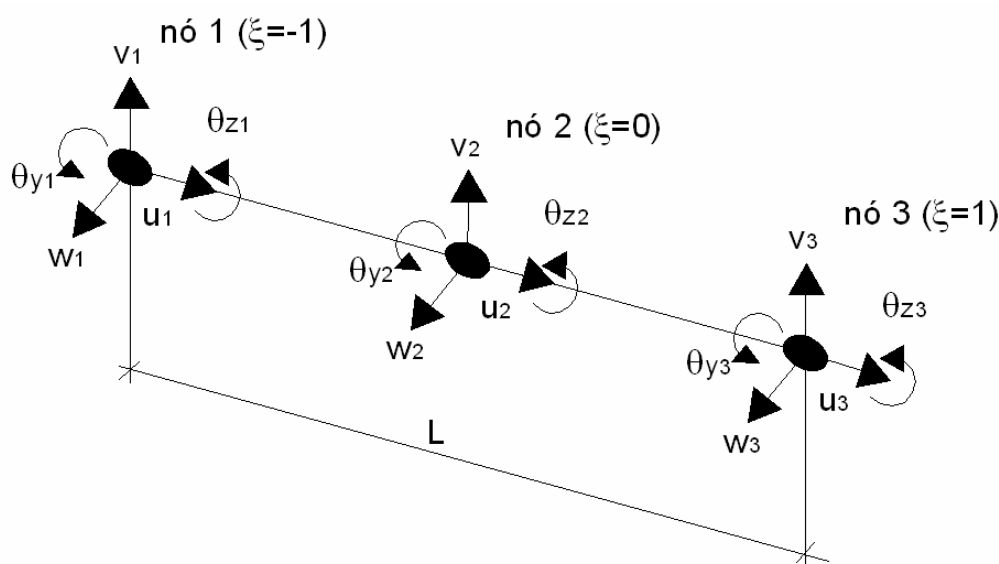


Figura 4-6 – Elemento de viga tridimensional (SOUZA, 2005)

Pelo princípio do trabalho virtual na formulação L.T. segundo a técnica RMDI (*Reduced Modulus Direct Integration*), obtido em função das componentes de tensão e deformação do elemento de viga, obtêm-se os coeficientes da rigidez da seção transversal (K), conforme as expressões abaixo (SOUZA, 2005):

$${}^tK_1 = \int_A {}^tC^{EP} d^tA \quad (4.18a)$$

$${}^tK_2 = \int_A {}^tC^{EP} x_2^2 d^tA \quad (4.18b)$$

$${}^tK_3 = -\int_A {}^tC^{EP} x_2 d^tA \quad (4.18c)$$

$${}^tK_4 = \int_A {}^tC^{EP} x_3 d^tA \quad (4.18d)$$

$${}^tK_5 = -\int_A {}^tC^{EP} x_2 x_3 d^tA \quad (4.18e)$$

$${}^tK_6 = \int_A {}^tC^{EP} x_3^2 d^tA \quad (4.18f)$$

As integrais contidas nas eqs. (4.18) são obtidas por integração numérica na seção transversal do duto, conforme discretização (ver Fig. 4-3).

As forças internas totais equivalentes no tempo t (${}^tF_{eq}$; ${}^tM_{eq}$) são expressas por:

$${}^tF_{eq} = \int_A ({}^tS_{x_I} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta}) d^tA \quad (4.19a)$$

$${}^tM_{eq1} = -\int_A ({}^tS_{x_I} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta}) x_2 d^tA \quad (4.19b)$$

$${}^tM_{eq2} = -\int_A ({}^tS_{x_I} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta}) x_3 d^tA \quad (4.19c)$$

Finalmente, estabelece-se a equação do trabalho virtual incremental para o elemento de viga através da técnica RMDI conforme segue:

$$\begin{aligned} & \int_L ({}^tF_{eq} \delta_t \varepsilon_0^{NL} + {}^tM_{eq1} \delta_t \phi_z^{NL} + {}^tM_{eq2} \delta_t \phi_y^{NL}) d^tX_I + \int_L ({}^tK_1 \varepsilon_0^L + {}^tK_3 \phi_z^L + {}^tK_4 \phi_y^L) \delta_t \varepsilon_0^L \\ & + ({}^tK_3 \varepsilon_0^L + {}^tK_2 \phi_z^L + {}^tK_5 \phi_y^L) \delta_t \phi_z^L + ({}^tK_4 \varepsilon_0^L + {}^tK_5 \phi_z^L + {}^tK_6 \phi_y^L) \delta_t \phi_y^L d^tX_I \quad (4.20) \\ & + \int_L ({}^tK_{AS} \Delta_{AS}) \delta_t u_0 d^tX_I + \int_L ({}^tK_{BS} \Delta_{BS} + {}^tK_{US} \Delta_{US}) \delta_t v_0 d^tX_I + \\ & + \int_L ({}^tK_{LLS} \Delta_{LLS} + {}^tK_{RLS} \Delta_{RLS}) \delta_t w_0 d^tX_I = \delta^{t+\Delta t} W_{ext} + \\ & - \int_L ({}^tF_{eq} \delta_t \varepsilon_0^L + {}^tM_{eq1} \delta_t \phi_z^L + {}^tM_{eq2} \delta_t \phi_y^L) d^tX_I - \int_L ({}^tF_{AS}) \delta_t u_0 d^tX_I + \\ & - \int_L ({}^tF_{BS} + {}^tF_{US}) \delta_t v_0 d^tX_I - \int_L ({}^tF_{LLS} + {}^tF_{RLS}) \delta_t w_0 d^tX_I \end{aligned}$$

