2
Campos Vetoriais

Seja k um corpo algebricamente fechado de característica p, V um esquema sobre k e $\mathcal{L}$ um feixe invertível sobre V.

Definição 2.1 Um campo vetorial sobre V com coeficientes em $\mathcal{L}$ é um morfismo $\eta : \Omega^1_V \to \mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_V$-módulos, ou seja, um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\Omega^1_V, \mathcal{L})$.

Seja $\eta : \Omega^1_V \to \mathcal{L}$ um campo vetorial sobre V. Considere o morfismo

$$\eta \otimes \mathcal{L}^{-1} : \Omega^1_V \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_V$$

e seja $\mathcal{I}_{\mathcal{S},V}$ a imagem de $\eta \otimes \mathcal{L}^{-1}$.

Definição 2.2 O lugar singular de um campo vetorial $\eta : \Omega^1_V \to \mathcal{L}$ sobre V é o subesquema fechado $\mathcal{S}$ de V definido pelo feixe de ideais $\mathcal{I}_{\mathcal{S},V}$.

Observemos que pela definição o lugar singular de um campo vetorial é o lugar dos pontos onde η não é sobrejetivo.

Seja W um subesquema fechado de V. Consideremos a seqüência exata de $\mathcal{O}_W$-módulos (veja [5], Proposição 8.12, página 176):

$$\frac{\mathcal{I}_{W,V}}{\mathcal{I}^2_{W,V}} \xrightarrow{\overline{d}} \Omega^1_V|_W \xrightarrow{\beta} \Omega^1_W \longrightarrow 0. \tag{2-1}$$

O morfismo β é o morfismo de restrição. Já $\overline{d}$ é definido localmente por $\overline{d}(\overline{f}) = df|_W$ para toda função local f se anulando em W.

Definição 2.3 Seja $\eta : \Omega^1_V \to \mathcal{L}$ um campo vetorial sobre V. Um subesquema fechado W de V é dito invariante por η se existe um campo vetorial $\varphi : \Omega^1_W \to \mathcal{L}|_W$ que torna o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_V|_W \arrow[r, "\eta|_W"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{L}|_W \arrow[d, equal] \\
\Omega^1_W \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{L}|_W
\end{tikzcd}$$

Vamos agora descrever algebricamente os campos vetoriais em $\mathbb{P}_k^n$ para $n \geq 2$. (O caso $n = 1$ é trivial.) Todo feixe invertível sobre $\mathbb{P}_k^n$ é da forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)$ para algum $m \in \mathbb{Z}$ (veja [5], Corolário 6.17, página 145). Logo um campo vetorial sobre $\mathbb{P}_k^n$ é um morfismo $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)$, para algum inteiro m.

Seja $R := k[X_0, \ldots, X_n]$, e seja R_l o espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau l nas variáveis $X_0, \ldots, X_n$, para cada $l \in \mathbb{Z}$. Recordemos a seqüência de Euler. Consideremos o R-módulo graduado $R(-1)^{n+1}$. Seja $e_0, \ldots, e_n$ a base canônica de $R(-1)^{n+1}$. Consideremos a seqüência exata de R-módulos graduados

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R(-1)^{n+1} \xrightarrow{\psi} R \longrightarrow 0 \tag{2-2}$$

em que ψ é definido por $\psi(e_i) = X_i$ e M é o núcleo de ψ. Tomando os feixes associados a estes módulos, obtemos a seqüência exata de Euler:

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \longrightarrow 0. \tag{2-3}$$

Seja m um inteiro não negativo. Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)) &\cong H^1(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)) && \text{(Proposição III.6.3 em [5])} \\ &= 0 && \text{(Teorema 1.3).} \end{aligned}$$

Tomando a seqüência exata longa de $\operatorname{Ext}^{\cdot}(-, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1))$ de (2-3) (Proposição III.6.4 em [5]), obtemos então uma seqüência exata curta:

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)) \to \\ \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}}(\Omega^1_{\mathbb{P}_k^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1)) \to 0. \end{aligned} \tag{2-4}$$

Da seqüência (2-4), concluímos que, dado um campo vetorial

$$\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1),$$

existe um elemento

$$\tilde{\eta} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m-1))$$

cuja imagem é η. Também é fato que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)^{\oplus n+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1),\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Hom}_R(R(-1),R(m-1)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H^0(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)).$$

e portanto $\tilde{\eta}$ é determinado por $n+1$ polinômios homogêneos $G_0,\ldots,G_n$ de grau m.

