3
Equações de Pfaff

3.1
Campos de Pfaff

Seja X um esquema sobre k. Suponhamos que X é liso e de dimensão pura $n \geq 2$.

Definição 3.1 Seja a um inteiro tal que $0 < a < n$. Uma equação de Pfaff de posto a em X é uma equação $\sigma = 0$, em que σ é uma seção diferente de zero de $\Omega_X^a \otimes \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um feixe invertível.

Exemplo 3.2 Seja $\omega \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m))$ uma seção diferente de zero. Então ω define uma equação de Pfaff de posto 1.

Da seqüência de Euler (1-2) tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ obtemos a seqüência exata curta

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)^{\oplus n+1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m) \to 0. \tag{3-1}$$

Considerando a seqüência longa de cohomologia, podemos extrair a seqüência exata:

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)^{\oplus n+1}) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)).$$

Seja $R := k[X_0, \ldots, X_n]$, e seja $R_j \subset R$ o subespaço de polinômios homogêneos de grau j, para cada $j \geq 0$. Dos isomorfismos

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) &\cong R_m \text{ (Teorema 1.3)} \\ H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)^{\oplus n+1}) &\cong \bigoplus_{i=0}^{n} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{n} R_{m-1} \text{ (Teorema 1.3)} \end{aligned}$$

e da seqüência exata acima, vemos que podemos associar a cada $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m))$ uma única $(n+1)$-upla de polinômios homogêneos

$F_0, \ldots, F_n$ de grau $m-1$, tal que $X_0F_0 + \cdots + X_nF_n = 0$. Dizemos que $\omega = \sum F_i\, dX_i$.

Observemos que $m \geq 2$. De fato, $m \geq 1$, pois nenhum polinômio pode ter grau negativo. Mas, se $m = 1$, a única $(n+1)$-upla de polinômios constantes $(F_0, \ldots, F_n)$ tal que $\sum_i X_iF_i = 0$ é a upla zero, que não é permitida.

Definição 3.3 O lugar singular de uma equação de Pfaff $\sigma = 0$ é o subesquema fechado de X cujo feixe de ideais é a imagem do morfismo

$$(\Omega_X^a)^\vee \otimes \mathcal{N}^\vee \xrightarrow{\sigma^\vee} \mathcal{O}_X$$

Exemplo 3.4 Voltemos rapidamente ao Exemplo 3.2. Se $\mathcal{S}$ é o lugar singular de $\omega = 0$, e $\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}_k^n}$ é o seu feixe de ideais, então temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} T_{\mathbb{P}_k^n}(-m) \arrow[rr, "\omega^\vee"] \arrow[dr, two heads] & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \\ & \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}_k^n} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Sejam Y um subesquema fechado de X e $\mathcal{I}_{Y,X}$ o feixe de ideais de Y em X. Consideremos a seqüência exata (veja [5], Proposição II.8.12, página 176)

$$\frac{\mathcal{I}_{Y,X}}{\mathcal{I}_{Y,X}^2} \xrightarrow{\overline{d}} \Omega_X^1|_Y \xrightarrow{\beta} \Omega_Y^1 \longrightarrow 0, \tag{3-2}$$

como fizemos em (2-1).

Tendo em mente a definição na página 138 de [6], fazemos a definição seguinte:

Definição 3.5 Uma solução de uma equação de Pfaff $\sigma = 0$, de posto a, é um subesquema fechado $Y \subset X$ de codimensão pura a, tal que o morfismo abaixo é nulo:

$$(\wedge^a \overline{d}) \wedge (\sigma \otimes \mathcal{N}^\vee)|_Y : (\bigwedge^a \frac{\mathcal{I}_{Y,X}}{\mathcal{I}_{Y,X}^2}) \otimes \mathcal{N}^\vee|_Y \longrightarrow \bigwedge^2 \Omega_X^a|_Y.$$

Exemplo 3.6 Seja $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ um polinômio homogêneo de grau d, livre de quadrados. Seja

$$\omega = F_0dX_0 + \cdots + F_ndX_n$$

uma seção diferente de zero de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Se existir uma 2-forma

$$\theta_F \in \bigwedge^2 \ \Omega^1_{k[X_0,\ldots,X_n]|k}$$

tal que $\omega \wedge dF = F\theta_F$, então a hipersuperfície H dada por $F = 0$ em $\mathbb{P}^n_k$ é uma solução da equação de Pfaff $\omega = 0$.

De fato, $\omega \wedge dF = F\theta_F$ se e somente se

$$F|(F_i\frac{\partial F}{\partial X_j} - F_j\frac{\partial F}{\partial X_i})$$

para todo $i, j = 0, \ldots, n$ com $i \neq j$. Por outro lado, para garantirmos que

$$\overline{d} \wedge (\omega \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m))|_H : \frac{\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{H,\mathbb{P}^n_k}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m)|_H \longrightarrow \bigwedge^2 \Omega^1_X|_H \qquad (3\text{-}3)$$

é zero, basta verificarmos que o homomorfismo correspondente de módulos graduados é zero.

