

## 5

### Equilíbrio entre Risco e Ganho

Um aspecto inicial na metodologia proposta é representar o perfil de risco dos agentes consumidores. No contexto desta tese, o “risco” está associado à interrupção no suprimento de gás do contrato flexível devido ao despacho da térmica: todas as vezes que isto acontecer, o consumidor precisa “mudar” para um combustível alternativo que será mais caro. Com isso, dependendo da frequência de interrupção de fornecimento, o custo médio final deste contrato flexível pode ser indesejável.

Riscos estão normalmente associados a possíveis perdas financeiras ou à possibilidade de não se atingir um nível de remuneração compatível com o investimento [1]. A eliminação total de riscos pode ser economicamente inviável ou mesmo impossível. Por outro lado, situações de risco podem oferecer grandes oportunidades de ganho. Na área financeira, decisões referentes à alocação de recursos são encaradas em um contexto de risco-retorno, ou seja decisões que envolvem um maior nível de risco só são aceitáveis se proporcionarem maiores retornos.

Não existe um modo universalmente aceito de representar o equilíbrio entre ganho e risco [2]. Discutiremos neste capítulo as seguintes abordagens:

- Variância dos retornos (Markowitz)
- “Value at risk”
- “Downside risk”
- Função utilidade.

## 5.1

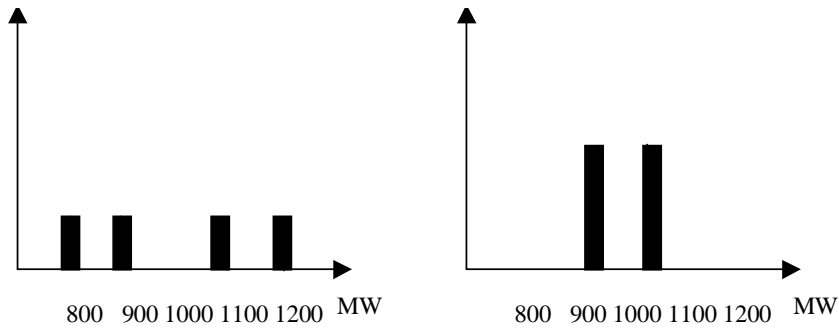
### O Modelo de Otimização de Portfolios de Markowitz

A base da teoria moderna de gerenciamento de portfolios, que tem Harry Markowitz [3] como um dos seus fundadores, é que os investidores podem reduzir seus riscos através da diversificação ou balanceamento de carteiras. Vamos considerar por exemplo um investidor com um contrato de venda de energia de 1000 MW médios que tem a opção de construir dois tipos de usinas de 500 MW médios, associadas a um mesmo custo de investimento e operação. Dadas as condições hidrológicas, a geração efetiva das usinas é variável, como mostrado na **Tabela 5.1**. Os excedentes/déficits de energia podem ser comercializado no mercado spot. A comercialização neste mercado envolve riscos pois o investidor poderá ter que comprar energia a um preço muito mais elevado do que o do seu contrato de venda.

Geração (MW médios)	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
<b>Usina 1</b>	600	550	450	400
<b>Usina 2</b>	450	400	600	550

Tabela 5.1 – Geração das Usinas

Ao formar seu portfólio de geração o investidor pode optar construir duas usinas idênticas do tipo 1 ou 2 (Portfólio A) ou uma usina do tipo 1 e a outra tipo 2 (Portfólio B). A Figura 3.1 mostra a distribuição de geração das duas alternativas.



**Portfolio A – Duas Usinas do Tipo 1 ou 2      Portfolio B – Combinação Usinas: Tipo 1 e 2**

Figura 5.1 – Distribuição da Geração

Pode-se observar na

Figura 5.1 que a geração do Portfolio B é mais concentrada em torno de 1000 MW médios ou seja, como decorrência da diversificação o risco de exposição ao spot do Portfolio B é menor que o do Portfolio A

Seja  $\{1, \dots, n\}$  o conjunto de ativos cujos retornos (lucro percentual) são representados por variáveis aleatórias  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . O problema de seleção estática de portfolio consiste em determinar a proporção de recursos a ser investido em cada ativo de acordo com o perfil de risco do investidor. Nesta abordagem portfolios com maior nível de risco devem oferecer como contrapartida maiores retornos.