Se $\partial_0,\ldots,\partial_n$ denotam as derivadas parciais com respeito à $X_0,\ldots,X_n$, então dizemos que o campo vetorial

$$G_0\partial_0+\cdots+G_n\partial_n$$

em $\mathbb{A}^{n+1}_k$ induz o campo η.

Pela seqüência exata curta (2-4), vemos também que dois campos de vetores homogêneos em $\mathbb{A}^{n+1}_k$ induzem o mesmo campo vetorial sobre $\mathbb{P}^n_k$ se e somente se eles diferem por um elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1))$. Pela Proposição III.6.3 de [5] e pelo Teorema 1.3, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \cong H^0(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \cong R_{m-1},$$

e portanto todo

$$\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1))$$

é dado por algum $F\in R_{m-1}$. Logo, dois campos vetoriais em $\mathbb{A}^{n+1}_k$ definem o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^n_k$ se e somente se eles diferem de um múltiplo do campo vetorial de Euler, isto é, o campo vetorial $\sum X_i\partial_i$ sobre $\mathbb{A}^{n+1}_k$.

Observação 2.4 Seja η o campo vetorial em $\mathbb{P}^n_k$ induzido por $\sum G_i\partial_i$. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \arrow[r] \arrow[dr, "\eta"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)^{\oplus n+1} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "(G_0,\ldots,G_n)"] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \arrow[r] & 0 \\
& & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1) & &
\end{tikzcd}$$

donde concluímos que a imagem de η é o feixe de ideais determinado pelo ideal

$$I := \{\sum_{i=0}^{n} H_iG_i\,;\ \sum_{i=0}^{n} H_ie_i\in\ker(\psi)\}.$$

Ou seja,

$$I = \{\sum_{i=0}^{n} H_i G_i \,;\, \sum_{i=0}^{n} H_i X_i = 0\}$$

é um ideal de definição do lugar singular $\mathcal{S}$ de η.

Como $X_0, \ldots, X_n$ formam uma seqüência $k[X_0, \ldots, X_n]$-regular, o correspondente complexo de Koszul é exato, e portanto a condição $\sum_{i=0}^{n} H_i X_i = 0$ implica que existem polinômios homogêneos $F_{i,j}$ tais que $F_{i,j} = -F_{j,i}$ para $j \neq i$ e $H_i = \sum_{j \neq i} F_{j,i} X_j$ para todo i. Segue que

$$\sum_{i=0}^{n} H_i G_i \in (X_i G_j - X_j G_i \,:\, 0 \leq i < j \leq n),$$

e portanto

$$I = (X_i G_j - X_j G_i \,:\, 0 \leq i < j \leq n).$$

Ou seja, I é gerado pelos menores maximais da matriz

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_n \\ G_0 & G_1 & \ldots & G_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.5 Considere o campo vetorial η em $\mathbb{P}_k^n$ induzido por $\sum X_i^m \partial_i$. O lugar singular de η é dado pelos menores maximais da matriz

$$\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_n \\ X_0^m & X_1^m & \ldots & X_n^m \end{bmatrix}.$$

Cada menor desta matriz é da forma

$$X_i X_j (X_j^{m-1} - X_i^{m-1}),$$

com $0 \leq i < j \leq n$. Se $P \in \mathcal{S}$, então alguma coordenada de P é diferente de zero. Suponhamos que $X_0 \neq 0$. Então teremos $X_j(X_j^{m-1} - X_0^{m-1}) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, e portanto ou $X_j = 0$ ou $X_j = \xi X_0$, onde ξ é uma raiz $(m-1)$-ésima da unidade. Logo $\mathcal{S}$ é finito.