Seja $I = (F)$, e tome $G \in I$. Então existe $G' \in k[X_0, \ldots, X_n]$ para o qual $G = FG'$. O homomorfismo de módulos associado ao morfismo (3-3) leva $(G + I^2) \otimes (P + I)$ na classe módulo F de $dG \wedge P\omega$. Mas

$$\begin{aligned} dG \wedge P\omega \ &\equiv G'P\Big(\sum \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i \wedge \omega\Big) \equiv \\ &\equiv G'P\Big(\sum_{i<j}(F_j\frac{\partial F}{\partial X_i} - F_i\frac{\partial F}{\partial X_j})dX_i \wedge dX_j\Big) \ (\mathrm{mod}\ F). \end{aligned}$$

Logo $dG \wedge P\omega \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ F)$ para todo $G \in I$ e todo P se e somente se

$$F|(F_i\frac{\partial F}{\partial X_j} - F_j\frac{\partial F}{\partial X_i})$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Suponha agora que X é um esquema sobre k de dimensão n, não necessariamente liso ou equidimensional. Sejam $\mathcal{L}$ um feixe invertível sobre X e b um inteiro tal que $0 < b < n$.

Definição 3.7 Um morfismo $\eta : \Omega^b_X \rightarrow \mathcal{L}$ diferente de zero é dito um campo de Pfaff de posto b (veja a definição na página 3781 de [19]). O lugar singular $\mathcal{S}$ de η é o subesquema fechado de X cujo feixe de ideais $\mathcal{I}_{\mathcal{S},X}$ é a imagem do morfismo induzido

$$\Omega^b_X \otimes \mathcal{L}^\vee \xrightarrow{\eta\otimes\mathcal{L}^\vee} \mathcal{O}_X.$$

Um subesquema fechado Y de X é dito invariante pelo campo de Pfaff η se a restrição $\eta|_Y : \Omega^b_X|_Y \longrightarrow \mathcal{L}|_Y$ fatora-se pelo mapa $(\wedge^b\beta) : \Omega^b_X|_Y \longrightarrow \Omega^b_Y$, em que β é o morfismo de restrição de formas diferenciais que aparece em (3-2). Ou seja, Y é invariante por η se existe um morfismo $\varphi : \Omega^b_Y \to \mathcal{L}|_Y$ que torna o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^b_X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d] \\
\Omega^b_X|_Y \arrow[r, "\eta|_Y"] \arrow[d, "\wedge^b\beta"'] & \mathcal{L}|_Y \arrow[d, equal] \\
\Omega^b_Y \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{L}|_Y
\end{tikzcd}$$

em que os primeiros morfismos verticais são os mapas naturais de restrição.

Observação 3.8 Sejam X um esquema liso de dimensão pura n e a um número inteiro positivo. Defina $b := n - a$. Temos um isomorfismo

$$\Omega^a_X \cong (\Omega^b_X)^\vee \otimes \Omega^n_X.$$

De fato, podemos analisar o que ocorre localmente. Seja $U = \mathrm{Spec}(A)$ uma vizinhança afim de X na qual temos uma trivialização de Ω^1_X, ou seja, $\Omega^1_X(U)$ é um A-módulo livre de posto n. Denotemos este módulo por M. Consideremos o seguinte homomorfismo canônico de A-módulos

$$\begin{array}{rlcl} \tau_a : & \bigwedge^a M \otimes \bigwedge^{n-a} M & \to & \bigwedge^n M \\ & m_1 \wedge \ldots \wedge m_a \otimes m'_1 \wedge \ldots \wedge m'_{n-a} & \mapsto & m_1 \wedge \ldots \wedge m_a \wedge m'_1 \wedge \ldots \wedge m'_{n-a} \end{array}$$

De τ_a obtemos o homomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} \overline{\tau}_a : & \bigwedge^{n-a} M \otimes (\bigwedge^n M)^* & \to & (\bigwedge^a M)^* \\ & x \otimes \phi & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \phi_x : \bigwedge^a M & \to & A \\ m & \mapsto & \phi(\tau_a(m \otimes x)) \end{array} \right. \end{array}$$

Um cálculo simples, usando uma base de M, mostra que $\overline{\tau}_a$ é um isomorfismo de A-módulos, ou seja,

$$\bigwedge^{n-a} M \otimes \left(\bigwedge^n M\right)^* \cong \left(\bigwedge^a M\right)^*. \tag{3-4}$$

Os isomorfismos locais $\overline{\tau}_a$ são naturais e compatíveis. Assim, definem um isomorfismo global,

$$\Omega_X^{n-a} \otimes (\Omega_X^n)^\vee \cong (\Omega_X^a)^\vee,$$

donde, após dualização, obtemos o isomorfismo mencionado no inicio.

Observação 3.9 Vejamos a relação entre equações de Pfaff e campos de Pfaff sobre um esquema X liso e de dimensão pura n.

Uma equação de Pfaff de posto a é dada por um elemento de $H^0(X, \Omega_X^a \otimes \mathcal{N})$. Definamos $b := n - a$. Como X é liso e equidimensional, então o feixe Ω_X^1 é localmente livre de posto n, e o morfismo

$$\tau_b : \Omega_X^b \otimes \Omega_X^a \longrightarrow \Omega_X^n$$

é um emparelhamento perfeito. Portanto, $\Omega_X^a \cong (\Omega_X^b)^\vee \otimes \Omega_X^n$ (veja a Observação (3.8)).