Como medida de risco Markowitz adotou no seu trabalho original o desvio padrão dos retornos. Por exemplo, a Figura 5.2 mostra a distribuição de retornos de dois portfolios com o mesmo valor esperado. Neste caso, o portfolio B é mais atraente, pois está associado a um menor desvio padrão de retorno – o risco de se obter um nível de retorno insatisfatório neste portfolio é menor que no portfolio A.

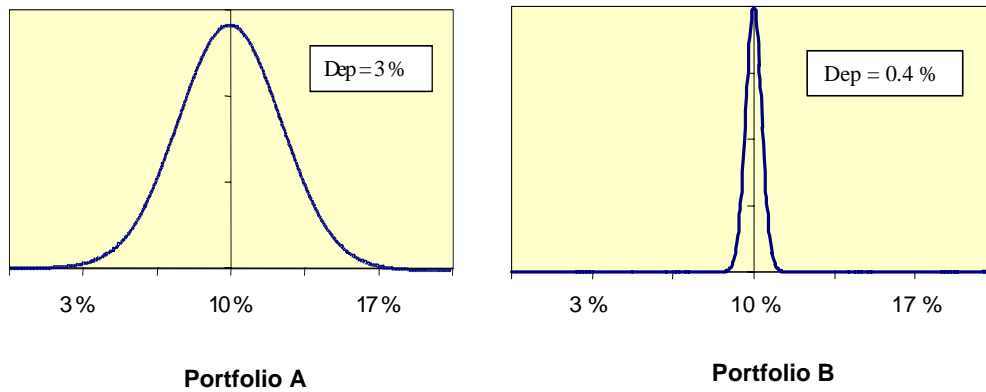


Figura 5.2 – Medida de Risco

Denotando por  $\{r_1, \dots, r_n\}$  os valores esperados e  $\{v_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n\}$  a matriz de variância-covariância dos retornos dos ativos, então um portfólio formado pela proporção  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de recursos a ser investido em cada ativo tem como valor esperado do retorno:

$$x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n \quad (5-1)$$

e variância

$$\sum_{i,j} x_i v_{ij} x_j \quad (5-2)$$

O problema de otimização de portfólios de Markowitz pode ser formulado como:

$$\text{Min} \sum_{i,j} x_i v_{ij} x_j$$

Sujeito a

$$x_1 + \dots + x_n = 1$$

$$x_1 r_1 + \dots + x_n r_n = r \quad (5-3)$$

Onde  $r$  é o retorno esperado especificado para o portfólio. No problema de otimização acima, para cada valor de  $r$  é calculado o portfólio de variância mínima cujo valor esperado de retorno é igual a  $r$ . A relação desvio padrão do portfólio de variância mínima  $\times$  retorno associado é expressa como uma hipérbole chamada de fronteira de portfólios de variância mínima, e tem um aspecto ilustrado na Figura 5.3.