Pelos cálculos acima, vemos que existem m^n pontos em $\mathcal{S}$ com a primeira coordenada diferente de zero. Para encontrarmos os pontos de $\mathcal{S}$ em que $X_0 = 0$, precisamos determinar os valores de $X_2, \ldots, X_n$ que anulam os menores maximais de

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^m & X_2^m & \dots & X_n^m \end{bmatrix}.$$

Seguindo a análise feita no caso X_0, concluímos que existem m^{n-1} pontos em $\mathcal{S}$ para os quais $X_0 = 0$ e $X_1 \neq 0$. Indutivamente, concluímos que existem $m^n + m^{n-1} + \cdots + m + 1$ pontos em $\mathcal{S}$, ou seja, o grau de $\mathcal{S}$ satisfaz:

$$\deg(\mathcal{S}) \geq m^n + m^{n-1} + \cdots + m + 1.$$

Na Observação 2.8 mostraremos que se o lugar singular de um campo $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$ é finito, então seu grau é exatamente

$$m^n + m^{n-1} + \cdots + m + 1.$$

Definição 2.6 Dizemos que o grau de um campo não zero $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$ é m.

Geometricamente, o grau de um campo vetorial não nulo em $\mathbb{P}^n_k$ pode ser visto como segue. Denotemos o lugar singular do campo vetorial por $\mathcal{S}$. Se $P \in \mathbb{P}^n_k$ e $P \notin \mathcal{S}$, então $\eta_P : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k,P} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)_P$ é um homomorfismo sobrejetivo, e portanto determina uma reta L_P em $\mathbb{P}^n_k$ que contém P. Seja H um hiperplano passando por P mas não contendo L_P para algum $P \in \mathbb{P}^n_k - \mathcal{S}$. E seja $\beta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_H \to \Omega^1_H$ o homomorfismo de restrição. Considere o morfismo

$$(\eta|_H, \beta) : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_H \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)|_H \oplus \Omega^1_H.$$

Seja $Z \subseteq H$ o lugar de degeneração do morfismo acima, ou equivalentemente, o lugar de degeneração do morfismo

$$\wedge^n(\eta|_H, \beta) : \bigwedge^n \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_H \to \bigwedge^n \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)|_H \oplus \Omega^1_H\right).$$

Como

$$\bigwedge^n \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_H = \mathcal{O}_H(-n-1) \quad \text{e} \quad \bigwedge^n \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)|_H \oplus \Omega^1_H\right) = \mathcal{O}_H(m-n-1),$$

e como $P \notin Z$, temos que Z é uma hipersuperfície de grau m de H. Além disso, um ponto $Q \in \mathbb{P}^n_k$ pertence a Z se e somente se $Q \in \mathcal{S} \cap H$, ou $Q \notin \mathcal{S}$ e $L_Q \subseteq H$.

Lema 2.7 *Seja $\mathcal{S}$ o lugar singular de um campo em $\mathbb{P}^n_k$. Então $\mathcal{S} \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$ o campo do qual $\mathcal{S}$ é lugar singular. Suponhamos por absurdo que $\mathcal{S} = \emptyset$. Então η é sobrejetivo. Suponhamos ainda, para começar, que $m \neq 1$. Denotamos a classe de Chern total de um feixe localmente livre $\mathcal{F}$ por $c(\mathcal{F})$. Da seqüência de Euler (2-3), temos que

$$c(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k})c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)^{\oplus n+1}). \tag{2-5}$$

Como η é sobrejetivo, temos uma seqüência exata

$$0 \to \mathcal{E} \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1) \to 0,$$

em que $\mathcal{E}$ é o núcleo de η. Da seqüência exata segue que

$$c(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) = c(\mathcal{E})c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)). \tag{2-6}$$

Seja $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$. Como $\mathcal{E}$ tem posto $n-1$, temos que $c(\mathcal{E}) = P(\xi)$ para algum polinômio $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$ de grau no máximo $n-1$. Pela igualdade (2-5) temos que

$$c(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) = (1-\xi)^{n+1},$$

e de (2-6) concluímos que:

$$(1-\xi)^{n+1} = c(\mathcal{E})(1+(m-1)\xi).$$

Como $\mathcal{E}$ tem posto $n-1$, subtraindo $(-\xi)^{n+1}$ da igualdade acima ficamos com uma igualdade envolvendo polinômios em ξ de grau no máximo n.