Temos então que

$$\begin{aligned} H^0(X, \Omega_X^a \otimes \mathcal{N}) &\cong \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, (\Omega_X^b)^\vee \otimes \Omega_X^n \otimes \mathcal{N}) \\ &\cong \operatorname{Hom}(\Omega_X^b, \Omega_X^n \otimes \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Portanto, temos uma equivalência entre equações de Pfaff e campos de Pfaff no caso em que X é liso e equidimensional: à equação $\sigma = 0$ associamos o campo $\eta := (\tau_b \otimes \mathcal{N}) \circ (\sigma \otimes \Omega_X^b)$.

Observação 3.10 Supondo que X é liso e de dimensão pura n, então o lugar singular de um campo de Pfaff η é igual ao lugar singular da equação de Pfaff $\sigma = 0$ correspondente. De fato, dois subesquemas são iguais se eles são localmente iguais. Localmente, tomando parâmetros locais $t_1, \ldots, t_n$ e uma trivialização de $\mathcal{N}$, uma seção de $\Omega_X^a \otimes \mathcal{N}$ é uma soma

$$\sigma = \sum f_{i_1,\ldots,i_a} dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_a},$$

onde os $f_{i_1,\ldots,i_a}$ são funções regulares. O lugar singular da equação de Pfaff é o lugar dos zeros destas funções.

Por outro lado, o campo de Pfaff correspondente leva $dt_{j_1} \wedge \ldots \wedge dt_{j_b}$ em

$$f_{i_1,\ldots,i_a} dt_{j_1} \wedge \ldots \wedge dt_{j_b} \wedge dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_a},$$

onde

$$\{i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots, j_b\} = \{1, \cdots, n\}.$$

Assim, o lugar singular do campo de Pfaff é também dado pelos mesmos $f_{i_1,\ldots,i_a}$.

No caso em que X é uma variedade lisa de dimensão pura n, a Proposição 3.2 em [19] mostra que, em condições razoáveis, soluções de uma equação de Pfaff são subesquemas invariantes pelo campo de Pfaff correspondente. Enunciamos abaixo este resultado:

Proposição 3.11 *Sejam X um esquema liso equidimensional, $\eta : \Omega^b_X \to \mathcal{L}$ um campo de Pfaff, S o lugar singular de η e $\sigma = 0$ a equação de Pfaff correspondente. Seja Y um subesquema fechado de X, e suponha que Y é reduzido de dimensão pura b, e que nenhuma componente de Y está contida em S. Então Y é invariante por η se e somente se Y é uma solução de $\sigma = 0$.*

Observação 3.12 Para definirmos equações ou campos de Pfaff não é necessário supormos que o esquema X é liso e equidimensional. Entretanto, para termos uma equivalência entre equações de Pfaff e campos de Pfaff precisamos destas hipóteses.

Com relação aos subesquemas que são soluções de equações de Pfaff de posto a fizemos uma restrição na sua codimensão. Esta restrição também não é necessária. Entretanto, como usamos resultados que exigem esta restrição, a saber Teoremas 1.15 e 1.16, achamos conveniente acrescentá-las à definição. Além disso, no caso de equações de Pfaff integráveis, as folhas têm codimensão igual ao posto da equação, então soluções desta codimensão são particularmente relevantes.

Exemplo 3.13 Voltemos brevemente ao Exemplo 3.6. Pela Proposição 3.11 vemos que a procura por polinômios F que satisfazem a equação $\omega \wedge d\, F = F\ \theta_F$ equivale à procura por hipersuperfícies invariantes pelo campo de Pfaff associado à equação $\omega = 0$.

Seja m um número inteiro positivo. Seja ω uma seção global diferente de zero de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Então, como vimos na Observação 3.9, ω induz um campo de Pfaff de posto $n-1$, a saber :

$$\eta\ :\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\omega\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}} \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \xrightarrow{\tau\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)} \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(m),$$

em que τ é o emparelhamento perfeito:

$$\begin{array}{rccc} \tau = \tau_1 : & \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} & \longrightarrow & \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k} \\ & x\otimes x_1\wedge\ldots\wedge x_{n-1} & \longmapsto & x\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_{n-1}. \end{array}$$

Como $\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1)$, temos então que η tem coeficientes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-n-1)$.

Teorema 3.14 *Suponha $n \geq 2$. Sejam $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m))$ uma seção diferente de zero, e $\mathcal{S}$ o lugar singular da equação de Pfaff $\omega = 0$. Sejam $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma hipersuperfície reduzida de grau d, Σ o lugar singular de H e $\sigma := \operatorname{reg}(\Sigma)$ a sua regularidade. Se H é uma solução da equação reduzida $\omega = 0$, se nenhuma componente de H está contida em $\mathcal{S}$, e se a característica de k é $p \geq 0$ com $p \nmid d$, então*

$$d \leq \begin{cases} m-1, & se\ \rho \leq 0 \\ m-1+\rho, & se\ \rho > 0 \end{cases}$$

onde $\rho := \sigma - d + 2$.