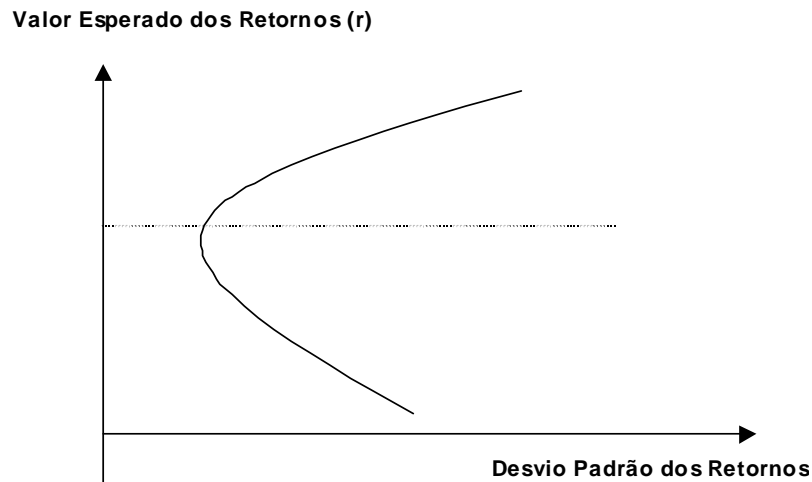


Figura 5.3 – Portfólios de Variância Mínima

Pode-se observar na Figura 5.3 que para cada valor de desvio padrão existem dois valores esperados associados para o retorno do portfólio – um na parte superior da curva e outro na parte inferior. O portfólio de interesse é o que corresponde a parte superior da curva chamada de fronteira eficiente.

A fronteira eficiente expressa quantitativamente o *trade-off* risco x retorno ao associar um maior retorno para portfólios de maior risco. A escolha de um portfólio específico nesta fronteira é função do perfil de risco do investidor.

Uma propriedade importante do conjunto de soluções do problema (5-3) é que qualquer combinação convexa de portfólios da fronteira eficiente é um portfólio da fronteira eficiente. Isto implica que se todos investidores se posicionarem na fronteira eficiente o portfólio de mercado (portfólio resultante da agregação dos portfólios de todos investidores) irá pertencer também a esta fronteira.

Uma consequência importante da teoria de Markowitz é o modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), proposto por William Sharpe [13], que relaciona os retornos de um ativo ou portfólio com os retornos do portfólio de mercado. Para um dado ativo ou portfólio  $p$  seja  $r^p$  o seu retorno esperado. Então,

$$r^p = r_0 + \beta(r^M - r_0) \quad (5-4)$$

Onde

- $r_0$  retorno associado ao ativo livre de risco (caderneta de poupança ou Letras do Tesouro Americano, por exemplo)
- $\beta$  razão entre a covariância dos retornos do ativo ou portfolio com os retornos do portfolio de mercado, e a variância dos retornos do portfolio de mercado
- $r^M$  retorno esperado do portfolio de mercado.

De acordo com o modelo CAPM se os retornos de um determinado ativo são positivamente correlacionados com os retornos do portfolio de mercado então seu retorno esperado deverá exceder a taxa livre de risco.

## 5.2

### Value at risk (VaR)

O desvio padrão dos retornos é uma medida atraente de riscos, mas seu grande problema é que penaliza igualmente flutuações negativas e positivas dos retornos em torno do seu valor esperado. A distorção introduzida por esta medida é tão mais aguda quando maior for a assimetria da distribuição dos retornos dos ativos como é o caso de opções [8] e [9]. Na abordagem VaR, tentamos quantificar o risco analisando a máxima perda ou *pior* ocorrência a um dado nível de probabilidade como ilustrado na Figura 5.4.

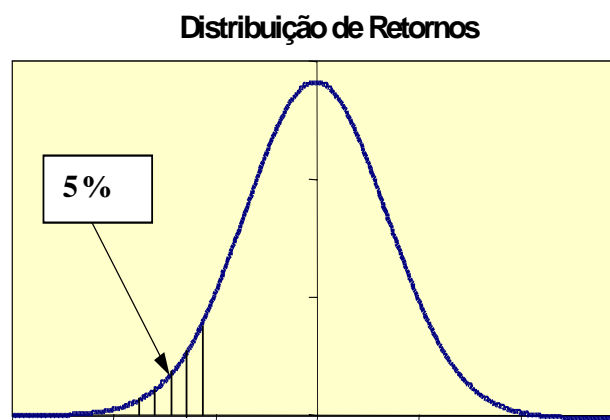


Figura 5.4 – O Conceito de VaR

Considere por exemplo um gerador que tem um contrato no montante de 100 MW médios mensais a um preço de energia de \$ 30 /MWh. O valor do contrato em um determinado mês é igual a:

$$x = q(P - S) \quad (5-5)$$

onde:

$S$  valor do preço spot no mês

$Q$  quantidade de energia contratada no mês (73000MWh)

$P$  preço de contrato (\$30/MWh)

A variação de valor de contrato é igual a:

$$\Delta x = -q\Delta s \quad (5-6)$$

Vamos supor que  $\Delta s/s$ , onde  $\Delta s$  é a variação mensal do preço spot, tem uma distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de 5% .Então,

$$\sigma(\Delta s) \cong s\sigma\left(\frac{\Delta s}{s}\right) = 0.05s \quad (5-7)$$

$$\sigma(\Delta x) = 0.05qs = 73000 \times 0.05s \quad (5-8)$$

Se em determinado mês o preço spot é igual a \$ 20 / MWh a perda máxima de valor de contrato para o próximo mês a um nível de probabilidade de 5% é igual a:

$$\$1 + 65 \times 73000 \times 0.05 \times 20 = \$120450 \quad (5-9)$$

### 5.3

#### Downside Risk

O “downside risk” [5] penaliza somente os retornos inferiores a um determinado valor (retorno de referência) especificado pelo investidor Este tipo de abordagem é interessante pois com ela o investidor se neutraliza contra baixos retornos sem abrir mão de possíveis ganhos elevados. A Figura 3.4 mostra a distribuição de retornos de dois portfólios.

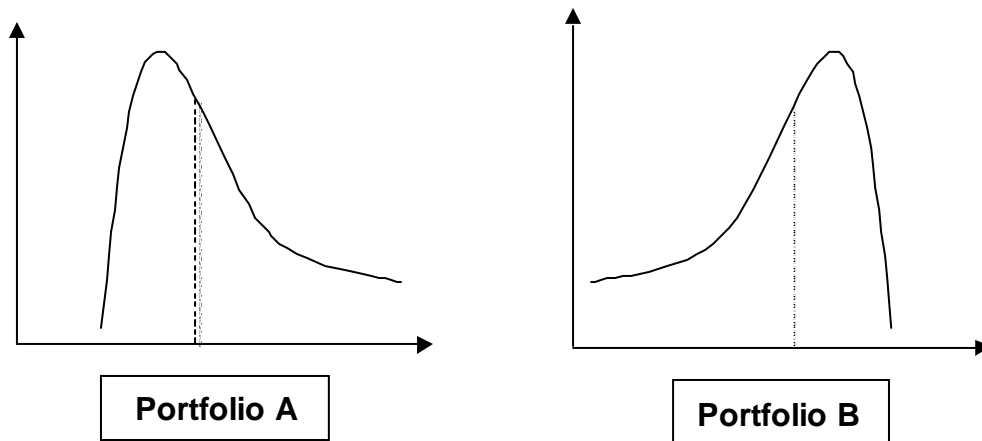


Figura 5.5 – Distribuições de Retorno Assimétricas

O valor esperado e desvio padrão e retornos dos dois são iguais, no entanto o portfólio A é mais atraente pois tem maiores probabilidades de ganhos elevados. Isto é o “downside risk” do portfólio B é maior.

O esquema de otimização de portfólio de Markowitz pode ser estendido de várias maneiras para contemplar o downside risk como medida de risco [15]. Será descrita a seguir uma forma baseada em cenários de realização de retornos.

Para  $k = 1, \dots, K$  seja  $\{\xi_{1k}, \dots, \xi_{nk}\}$  o vetor de retornos dos ativos  $\{1, \dots, n\}$  no cenário  $k$  e  $p_k$  a probabilidade associada a este cenário. Um portfólio definido pela proporções  $(x_1, \dots, x_n)$  do recurso a ser investido em cada ativo tem como retorno no cenário  $k$ :

$$x_1 \xi_{1k} + \dots + x_n \xi_{nk} \quad (5-10)$$

A deficiência deste retorno com relação a um retorno de referência  $\eta$  é igual a:

$$\eta_k = \begin{cases} \eta - (x_1 \xi_{1k} + \dots + x_n \xi_{nk}) & \text{se } \eta \geq x_1 \xi_{1k} + \dots + x_n \xi_{nk} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} \quad (5-11)$$