As funções de interpolação para os deslocamentos, também chamadas de funções de Hermite, são expressas por:

$$h_1\left(\frac{t\xi}{2}\right) = -\frac{t\xi}{2} + \frac{t\xi^2}{2} \quad (4.21a)$$

$$h_2\left(\frac{t\xi}{2}\right) = h_3\left(\frac{t\xi}{2}\right) = t\xi^2 - \frac{5t\xi^3}{4} - \frac{t\xi^4}{2} + \frac{3t\xi^5}{4} \quad (4.21b)$$

$$h_4(t\xi) = h_5(t\xi) = \frac{t\xi^2 tL}{8} - \frac{t\xi^3 tL}{8} - \frac{t\xi^4 tL}{8} + \frac{t\xi^5 tL}{8} \quad (4.21c)$$

$$h_6(t\xi) = \frac{t\xi}{2} + \frac{t\xi^2}{2} \quad (4.21d)$$

$$h_7(t\xi) = h_8(t\xi) = t\xi^2 + \frac{5t\xi^3}{4} - \frac{t\xi^4}{2} - \frac{3t\xi^5}{4} \quad (4.21e)$$

$$h_9(t\xi) = h_{10}(t\xi) = -\frac{t\xi^2 tL}{8} - \frac{t\xi^3 tL}{8} + \frac{t\xi^4 tL}{8} + \frac{t\xi^5 tL}{8} \quad (4.21f)$$

$$h_{11}(t\xi) = 1 - t\xi^2 \quad (4.21g)$$

$$h_{12}(t\xi) = h_{13}(t\xi) = 1 - 2t\xi^2 + t\xi^4 \quad (4.21h)$$

$$h_{14}(t\xi) = h_{15}(t\xi) = \frac{t\xi^2 tL}{2} - t\xi^3 tL + \frac{t\xi^5 tL}{2} \quad (4.21i)$$

Tem-se a seguinte expressão matricial para os deslocamentos incrementais do elemento:

$$\begin{Bmatrix} tU \\ tV \\ tW \end{Bmatrix} = [{}^tH] \{ {}^tU_e \} \quad (4.22)$$

em que:

$$[{}^tH] = \begin{bmatrix} {}^th_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^th_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^th_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^th_2 & 0 & {}^th_4 & 0 & 0 & {}^th_7 & 0 & {}^th_9 & 0 & 0 & {}^th_{12} & 0 & {}^th_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_3 & 0 & {}^th_5 & 0 & 0 & {}^th_8 & 0 & {}^th_{10} & 0 & 0 & {}^th_{13} & 0 & {}^th_{15} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\{ {}_t u_e \} = \begin{Bmatrix} {}_t u_1 \\ {}_t v_1 \\ {}_t w_1 \\ {}_t \theta_{z1} \\ {}_t \theta_{y1} \\ {}_t u_2 \\ {}_t v_2 \\ {}_t w_2 \\ {}_t \theta_{z2} \\ {}_t \theta_{y2} \\ {}_t u_3 \\ {}_t v_3 \\ {}_t w_3 \\ {}_t \theta_{z3} \\ {}_t \theta_{y3} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

no qual $\{ {}_t u_e \}$ representa o vetor de deslocamentos nodais incrementais do referido elemento.

A deformação axial linear ${}_t \varepsilon_0^L$ e as curvaturas lineares ${}_t \phi_z^L$ e ${}_t \phi_y^L$ podem ser expressas em termos matriciais da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} {}_t \varepsilon_0^L \\ {}_t \phi_z^L \\ {}_t \phi_y^L \end{Bmatrix} = [{}_t B^L] \{ {}_t u_e \} \quad (4.25)$$

no qual

$$[{}_t B^L] = \begin{bmatrix} {}_t H'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_t H'_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_t H'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_t H'_2 & 0 & {}_t H'_4 & 0 & 0 & {}_t H'_7 & 0 & {}_t H'_9 & 0 & 0 & {}_t H'_{12} & 0 & {}_t H'_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}_t H'_3 & 0 & {}_t H'_5 & 0 & 0 & {}_t H'_8 & 0 & {}_t H'_{10} & 0 & 0 & {}_t H'_{13} & 0 & {}_t H'_{15} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