Demonstração:

Denotemos por η o campo de Pfaff induzido por ω. Se H é solução de $\omega = 0$, então, pela Proposição 3.11, H também é invariante por η. Portanto, existe um morfismo $\varphi : \Omega^{n-1}_H \to \mathcal{O}_H(m-n-1)$ de $\mathcal{O}_H$-módulos fazendo o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-n-1) \arrow[d] \\
\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}|_H \arrow[r] \arrow[d, "\wedge^{n-1}\beta"'] & \mathcal{O}_H(m-n-1) \\
\Omega^{n-1}_H \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Seja

$$\mathcal{I} := \operatorname{Im}(\varphi \otimes \mathcal{O}_H(-m+n+1)) \subseteq \mathcal{O}_H.$$

Como $\wedge^{n-1}\beta$ é um morfismo sobrejetivo, para determinarmos $\mathcal{I}$ basta identificarmos a imagem $\mathcal{J}$ de $\eta \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+n+1)$. Pela Observação 3.10, temos que $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}$, e portanto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}\mathcal{O}_H = \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap H, H}$.

Como $\Sigma \subseteq H$ é o subesquema das singularidades de H, ou seja, o esquema de zeros do primeiro ideal de Fitting de Ω^1_H, da seqüência

$$\frac{\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{H,\mathbb{P}^n_k}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_H \stackrel{\beta}{\longrightarrow} \Omega^1_H \longrightarrow 0$$

induzimos o homomorfismo

$$\frac{\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{H,\mathbb{P}^n_k}} \otimes \Omega^{n-1}_H \longrightarrow \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}|_H,$$

cuja imagem é $\mathcal{I}_{\Sigma,H} \otimes \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}|_H$. Do homomorfismo acima obtemos o homomorfismo

$$\Omega^{n-1}_H \longrightarrow \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}|_H \otimes (\frac{\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{H,\mathbb{P}^n_k}})^\vee \cong \mathcal{O}_H(-n-1+d),$$

cuja imagem é $\mathcal{I}_{\Sigma,H}(-n-1+d)$. Observemos ainda que, pelo Teorema 7.11, na página 245 de [5], $\omega_H \cong \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}|_H \otimes (\frac{\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{H,\mathbb{P}^n_k}})^\vee$.

Como H é reduzida, logo genericamente lisa, temos que Σ tem codimensão pelo menos 1 em H. Além disso, como por hipótese nenhuma componente de H está contida em $\mathcal{S}$, também $\mathcal{S} \cap H$ tem codimensão pelo menos 1 em H. Temos portanto os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\Omega^{n-1}_H}{T(\Omega^{n-1}_H)} & \cong & \mathcal{I}_{\Sigma,H}(-n-1+d) \\ \frac{\Omega^{n-1}_H}{T(\Omega^{n-1}_H)} & \cong & \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap H,H}(m-n-1). \end{array}$$

Destes obtemos uma seguinte seqüência exata curta:

$$0 \to \mathcal{I}_{\Sigma,H}(-n-1+d) \to \mathcal{O}_H(m-n-1) \to \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap H}(m-n-1) \to 0. \quad (3\text{-}5)$$

Suponhamos primeiro que $\rho > 0$. Então

$$\begin{array}{rcll} H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1) & = & H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-n+1) & \text{(pela definição de } \rho) \\ & = & 0 & \text{(pois } \sigma = \mathrm{reg}(\Sigma)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} H^n(\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1)) & \cong & H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\rho-n-1)) & \text{(pois } H \text{ tem grau } d) \\ & = & 0 & \text{(pelo Teorema 1.3)} \end{array}$$

Considerando a cohomologia da seqüência exata de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$-módulos

$$0 \to \mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1) \to \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1) \to \mathcal{I}_{\Sigma,H}(\rho+d-n-1) \to 0,$$

obtemos a seqüência exata

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1)) \to H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(\rho+d-n-1)) \to H^n(\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(\rho+d-n-1)),$$

da qual concluímos que $H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(\rho+d-n-1)) = 0$.

Agora, tomando a cohomologia da seqüência exata (3-5), tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\rho)$, obtemos a seqüência exata

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(\rho+d-n-1)) \to H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1+\rho)) \to$$
$$\to H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap H}(m-n-1+\rho)).$$

Temos que $H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap H}(m-n-1+\rho)) = 0$, pois $\mathcal{S}\cap H$ tem dimensão no máximo $n-2$. Portanto

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1+\rho)) = 0. \tag{3-6}$$

Como na prova do Teorema 2.13, guardemos (3-6) para mais adiante.

Suponhamos agora que $\rho \leq 0$. Consideremos a seqüência exata

$$0 \to T(\Omega^{n-1}_H) \to \Omega^{n-1}_H \to \mathcal{I}_{\Sigma,H}(-n-1+d) \to 0$$

e tomemos a sua cohomologia para obter a seqüência exata

$$H^{n-1}(T(\Omega^{n-1}_H)) \to H^{n-1}(\Omega^{n-1}_H) \to H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1)) \to H^n(T(\Omega^{n-1}_H)).$$

Como $T(\Omega^{n-1}_H)$ é um feixe de torção em H, temos que

$$H^{n-1}(T(\Omega^{n-1}_H)) = H^n(T(\Omega^{n-1}_H)) = 0,$$

donde concluímos que

$$H^{n-1}(\Omega^{n-1}_H) \cong H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1)).$$

Da hipótese temos $d-2 \geq \sigma$. Portanto, segue do item (a) do Teorema 1.20 que