O downside risk do portfolio a um retorno de referência  $\eta$  é igual a:

$$\sum_k \rho_k \eta_k \quad (5-12)$$



O problema de otimização de portfólios sob a ótica de downside risk a um retorno de referência  $\eta$  é então:

$$\text{Max} \sum_k \rho_k (x_1 \xi_{1k} + \dots + x_n \xi_{nk} - \lambda y_k)$$

Sujeito a

$$x_1 \xi_{1k} + \dots + x_n \xi_{nk} + y_k \geq \eta, k = 1, \dots, K \quad (5-13)$$

$$x_1 + \dots + x_n = 1$$

$$y_k \geq 0, k = 1, \dots, K$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de penalidade. No problema (5-13) cada variável  $y_k$  fornece uma medida de quanto o retorno do portfólio definido por  $(x_1, \dots, x_n)$  é inferior ao retorno de referência  $\eta$  no cenário  $k$ . O downside risk do portfólio ótimo pode ser escrito como:

$$\sum_k \rho_k y_k \quad (5-14)$$

A função objetivo do problema (5-13) é o valor esperado do retorno do portfólio subtraído de uma penalidade  $\lambda$  multiplicada pelo downside risk. Esta penalidade expressa o trade-off entre o valor esperado dos retornos e o downside risk: quanto maior for seu valor menor vai ser o risco associado ao portfólio ótimo.

Após a solução do problema (5-13) para diferentes valores de  $\lambda$  pode-se traçar a fronteira eficiente como ilustrado na Figura 5.6.

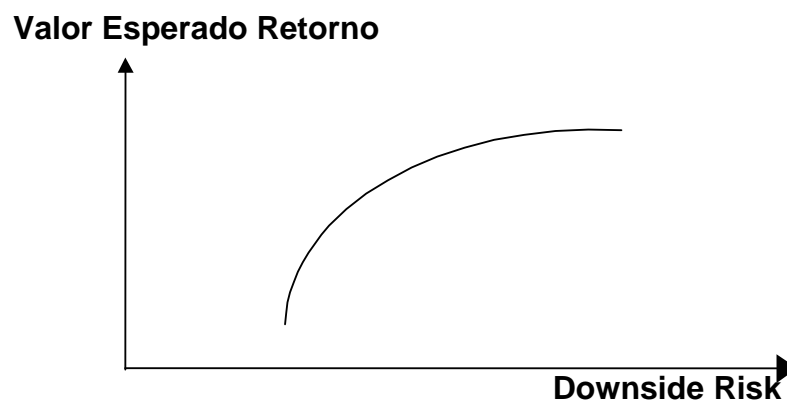


Figura 5.6 – Fronteira Eficiente – Downside Risk

Em um contexto semelhante, a referência [2] define o conceito de arrependimento. Seja  $v_k$  o valor de um dado portfolio em um dado horizonte se ocorrer o cenário  $k$  (“mark-to-future” do portfolio) e  $v_{ref}$  um valor de referência (benchmark).

Se  $\Delta_k = v_k - v_{ref}$  é positivo o arrependimento no cenário  $k$  é nulo, caso contrário ele é igual ao valor absoluto de  $\Delta_k$ . O arrependimento em um dado cenário pode ser interpretado como sendo o valor a ser pago por uma seguradora caso o portfolio fosse segurado contra um valor futuro abaixo do valor de referência. Observe que a seguradora não pagaria nada nos cenários em que o valor futuro do portfolio fosse superior ao valor de referência e nos cenários em que seu valor futuro fosse inferior ao benchmark ela pagaria o montante das perdas. O valor do arrependimento seria então o prêmio de tal seguro.

Outra interpretação é que o valor do arrependimento seria o prêmio de uma opção de venda associada ao portfolio cujo o preço de exercício seria o valor de referência, e maturidade o horizonte de tempo sob consideração.