As equações a seguir fornecem a parcela não-linear incremental da deformação axial ($\delta {}_t \varepsilon_0^{NL}$) e das curvaturas ($\delta {}_t \varepsilon_0^{NL}$) :

$$\delta {}_t \varepsilon_0^{NL} = \{ \delta {}_t u_e \}^T [{}_t B_1^{NL}]^T [{}_t B_1^{NL}] \{ {}_t u_e \} \quad (4.27a)$$

$$\delta {}_t \phi_z^{NL} = \{ \delta {}_t u_e \}^T [{}_t B^L]^T [{}_t B_2^{NL}] \{ {}_t u_e \} \quad (4.27b)$$

$$\delta {}_t \phi_y^{NL} = \{ \delta {}_t u_e \}^T [{}_t B^L]^T [{}_t B_3^{NL}] \{ {}_t u_e \} \quad (4.27c)$$

em que:

$$[{}^t\mathbf{B}_1^{NL}] = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t\mathbf{h}_2 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_4 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_7 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_9 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{12} & 0 & {}^t\mathbf{h}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_3 & 0 & {}^t\mathbf{h}_5 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_8 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{10} & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{13} & 0 & {}^t\mathbf{h}_{15} \end{bmatrix} \quad (4.28a)$$

$$[{}^t\mathbf{B}_2^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & {}^t\mathbf{h}'_2 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_4 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_7 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_9 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_{12} & 0 & {}^t\mathbf{h}'_{14} & 0 \\ {}^t\mathbf{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28b)$$

$$[{}^t\mathbf{B}_3^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_3 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_5 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_8 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_{10} & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}'_{13} & 0 & {}^t\mathbf{h}'_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\mathbf{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\mathbf{h}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28c)$$

Os deslocamentos incrementais nodais das molas do solo são expressos por:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\Delta_{AS} \\ {}^t\Delta_{BS} \\ {}^t\Delta_{US} \\ {}^t\Delta_{LLS} \\ {}^t\Delta_{RLS} \end{Bmatrix} = [{}^t\mathbf{B}^S] \{ {}^t\mathbf{u}_e \} \quad (4.29)$$

o qual:

$$[{}^t\mathbf{B}_S] = \begin{bmatrix} -{}^t\mathbf{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_2(1-\eta) & 0 & {}^t\mathbf{h}_2\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_3(1-\beta) & 0 & {}^t\mathbf{h}_3\beta \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_4(1-\eta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_4\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_5(1-\beta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_5\beta \\ -{}^t\mathbf{h}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_7(1-\eta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_7\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_8(1-\beta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_8\beta \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_9(1-\eta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_9\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{10}(1-\beta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{10}\beta \\ -{}^t\mathbf{h}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_{12}(1-\eta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{12}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{13}(1-\beta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{13}\beta \\ 0 & -{}^t\mathbf{h}_{14}(1-\eta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{14}\eta & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{15}(1-\beta) & 0 & -{}^t\mathbf{h}_{15}\beta \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Os parâmetros contidos na expressão acima são definidos de acordo com os deslocamentos transversais (x_2 e x_3):

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } {}^t v < 0 \\ 1, & \text{se } {}^t v > 0 \end{cases} \quad (4.31a)$$

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{se } {}^t w < 0 \\ 1, & \text{se } {}^t w > 0 \end{cases} \quad (4.31b)$$

Os deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema local $\{{}_t u_e\}$ se relacionam com os deslocamentos no sistema global $\{{}_t \tilde{u}_e\}$ da seguinte forma:

$$\{{}_t u_e\} = [{}^t R_T] \{{}_t \tilde{u}_e\} \quad (4.32)$$

onde $[{}^t R_T]$ é a matriz de transformação de rotação para um membro de pórtico espacial.

A matriz de tensão-deformação generalizada para o elemento viga-duto é dada por:

$$[{}^t D^p] = \begin{bmatrix} {}^t K_1 & {}^t K_3 & {}^t K_4 \\ {}^t K_3 & {}^t K_2 & {}^t K_5 \\ {}^t K_4 & {}^t K_5 & {}^t K_6 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

em que ${}^t K_1, {}^t K_2, {}^t K_3, {}^t K_4, {}^t K_5, {}^t K_6$ estão expressos nas Eqs. 4.18.

Quanto à matriz de tensão-deformação para as molas do solo, tem-se:

$$[{}^t D^s] = \begin{bmatrix} {}^t K_{AS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t K_{BS} & 0 & {}^t K_{US} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t K_{LLS} & 0 & {}^t K_{RLS} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

As matrizes de força interna são definidas por:

$$[{}^t F] = \begin{bmatrix} {}^t F_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t F_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t F_{eq} \end{bmatrix} \quad (4.35a)$$

$$[{}^t M_l] = \begin{bmatrix} {}^t M_{eq/l} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t M_{eq/l} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t M_{eq/l} \end{bmatrix} \quad (4.35b)$$

$$[{}^tM_2] = \begin{bmatrix} {}^tM_{eq2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^tM_{eq2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tM_{eq2} \end{bmatrix} \quad (4.35c)$$

Por fim, estabelece-se a equação de equilíbrio global incremental a partir do método de rigidez direta, cuja expressão é:

$$[{}^tK^G]\{{}^tu^G\} = \{{}^tR^G\} - \{{}^tF^G\} \quad (4.36)$$

na qual $\{{}^tR^G\}$ é o vetor de forças externas, e $\{{}^tF^G\}$, o vetor de forças internas do elemento.