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1)) = H^{n-1}\Big(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-2-(n-1))\Big) = 0$$

e

$$H^n(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1)) = 0.$$

Agora, da seqüência exata

$$0 \to \mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1) \to \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1) \to \mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1) \to 0,$$

obtemos a seqüência exata de cohomologia

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1)) \to H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1)) \to$$
$$\to H^n(\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1)) \to H^n(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1))$$

e portanto

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1)) &\cong H^n(\mathcal{I}_{H,\mathbb{P}^n_k}(d-n-1)) \\ &\cong H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1)) && (H \text{ tem grau } d) \\ &\cong k && (\text{Teorema 1.3}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{S} \cap H$ tem dimensão no máximo $n-2$, temos que $H^{n-1}(\mathcal{O}_{H\cap\mathcal{S}}(m-n-1)) = 0$. Portanto, tomando cohomologia na seqüência (3-5), concluímos que o homomorfismo abaixo é sobrejetivo:

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(d-n-1)) \to H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1).$$

Podemos juntar todas estas conclusões no diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}) \arrow[r, "H^{n-1}(\eta)"] \arrow[d] & H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-n-1)) = 0 \arrow[d] \\ H^{n-1}(\Omega^{n-1}_H) \arrow[r, "H^{n-1}(\varphi)"] \arrow[d, "\wr"'] & H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1)) \\ k \cong H^{n-1}(\mathcal{I}_{\Sigma,H}(-n-1+d)) \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

onde o mapa inclinado é sobrejetivo, e o mapa vertical inferior é um isomorfismo. Assim $H^{n-1}(\varphi)$ é sobrejetivo. Pelo Teorema 1.15 ou Teorema 1.16, temos que o homomorfismo vertical superior à esquerda não é zero. Então existe $\gamma \in H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k})$ cuja imagem em $H^{n-1}(\Omega^{n-1}_H)$ não é zero. Denotemos esta imagem por α. Observemos que α é um gerador de $H^{n-1}(\Omega^{n-1}_H)$ e que sua imagem em $H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1))$ é zero. Como $H^{n-1}(\varphi)$ é sobrejetivo, concluímos que

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_H(m-n-1)) = 0. \tag{3-7}$$

Finalmente, pelo Teorema 1.5, temos que

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_H(i)) = H^0(\mathcal{O}_H(d-n-1-i))'.$$

Como $H^0(\mathcal{O}_H(d-n-1-i)) = 0$ se e somente se $d \leq n+i$, o teorema segue da igualdade (3-6) para $\rho > 0$, e de (3-7) para $\rho \leq 0$.

$\square$

Observação 3.15 Sejam $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^2_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(m-1)$ um campo vetorial de grau $m > 0$ e $\mathcal{S}$ seu lugar singular. O campo η corresponde à uma equação de Pfaff $\sigma = 0$, onde $\sigma \in H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(m+2))$ (veja a Observação 3.9) .

Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_k$ uma curva reduzida de grau d. Assuma que k é um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ com $p \nmid d$. Suponha que C é uma curva invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^2_k$ de grau m. Então pelo Teorema 3.14 concluímos que

$$d \leq \begin{cases} m+1, & \text{se } \rho \leq 0 \\ \\ m+1+\rho, & \text{se } \rho > 0. \end{cases}$$

Assim, vemos que o Teorema 3.14 generaliza o Teorema 0.2.

Observação 3.16 Sejam $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m))$ e $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma hipersuperfície reduzida. Suponha que ω é irredutível e não integrável, ou seja, $\omega \wedge d\omega \neq 0$. Se H é uma solução da equação de Pfaff $\omega = 0$, então $\deg(H) \leq 2m-3$.

De fato, suponha que H é dada por $F = 0$. Como H é uma solução de $\omega = 0$, existem um polinômio homogêneo $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ e uma 1 - forma $\eta \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(d))$ tais que $\omega = G\,dF + F\,\eta$ (veja [6], Proposição 4.1, página 126). Derivando ω obtemos

$$d\omega = dG \wedge dF + dF \wedge \eta + F\,d\eta,$$

e portanto que

$$w \wedge d\omega = w \wedge dG \wedge dF + \omega \wedge dF \wedge \eta + F\,\omega \wedge d\eta.$$

Da hipótese sobre H segue que $\omega \wedge dF = F\theta_F$, donde concluímos que

$$0 \neq w \wedge d\omega = -F\,dG \wedge d\theta_F + F\,\theta_F \wedge \eta + F\,\omega \wedge d\eta,$$

e portanto que $F \mid \omega \wedge d\omega$. Como $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m))$, segue que

$$\deg(H) \leq 2m-3.$$

Sejam m um inteiro positivo e ω uma seção global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ diferente de zero. Denotemos por η o campo de Pfaff induzido por ω, e por $\mathcal{K}$ o núcleo de $\omega^\vee$. Seja $\mathcal{S}$ o lugar singular de $\omega = 0$.

Suponhamos que $\mathcal{K}$ é um feixe localmente livre, e que $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2. Então existe uma outra forma de associarmos um campo de Pfaff à equação $\omega = 0$.