Existe um isomorfismo $\mathbb{Z}[T]/(T^{n+1}) \cong A(\mathbb{P}^n_k)$ que leva T em ξ. Logo, reescrevendo a igualdade acima, subtraída de $(-\xi)^{n+1}$, como uma igualdade entre polinômios na variável T, obtemos:

$$(1-T)^{n+1} - (-1)^{n+1}T^{n+1} = P(T)\Big(1+(m-1)T\Big)$$

Fazendo $T = -1/(m-1)$ na igualdade acima, temos $m^{n+1} = 1$, e portanto $m = 1$, um absurdo.

Suponhamos agora que $m = 1$. Como $\mathcal{S} = \emptyset$, e $m = 1$ segue de (2-6) que

$$c(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) \;=\; c(\mathcal{E}).$$

Como $\mathcal{E}$ tem posto $n-1$, temos que $c_n(\mathcal{E}) = 0$, e portanto $c_n(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) = 0$. Mas, da igualdade (2-5), temos que $c_n(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) = (-1)^n(n+1) \neq 0$, um absurdo.

$\square$

O argumento usado na prova do Lema 2.7 é similar ao argumento usado por Jouanolou na página 85 de [6].

Observação 2.8 Seja $\mathcal{S}$ o lugar singular de um campo vetorial $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{L}$ diferente de zero. Suponha que o grau de η é m. Por definição, o feixe de ideais de $\mathcal{S}$ é a imagem do morfismo

$$\eta \otimes \mathcal{L}^{-1} : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}.$$

Se a dimensão de $\mathcal{S}$ é zero, então o grau de $\mathcal{S}$ é a n-ésima classe de Chern de $(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \otimes \mathcal{L}^{-1})^\vee$, ou seja,

$$\deg(\mathcal{S}) = c_n(T_{\mathbb{P}^n_k} \otimes \mathcal{L}) = c_n(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)).$$

Dualizando a seqüência de Euler (2-3) e tensorizando-a por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$, obtemos a seqüência exata

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)^{\oplus n+1} \to T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1) \to 0,$$

donde concluímos que

$$c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)\right) c\left(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)\right) = c\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)^{\oplus n+1}\right).$$

Se $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1))$, então temos que

$$(1+(m-1)\xi)\, c\left(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)\right) = (1+m\xi)^{n+1}. \tag{2-7}$$

Como $T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$ tem posto n, temos que

$$c(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) = c_0 + c_1\xi + \ldots + c_n\xi^n, \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

Subtraindo $(m-1)c_n\xi^{n+1}$ do lado esquerdo da igualdade (2-7) e $(m\xi)^{n+1}$ do lado direito, chegamos a uma igualdade envolvendo polinômios de grau no máximo n. Logo, usando o isomorfismo $\mathbb{Z}[T]/(T^{n+1}) \cong A(\mathbb{P}^n_k)$ que leva T em ξ, obtemos a seguinte igualdade entre polinômios de grau n em $\mathbb{Z}[T]$:

$$(1+(m-1)T)(1+c_1T+\cdots+c_nT^n) - c_n(m-1)T^{n+1} = (1+mT)^{n+1} - (mT)^{n+1}.$$

Fazendo $T = -1/(m-1)$, obtemos

$$-c_n(m-1) = 1 - m^{n+1}.$$

Logo segue que

$$\deg(\mathcal{S}) = \frac{m^{n+1}-1}{m-1} = m^n + m^{n-1} + \cdots + 1.$$

O argumento usado na observação anterior também é baseado no argumento usado por Jouanolou na página 88 de [6].