Na mesma referência define-se o *upside* no cenário  $k$  como sendo o valor de  $\Delta_k$  quando este é positivo. Isto é, o *upside* é o complemento do arrependimento. O *upside* pode ser interpretado como sendo a remuneração de uma opção de compra associada ao portfolio cujo o preço de exercício seria o valor de referência, e maturidade o horizonte de tempo sob consideração. Seu valor poderia então ser igual ao prêmio de tal opção.

Com estes dois conceitos o valor de mercado do portfolio, levando em consideração seu risco, seria igual ao valor de *upside*  $U$  – valor de arrependimento  $A$ . No caso geral poderia se considerar um peso de aversão ao risco  $\lambda$  e valorar o portfolio por  $U - \lambda A$ .

Para um dado montante de recursos  $P_0$  seja o portfolio definido pelo vetor de proporções  $(x_1, \dots, x_n)$  de recursos a ser investido em cada ativo, e  $U(x_1, \dots, x_n)$  e

$A(x_1, \dots, x_n)$  o *upside* e arrependimento associados como função de  $x_1, \dots, x_n$ . O problema de otimização de portfolio nesta ótica é:

$$\begin{aligned} & \text{Max} U(x_1, \dots, x_n) - \lambda A(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{Sujeito a} \\ & \quad x_1 + \dots + x_n = 1 \end{aligned} \tag{5-15}$$

Pode-se mostrar que sob determinadas condições, o problema de otimização acima é equivalente ao problema (5-13). As idéias apresentadas nesta seção são naturalmente estendidas para quando o valor de benchmark para a avaliação de riscos do portfolio é também dependente do cenário  $k$ .

## 5.4

### Arrependimento

O “arrependimento” é relativo a cada combinação de decisão e cenário. É a diferença entre o custo real (sob incerteza) e o custo incorrido se houvesse conhecimento prévio de que determinado cenário ocorreria (conhecido como custo de referência). O critério de arrependimento *minimax*, que serve para minimizar o arrependimento máximo relativo a cada cenário [7], tem sido utilizado com métrica de risco (sobretudo para problemas de expansão da geração sob incerteza). Sua desvantagem é preparar de maneira “conservadora” o portfólio para perdas muito severas mas de baixa probabilidade, conforme observado em [6].

## 5.5

### Funções de Utilidade

O princípio da “utilidade esperada”, estabelecido por John von Neuman e Oskar Morgenstern em [22], permite valorar a distribuição de probabilidade dos possíveis resultados de uma decisão e, portanto, estabelecer a preferência entre as decisões associadas a estas distribuições de probabilidade de resultados.

Como mencionado anteriormente, ao contrário de algumas métricas de risco, que só levam em conta no processo decisório as perdas que podem ocorrer, analisando, por exemplo, apenas um dado percentil da distribuição da variável em questão, a função de utilidade (FU) leva em consideração toda a gama de cenários, “traduzindo” receitas financeiras em “unidades de utilidade”. O objetivo passa a ser maximizar a utilidade esperada, onde a função utilidade do agente passa a descrever sua atitude frente ao risco (seu “perfil de risco”), que pode ser de aversão, neutralidade ou propensão a risco.

Por exemplo, um investidor avesso a risco apresentaria uma FU côncava, como se vê na Figura 5.7a. Neste caso, a perda devida a um “mau” resultado não é “compensada” pelo ganho advindo de um “bom” resultado de mesma magnitude. Já um investidor indiferente a riscos apresentaria uma FU linear, como na Figura 5.7b. Isto significa que um aumento de receita tem o mesmo impacto que uma redução. Finalmente, um investidor que arrisca (propenso a risco) teria uma função de utilidade convexa, conforme se vê na Figura 5.7c.