De fato, como $\mathcal{K}$ é localmente livre, temos uma resolução de comprimento 2 de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ por feixes localmente livres:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\eta_1} T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \xrightarrow{\omega^\vee} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}} \longrightarrow 0\,. \tag{3-8}$$

Tensorizando (3-8) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ e dualizando-a obtemos novamente uma seqüência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \xrightarrow{\eta_1^\vee} \mathcal{K}^\vee(-m)$$

De fato, basta observar que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = 0$ para $i = 0$ e $i = 1$, pois $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2 em $\mathbb{P}^n_k$ (veja [21], Proposição 18.4, página 454 e Teorema 18.7, página 455). Desta seqüência obtemos o seguinte campo de Pfaff de posto $n-1$

$$\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \xrightarrow{\wedge^{n-1}\eta_1^\vee} \bigwedge^{n-1}\Big(\mathcal{K}^\vee(-m)\Big). \tag{3-9}$$

Observação 3.17 Temos que $\bigwedge^{n-1}\mathcal{K} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n(m-1)+1)$. De fato, consideremos a resolução (3-8) de $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. Essa resolução nos dá uma seqüência exata curta de feixes localmente livres em $\mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}$, de onde, tomando determinantes, concluímos que

$$\bigwedge^{n-1}\mathcal{K}\Big|_{\mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}} \cong \bigwedge^{n} T_{\mathbb{P}^n_k}(-m)\Big|_{\mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}}.$$

Dualizando a seqüência de Euler, torcida por $-m$, e tomando determinantes, concluímos que

$$\bigwedge^{n} T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n(m-1)+1).$$

Logo

$$\bigwedge^{n-1}\mathcal{K}\Big|_{\mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n(m-1)+1)\Big|_{\mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}}.$$

Como, por hipótese, $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2 em $\mathbb{P}^n_k$, e estamos tratando de feixes invertíveis definidos em $\mathbb{P}^n_k$, temos um isomorfismo

$$\bigwedge^{n-1}\mathcal{K} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n(m-1)+1).$$

Pela Observação 3.17, temos que o campo $\wedge^{n-1}\eta_1^\vee$ é na verdade um mapa

$$\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1-n).$$

Apesar de o campo de Pfaff acima ter sido construído de outra forma, ele coincide localmente com o campo de Pfaff η, como veremos na prova da Proposição 3.18 abaixo, através do Teorema de Hilbert–Burch.

Proposição 3.18 *Sejam m um número inteiro positivo e ω uma seção global diferente de zero de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Suponha que o lugar singular $\mathcal{S}$ da equação de Pfaff $\omega = 0$ tenha codimensão pelo menos 2 em $\mathbb{P}^n_k$, e que o núcleo de $\omega^\vee$ seja um feixe localmente livre. Seja $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma hipersuperfície reduzida tal que nenhuma componente de H está contida em $\mathcal{S}$. Então, H é invariante pelo campo de Pfaff η se e somente se H é invariante pelo campo de Pfaff $\wedge^{n-1}\eta_1^\vee$.*

Demonstração: Como H é uma solução de $\omega = 0$, segue da Proposição 3.11 que H é invariante por η. Denotemos por $\mathcal{K}$ o núcleo de $\omega^\vee$. Por hipótese, $\mathcal{K}$ é localmente livre, e seu posto é $n-1$. Para provarmos a proposição, basta verificarmos o que ocorre localmente. Seja P o anel local de um ponto de $\mathbb{P}^n_k$. Consideremos os módulos de germes de seções de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$, de $\mathcal{I}_{S,\mathbb{P}^n_k}$ e de $\mathcal{K}$ neste ponto; denotemo-los por M, I e K, respectivamente. Então $I \subseteq P$. Visto que $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ e $\mathcal{K}$ são localmente livres, M e K são P-módulos livres, de postos n e $n-1$ respectivamente. Fixe uma base $m_1, \ldots, m_n$ para M, e também uma base para K. Então η_1 é descrito por uma matriz G de tamanho $n \times (n-1)$ com entradas em P. Também, $\omega^\vee$ é descrito por $(f_1, \ldots, f_n)$ para funções f_i em I. Seja G_i a submatriz quadrada de tamanho $n-1$ obtida de G eliminando-se a i-ésima linha para cada $i = 1, \ldots, n$, e faça $\delta_i := (-1)^i \det(G_i)$.

Localmente, o campo de Pfaff η pode ser escrito na forma:

$$\begin{array}{rlcl} \eta : & \bigwedge^{n-1} M & \longrightarrow & \bigwedge^{n} M \\ & m_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{m_i} \wedge \ldots \wedge m_n & \longmapsto & (-1)^{i+1} f_i\, m_1 \wedge \ldots \wedge m_n \end{array}$$

Por outro lado, sabendo que (3-8) tem localmente a forma:

$$0 \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{G} M^\vee \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_n)} P \longrightarrow P/I \longrightarrow 0,$$

temos que $\wedge^{n-1}\eta_1^\vee$ satisfaz

$$\begin{array}{rlcl} \wedge^{n-1}\eta_1^\vee : & \bigwedge^{n-1} M & \longrightarrow & P \\ & m_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{m_i} \wedge \ldots \wedge m_n & \longmapsto & (-1)^i \delta_i \end{array}$$

Pelo Teorema de Hilbert–Burch ([21], Teorema 20.15, página 506), existe $u \in P$ diferente de zero tal que $f_i = u\delta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Mas, como assumimos que $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2 em $\mathbb{P}^n_k$, temos que u é invertível. Portanto, a menos da multiplicação por um elemento invertível, o campos de Pfaff η e $\wedge^{n-1}\eta_1^\vee$ são iguais. Assim, H é invariante por η se e somente se H é invariante por $\wedge^{n-1}\eta_1^\vee$.