Observação 2.9 Um campo vetorial em $\mathbb{P}^n_k$ de grau m é um elemento de

$$\mathrm{Hom}(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \cong H^0(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)).$$

Torcendo o dual da seqüência de Euler (2-3) por $m-1$, obtemos uma sobrejeção

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}^{\oplus n+1}(m) \to T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1).$$

Como $H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) = 0$, esta sobrejeção induz uma sobrejeção de espaços vetoriais

$$u : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m))^{\oplus n+1} \to H^0(T^n_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)).$$

Seja v uma seção de u, isto é um homomorfismo tal que $uv = 1$. De v obtemos um mergulho:

$$\mathbb{P}\Big(H^0(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1))\Big) \longrightarrow \mathbb{P}\Big(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}^{\oplus n+1}(m))\Big) = \mathbb{P}(R_m^{n+1}).$$

Consideremos $V := \mathbb{P}\Big(H^0(T_{\mathbb{P}^n_k}(m-1))\Big)$ e a projeção

$$p_2 : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}(R_m^{n+1}) \to \mathbb{P}(R_m^{n+1}).$$

Sejam $G_0, \ldots, G_n$ polinômios de grau m com coeficientes gerais, ou seja, cujos coeficientes são coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}(R_m^{n+1})$. Consideremos o subesquema $S' \subseteq \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}(R_m^{n+1})$ definido pelos menores maximais da matriz

$$\begin{bmatrix} G_0 & G_1 & \ldots & G_n \\ X_0 & X_1 & \ldots & X_n \end{bmatrix}.$$

Sejam $S := S' \cap (\mathbb{P}^n_k \times V)$ e $p := p_2|_S : S \to \mathbb{P}(R_m^{n+1})$. A fibra de p sobre um ponto $\eta \in V$ é o lugar singular de η. Pelo Lema 2.7, esta fibra é não vazia. Portanto, a menor dimensão possível para as fibras de p é 0. O Exemplo 2.5 garante que esta dimensão é atingida. Pela semicontinuidade da dimensão das fibras, segue que esta dimensão mínima é atingida em um aberto.

Teorema 2.10 *Seja $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{L}$ um campo vetorial sobre $\mathbb{P}^n_k$, com $n \geq 2$, de grau $m \geq 1$. Suponha que o lugar singular $\mathcal{S}$ de η é finito. Então a regularidade de Castelnuovo–Mumford* $\operatorname{reg}(\mathcal{S})$ *de $\mathcal{S}$ é*

$$\operatorname{reg}(\mathcal{S}) = nm - n + 2.$$

Demonstração: Pelo Lema 1.14, basta provarmos que $r := mn - n + 2$ é o menor inteiro não negativo para o qual $H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(r-1)) = 0$. (Pois, qualquer que seja $s \geq 0$ teremos $s - n \geq -n$, e portanto $H^n(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(s-n)) = 0$.)

Por definição,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k} = \operatorname{Im}(\eta \otimes \mathcal{L}^{-1}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1).$$

Então, o complexo de Koszul de $\eta \otimes \mathcal{L}^{-1}$ fornece a seqüência

$$0 \to \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(n - nm) \to \cdots \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(1-m) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k} \to 0 \tag{2-8}$$

Como $\mathcal{S}$ é finito, o complexo acima é exato. Sejam

$$\mathcal{I}_j := \operatorname{Im}\Big(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j - jm) \to \Omega^{j-1}_{\mathbb{P}^n_k}(j - 1 - (j-1)m)\Big)$$

para $j = 2, \ldots, n-1$ e $\mathcal{I}_1 := \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}$.