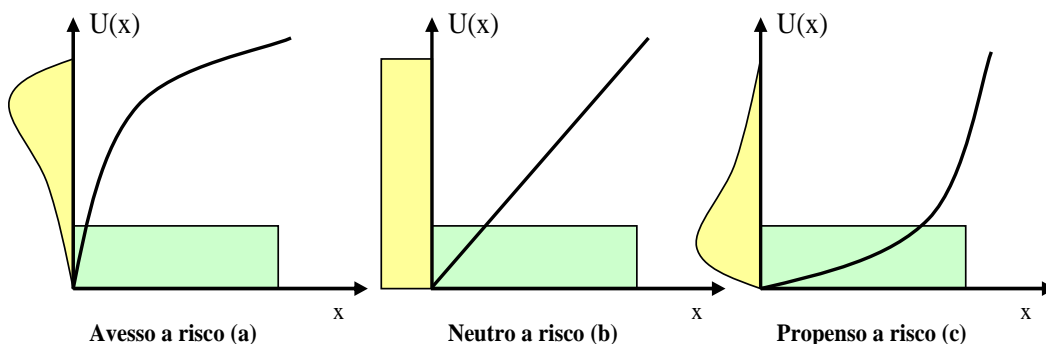


Figura 5.7 – Tipos de Função de Utilidade

### 5.5.1

#### O Equivalente à Certeza

Seja  $R$  a variável aleatória que representa a receita da usina (em \$); seja  $U(R)$  a função de utilidade associada (em unidades de utilidade). A seguir, digamos que  $E[U]$  represente o valor esperado de  $U(R)$  sobre todos os possíveis valores de  $R$  (em unidades de utilidade). Por fim, calculemos o inverso de  $E[U]$ ,  $U^{-1}(E[U])$  (em \$).

Este último valor, conhecido como “equivalente à certeza”, pode ser interpretado como o “valor monetário” do ativo. Em outras palavras, o proprietário da usina seria indiferente (isto é, teria a mesma utilidade) entre receber um pagamento *fixo* de  $\$U^{-1}(EU)$  ou receber as receitas estocásticas da venda de energia.

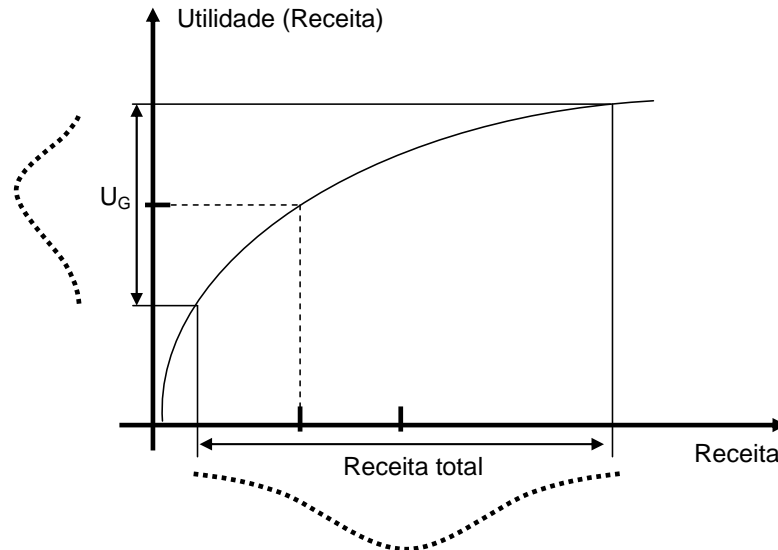


Figura 5.8 – Cálculo do Equivalente a Certeza (avesso a risco)

Por exemplo, se o investidor é indiferente a risco, sua função utilidade é linear e então  $EU = E[U(R)] = U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) = E(R)$ . Neste caso o equivalente a certeza é igual ao valor esperado das receitas. Se o investidor é avesso a risco, sua função utilidade é côncava e pela desigualdade de Jansen [16],  $EU = E[U(R)] \leq U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) \leq E(R)$ . Neste caso o equivalente a certeza é inferior ao valor esperado das receitas. Se o investidor é propenso a risco, sua função utilidade é convexa e pela desigualdade de Jansen [16],  $EU = E[U(R)] \geq U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) \geq E(R)$ . Neste caso o equivalente a certeza é superior ao valor esperado das receitas.