□

Observação 3.19 Pela fórmula de Auslander–Buchsbaum, supor que $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2 em $\mathbb{P}^n_k$ e que o núcleo de $\omega^\vee$ é localmente livre é equivalente a supor que $\mathcal{S}$ é Cohen–Macaulay de codimensão (pura) 2 em $\mathbb{P}^n_k$. Esta é uma hipótese forte, mas é razoável.

De fato, podemos sempre supor que $\mathcal{S}$ tem codimensão pelo menos 2. (Caso contrario ω é um múltiplo de uma seção $\omega' \in H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m'))$, para algum $m' < m$, tal que o lugar singular de $\omega' = 0$ tem codimensão pelo menos 2, e podemos substituir ω por ω'.) E quando a equação de Pfaff $\omega = 0$ é integrável, isto é, $\omega \wedge d\omega = 0$ em $\Omega^3_{k[X_0,\ldots,X_n]|k}$ pela definição na pagina 91 de [6], então a codimensão de $\mathcal{S}$ em $\mathbb{P}^n_k$ é de fato 2, pela Proposição 2.6 de [6].

Mas a hipótese que $\mathcal{S}$ é Cohen-Macaulay é mais forte. Contudo, F. Cukierman e J. V. Pereira mostram no Teorema 1 de [1] que se o núcleo de $\omega^\vee$ é localmente livre, e totalmente decomposto (em uma soma de fibrados em retas), e se ω é integrável e $d\omega$ tem singularidades bem comportadas, então o mesmo se verifica para qualquer ω' integrável próximo de ω, em termos de moduli.

3.2
Regularidade do lugar singular

Seja m um número inteiro positivo. Seja ω uma seção global diferente de zero de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Então ω induz um campo de Pfaff de posto $n-1$, a saber :

$$\eta \;:\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \xrightarrow{\omega\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}} \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} \xrightarrow{\tau\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)} \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(m),$$

em que τ é o emparelhamento perfeito:

$$\begin{array}{rlcl} \tau=\tau_1: & \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}\otimes\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k} & \longrightarrow & \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k} \\ & x\otimes x_1\wedge\ldots\wedge x_{n-1} & \longmapsto & x\wedge x_1\wedge\ldots\wedge x_{n-1}. \end{array}$$

Como $\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1)$, temos então que η tem coeficientes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-n-1)$.

Seja $\mathcal{S}$ o lugar das singularidades do campo de Pfaff η. Então $\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ é também a imagem de $\omega^\vee : T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$. Suponhamos que $\ker(\omega^\vee) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i)$, em que os a_i são inteiros.

Observação 3.20 Observemos que $a_i \geq m-1$ para todo i. De fato, temos um morfismo injetivo

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i) \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^n_k}(-m).$$

Seja

$$\mathcal{K} := \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i).$$

Considerando o dual da seqüência de Euler (1-2), torcida por $-m$, e tomando a seqüência longa exata derivada de $\mathrm{Hom}(\mathcal{K},-)$, teremos uma seqüência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+1)^{\oplus n+1}) \to$$

$$\to \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, T_{\mathbb{P}^n_k}(-m)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m)).$$

Como $\mathcal{K} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i)$, temos que

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(a_i - m)) = 0.$$

Portanto, existe um morfismo

$$\mu : \mathcal{K} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+1)^{\oplus n+1}$$

fazendo o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mu"'] & T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \\
& \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-m+1)^{\oplus n+1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

onde $i : \mathcal{K} \to T_{\mathbb{P}^n_k}(-m)$ é a inclusão. Como i é injetivo, μ também é. Se

$a_j - m + 1 \leq -1$ para algum j, teríamos que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(a_j - m + 1)) = 0$, e portanto μ levaria o somando $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_j)$ de $\mathcal{K}$ em zero, contrariando sua injetividade. Logo $a_j \geq m - 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Além disso, como observamos no Exemplo 3.2, temos que $m > 1$, e logo $a_j > 0$ para todo j.

Proposição 3.21 *Seja ω uma seção global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ diferente de zero, $n \geq 2$. Suponha que o núcleo $\mathcal{K}$ do morfismo*

$$\omega^\vee : T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$$

se decompõe na forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_{n-1})$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$. Então a regularidade $\operatorname{reg}(\mathcal{S})$ do lugar singular $\mathcal{S}$ de $\omega = 0$ satisfaz:

$$\operatorname{reg}(\mathcal{S}) = \max\{m-1, a_1 - 1, \cdots, a_{n-1} - 1\}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.3, para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n-1$ e $l \in \mathbb{Z}$, temos $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_j + l)) = 0$. Por outro lado, para todo $s \in \mathbb{Z}$, sabemos que

$$\begin{aligned} H^i(T_{\mathbb{P}^n_k}(s)) &\cong H^{n-i}(T_{\mathbb{P}^n_k}(s)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1))' \text{ (Teorema 1.5)} \\ &= H^{n-i}(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(-s-n-1))' \end{aligned}$$

e pelo Teorema 1.6 podemos afirmar que, se $i = 1, \ldots, n-2$, então $H^i(T_{\mathbb{P}^n_k}(s)) = 0$. Em particular tomemos $s := l - m$. Considerando a seqüência exata curta