Podemos quebrar a seqüência exata (2-8) nas seguintes seqüências exatas curtas:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathcal{I}_{j+1} \to \Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j - jm) \to \mathcal{I}_j \to 0, \quad j = 1, \ldots, n-2 \\ 0 \to \Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(n - nm) \to \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}((n-1)(1-m)) \to \mathcal{I}_{n-1} \to 0. \end{gathered} \tag{2-9}$$

Tensorizando as seqüências (2-9) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-1)$, e considerando as seqüências exatas longas de cohomologia associadas, teremos as seqüências exatas:

$$\begin{gathered} H^j\Big(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m) + r - 1)\Big) \to H^j(\mathcal{I}_j(r-1)) \to \\ \to H^{j+1}(\mathcal{I}_{j+1}(r-1)) \to H^{j+1}\Big(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m) + r - 1)\Big) \end{gathered} \tag{2-10}$$

$$\begin{gathered} H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) \to H^{n-1}(\mathcal{I}_{n-1}(r-1)) \to \\ \to H^n(\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(1)) \to H^n(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}(m)), \end{gathered} \tag{2-11}$$

a primeira para $j = 1, \ldots, n-2$. Temos que

$$j(1-m)+r-1 = j(1-m)+mn-n+1 = (j-n)(1-m)+1 = 0$$

se e somente se $m = 2$ e $j = n+1$ ou $m = 0$ e $j = n-1$. Pelo Teorema 1.6, temos que $H^p(\Omega^q_{\mathbb{P}^n_k}(l)) \neq 0$ se e somente se ou $p = 0$ e $l > q$, ou $p = n$ e $l < q-p$, ou $p = q$, $l = 0$ e $p \leq n$. Logo, como $m > 0$, temos que

$$H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) = H^n(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^{n}k}(m) = 0$$

e

$$H^j\Big(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m)+r-1)\Big) = H^{j+1}\Big(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m)+r-1)\Big) = 0$$

para $j = 1, \ldots, n-2$. Das seqüências exatas, temos que

$$H^1(\mathcal{I}_1(r-1)) \cong H^2(\mathcal{I}_2(r-1)) \cong \cdots \cong H^{n-1}(\mathcal{I}_{n-1}(r-1)) \cong H^n(\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}(1)) = 0.$$

Logo a regularidade de $\mathcal{S}$ é no máximo r.

Por outro lado, tensorizando as seqüências (2-9) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-2)$ e considerando as seqüências exatas longas de cohomologia associadas, teremos as seqüências exatas:

$$H^j(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m)+r-2)) \to H^j(\mathcal{I}_j(r-2)) \to$$

$$\to H^{j+1}(\mathcal{I}_{j+1}(r-2)) \to H^{j+1}(\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m)+r-2)) \qquad (2\text{-}12)$$

para $j = 1, \ldots, n-2$, enquanto que a seqüência (2-11) será alterada para

$$H^{n-1}(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) \to H^{n-1}(\mathcal{I}_{n-1}(r-2)) \to H^n(\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}) \to H^n(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n}(m-1)).$$

Pelo Teorema 1.6, temos que $H^n(\Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^{n}k}(m-1)) = 0$ e

$$H^{j+1}\ (\Omega^j_{\mathbb{P}^n_k}(j(1-m)+r-2)) = 0$$

se $j = 1, \ldots, n-2$, o que implica na existência de sobrejeções:

$$H^1(\mathcal{I}_1(r-2)) \twoheadrightarrow H^2(\mathcal{I}_2(r-2)) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow H^{n-1}(\mathcal{I}_{n-1}(r-2)) \twoheadrightarrow H^n(\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}).$$

Como $H^n(\Omega^n_{\mathbb{P}^n_k}) \neq 0$ temos $H^1(\mathcal{I}_1(r-2)) \neq 0$. Logo a regularidade de $\mathcal{S}$ é exatamente r.

$\square$

Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre um esquema X. Considere uma representação de $\mathcal{F}$, ou seja, uma seqüência exata de feixes da forma:

$$\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}_2 \to \mathcal{F} \to 0, \tag{2-13}$$

onde $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{O}_X^n$ e $\mathcal{E}_2 \simeq \mathcal{O}_X^m$. Para cada inteiro positivo l, definimos o ideal dos menores $l \times l$ de ψ como sendo o feixe de ideais $\mathcal{I}_l(\psi) \subseteq \mathcal{O}_X$ que é a imagem do morfismo

$$\bigwedge^l \mathcal{E}_1 \otimes \bigwedge^l \mathcal{E}_2^* \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

induzido por ψ.