### 5.5.2

#### Exemplo

A Figura 3.9 mostra uma possível função de utilidade que possui dois segmentos separados por um ponto dado correspondente a renda de \$ 20.

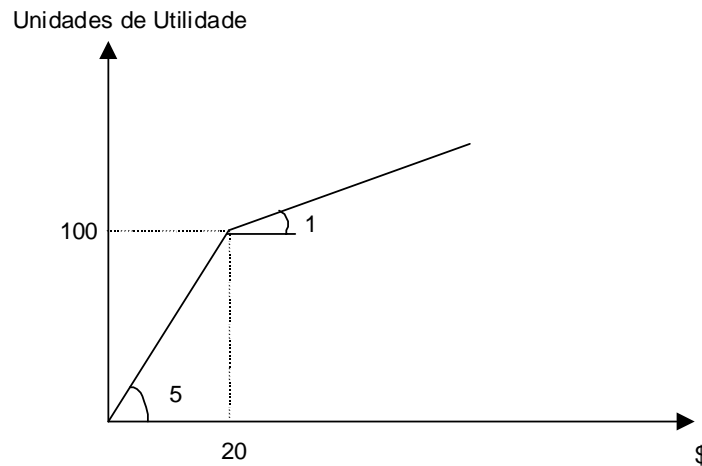


Figura 5.9 – Possível Função Utilidade

Vamos supor que existem quatro cenários para renda com igual probabilidade:

$$R_1 = \$0; R_2 = \$15; R_3 = \$30; R_4 = \$45 \quad (5-16)$$

O valor esperado da renda é então:

$$E[R] = 0.25 \times \$0 + 0.25 \times \$15 + 0.25 \times \$30 + 0.25 \times \$45 = \$77.5 \quad (5-17)$$

Por sua vez, a utilidade esperada é:

$$E[U(R)] = 0.25 \times 0 + 0.25 \times 75 + 0.25 \times 110 + 0.25 \times 125 = 77.5 \quad (5-18)$$

O equivalente à certeza deste fluxo de renda (ver Figura 5.10) é igual a  $U^{-1}(77.5) = \$15.5$ , o que corresponde a um desconto de 30 % com relação ao valor esperado da renda. Ou seja, dada a dispersão da renda e a aversão a risco do investidor o valor atribuído ao fluxo de caixa é menor que seu valor esperado. Para investidores indiferentes, avessos ou que têm atração por riscos (funções utilidade linear, côncava e convexa respectivamente) o equivalente a certeza é igual, menor ou maior que o valor esperado da renda, respectivamente.

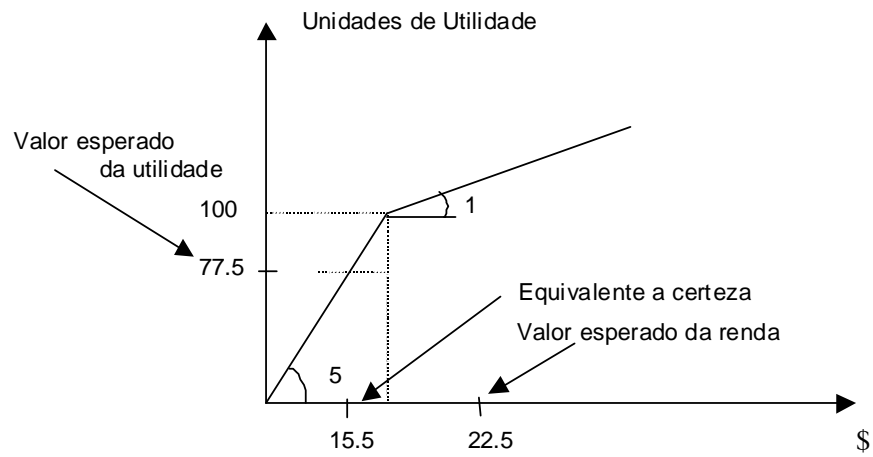


Figura 5.10 – Equivalente a Certeza