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i + l) \to T_{\mathbb{P}^n_k}(l-m) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l) \to 0 \tag{3-10}$$

e tomando a seqüência exata longa de cohomologia obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+l)) & \to & H^0(T_{\mathbb{P}^n_k}(l-m)) & \to & H^0(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l)) & \to \\ \to & \oplus H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+l)) & \to & H^1(T_{\mathbb{P}^n_k}(l-m)) & \to & H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l)) & \to \\ \to & \vdots & \to & \vdots & \to & \vdots & \to \\ \to & \oplus H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+l)) & \to & H^{n-1}(T_{\mathbb{P}^n_k}(l-m)) & \to & H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l)) & \to \\ \to & \oplus H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+l)) & \to & H^n(T_{\mathbb{P}^n_k}(l-m)) & \to & H^n(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l)) & \to 0, \end{array}$$

donde concluímos que $H^i(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(l)) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$ e cada $i = 1, \ldots, n-2$.

Precisamos então encontrar o menor inteiro positivo r para o qual

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(r-n+1)) = 0 \quad \text{e} \quad H^n(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(r-n)) = 0.$$

Da seqüência exata longa acima vemos que $H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(u-n+1)) = 0$ implica que

$$H^{n-1}(T_{\mathbb{P}^n_k}(-m+u-n+1)) = 0,$$

e portanto

$$H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m-u-2)) = 0.$$

Pelo Teorema 1.6 temos então que

$$H^{n-1}(T_{\mathbb{P}^n_k}(-m+u-n+1)) = 0 \quad \text{se e somente se} \quad u \neq m-2. \tag{3-11}$$

Portanto

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(m-2-n+1)) \neq 0.$$

Segue então do item (a) do Teorema 1.20 que $r \geq m-1$.

Se $u \geq m-1$, então

$$m-(u-n)-n-1 = m-u-1 \leq 0$$

e portanto

$$\begin{aligned} H^n(T_{\mathbb{P}^n_k}(u-n-m)) &= H^0\Big(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m-(u-n)-n-1)\Big)' && \text{(Teorema 1.5)} \\ &= 0 && \text{(Teorema 1.6)} \end{aligned}$$

Logo, da seqüência exata longa acima vemos que $H^n(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(u-n)) = 0$ se $u \geq m-1$. Portanto, basta verificarmos qual é o menor inteiro $r \geq m-1$ tal que $H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(r-n+1)) = 0$.

Agora, do Teorema 1.5 segue

$$H^n(T_{\mathbb{P}^n_k}(-m+u-n+1)) \cong H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m-u-2))'.$$

Se $u \geq m-1$, então $m-u-2 \leq -1$, e do Teorema 1.6 segue que $H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m- \ r \ - \ 2)) = 0$. Portanto,

$$H^n(T_{\mathbb{P}^n_k}(-m+u-n+1)) = 0 \quad \text{se} \quad u \geq m-1 \tag{3-12}$$

Segue de (3-11) e de (3-12), usando a seqüência longa de cohomologia acima, que, se $u \geq m-1$,

$$H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(u-n+1)) \cong \bigoplus H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+u-n+1)),$$

e portanto $H^{n-1}(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(u-n+1)) = 0$ se e somente se $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-a_i+u-n+1)) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Como a última igualdade vale se e somente se $u \geq a_i - 1$ para todo i, segue a proposição.

□

Exemplo 3.22 Sejam $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^2_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(m-1)$ um campo vetorial de grau $m \geq 0$, e $\mathcal{S}$ seu lugar singular. Temos portanto uma sobrejeção

$$\Omega^1_{\mathbb{P}^2_k}(1-m) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^2_k}.$$

Supondo que $\mathcal{S}$ é um lugar finito, o complexo de Koszul associado,

$$0 \to \Omega^2_{\mathbb{P}^2_k}(2-2m) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2_k}(1-m) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^2_k} \to 0,$$

é exato, e portanto o núcleo de $\eta \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(1-m)$ é

$$\Omega^2_{\mathbb{P}^2_k}(2-2m)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(2-2m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-1-2m).$$

Além disso, η corresponde a uma equação de Pfaff $\omega = 0$, com ω uma seção global de $\Omega^1_{\mathbb{P}^2_k}(m+2)$ (veja a Observação 3.15). Logo, pela Proposição 3.21, a regularidade de $\mathcal{S}$ é

$$\text{reg}(\mathcal{S}) = \max\{m+1, 2m\}.$$

Segue que $\text{reg}(\mathcal{S}) = 1$ se $m = 0$ e $\text{reg}(\mathcal{S}) = 2m$ se $m > 0$. Assim, recuperamos o Teorema 2.10 no caso $n = 2$.

Exemplo 3.23 Em [1], Fernando Cukierman e Jorge Vitório apresentam alguns exemplos de 1-formas ω em $\mathbb{P}^n_k$ cujo núcleo do morfismo $\omega^\vee$ é localmente livre e totalmente decomposto. Um exemplo que pode ser encontrado nesse artigo para $n \geq 3$ é o "pullback" linear de 1-formas gerais de $\mathbb{P}^2_k$.