Definição 2.11 O k-ésimo ideal de Fitting de um feixe coerente $\mathcal{F}$ é o feixe de ideais dado localmente como $\mathcal{I}_{n-k}(\psi)$ para alguma representação de $\mathcal{F}$ (veja [12], página 221).

Seja n um inteiro tal que $n \geq 2$. Seja $C \subseteq \mathbb{P}_k^n$ uma curva reduzida de Gorenstein e $\Sigma \subseteq C$ o subesquema das singularidades de C. Por definição, Σ é o subesquema de C tal que $\mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C$ é a imagem do mapa canônico $\Omega_C^1 \to \omega_C$. Se C é localmente de interseção completa, então $\mathcal{I}_{\Sigma,C}$ é simplesmente o primeiro ideal Fitting de Ω_C^1.

De fato, da seqüência exata

$$\frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}_k^n}} \xrightarrow{\bar{d}} \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n}|_C \xrightarrow{\beta} \Omega_C^1 \longrightarrow 0, \tag{2-14}$$

induzimos o morfismo

$$\bigwedge^{n-1} \frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}_k^n}} \otimes \Omega_C^1 \to \bigwedge^n \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n}|_C,$$

que tensorizado por $(\bigwedge^{n-1} \frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}_k^n}})^\vee$ fornece o morfismo

$$\Omega_C^1 \to \bigwedge^n \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n}|_C \otimes (\bigwedge^{n-1} \frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}_k^n}})^\vee.$$

Pelo Teorema 7.11 em [5], página 245, temos que

$$\omega_C = \bigwedge^n \Omega^1_{\mathbb{P}_k^n} \otimes (\bigwedge^{n-1} \frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}_k^n}})^\vee$$

e portanto induzimos o morfismo $\Omega_C^1 \to \omega_C$ cuja imagem é $\mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C$. Desta construção do morfismo $\Omega_C^1 \to \omega_C$, segue que $\mathcal{I}_{\Sigma,C}$ é o primeiro ideal de Fitting de Ω_C^1.

Observação 2.12 Se C é uma curva irredutível, não necessariamente Gorenstein, J. Lipman constrói em [7] um homomorfismo

$$\mathrm{Tr}_C : H^1(\Omega^1_C) \to k,$$

e segue da propriedade de dualidade de ω_C que o homomorfismo Tr_C corresponde a um mapa

$$\Omega^1_C \to \omega_C.$$

Se a curva não for irredutível mas for reduzida, então consideramos a soma dos mapas traços de suas componentes,

$$H^1(\Omega^1_C) \longrightarrow \bigoplus_i H^1(\Omega^1_{C_i}) \xrightarrow{\sum Tr_{C_i}} k,$$

onde os C_i são as componentes irredutíveis de C e o primeiro homomorfismo é o mapa de restrição de formas.

O mapa $\Omega^1_C \to \omega_C$ também pode ser obtido usando as diferenciais regulares de Rosenlicht, para tal construção veja [3].

Se denotamos por $T(\Omega^1_C)$ o feixe de torção de Ω^1_C, como C é reduzida, obtemos a seqüência exata

$$0 \to T(\Omega^1_C) \to \Omega^1_C \to \omega_C \to \frac{\omega_C}{\mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C} \to 0, \tag{2-15}$$

ou ainda, o isomorfismo

$$\frac{\Omega^1_C}{T(\Omega^1_C)} \cong \mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C. \tag{2-16}$$

Sejam $\eta : \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)$ um campo vetorial não nulo e $\mathcal{S}$ o lugar singular de η. Suponhamos que $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é uma curva reduzida e invariante por η. Então existe um campo vetorial $\varphi : \Omega^1_C \to \mathcal{O}_C(m-1)$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1) \arrow[d] \\
\frac{\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}}{\mathcal{I}^2_{C,\mathbb{P}^n_k}} \arrow[r, "\overline{d}"] & \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}|_C \arrow[r, "\eta|_C"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{O}_C(m-1) \arrow[d, equal] \\
 & \Omega^1_C \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_C(m-1)
\end{tikzcd}$$

A imagem de η é por definição $\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(m-1)$, e portanto como a composição $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \to \Omega^1_C$ é sobrejetiva, a imagem de φ é $\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(m-1)$.

Suponha que $\dim(\mathcal{S}\cap C) = 0$. Como C é uma curva reduzida, o núcleo de φ é $T(\Omega^1_C)$.

Destas observações temos a seguinte seqüência exata

$$0 \to T(\Omega^1_C) \to \Omega^1_C \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_C(m-1) \to \frac{\mathcal{O}_C(m-1)}{\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(m-1)} \to 0, \qquad (2\text{-}17)$$

ou ainda, o isomorfismo

$$\frac{\Omega^1_C}{T(\Omega^1_C)} \cong \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(m-1). \qquad (2\text{-}18)$$

Dos isomorfismos (2-16) e (2-18) e das seqüências (2-15) e (2-17) obtemos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C \to \mathcal{O}_C(m-1) \to \mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(m-1) \to 0. \qquad (2\text{-}19)$$

Teorema 2.13 *Sejam $n \geq 2$ e $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma curva. Suponha que C é reduzida, aritmeticamente Cohen–Macaulay, subcanônica e de grau d. Assuma que k é um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ com $p \nmid d$. Sejam Σ o subesquema das singularidades de C, $\sigma := \mathrm{reg}(\Sigma)$, $r := \mathrm{reg}(C)$ e $\rho := \sigma - r + 2$. Suponha que C é uma curva invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^n_k$ de grau m. Se $\dim(\mathcal{S}\cap C) = 0$, onde $\mathcal{S}$ é o lugar singular do campo, então*

$$r \leq \begin{cases} m+1, & \textit{se } \rho \leq 0 \\ m+1+\rho, & \textit{se } \rho > 0 \end{cases}$$

Demonstração: Suponhamos que $\rho > 0$. Como r é a regularidade de C e $r+\rho-1 \geq r$, temos

$$H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3+\rho)) = H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}((r+\rho-1)-2)) = 0.$$

Por outro lado, segue da definição de σ que

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3+\rho)) = H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-1)) = 0.$$

Tensorizando a seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{I}_{\Sigma,C} \to 0 \qquad (2\text{-}20)$$

por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3+\rho)$, e tomando a cohomologia, obtemos a seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3+\rho)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3+\rho)) \to H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3+\rho))$$

donde segue que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3+\rho)) = 0$.

Como, pelo Corolário 1.26, o feixe dualizante de C é $\omega_C = \mathcal{O}_C(r-3)$, considerando a seqüência de cohomologia da seqüência exata curta (2-19) tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\rho)$, obtemos a seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3+\rho)) \to H^1(\mathcal{O}_C(m-1+\rho)) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(m-1+\rho)).$$

Observemos que, como $\mathcal{S}\cap C$ é finito, temos $H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}\cap C}(m-1+\rho)) = 0$, e portanto

$$H^1(\mathcal{O}_C(m-1+\rho)) = 0. \tag{2-21}$$

Guardemos (2-21) para usá-la mais adiante. Agora, consideremos o caso em que $\rho \leq 0$. Então $r-2 = \sigma - \rho \geq \sigma$, e pela definição de σ temos que

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) = 0. \tag{2-22}$$

Tomando cohomologia na seqüência exata curta (2-19) vemos que o homomorfismo

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \to H^1(\mathcal{O}_C(m-1))$$

é sobrejetivo. Por outro lado, tomando a cohomologia na seqüência exata

$$0 \to T(\Omega^1_C) \to \Omega^1_C \to \mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3) \to 0,$$

temos a seqüência exata:

$$H^1(T(\Omega^1_C)) \to H^1(\Omega^1_C) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \to H^2(T(\Omega^1_C)).$$

Como $T(\Omega^1_C)$ tem suporte finito, temos que o mapa

$$H^1(\Omega^1_C) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3))$$

é um isomorfismo.

Consideremos então o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}) \arrow[r, "H(\eta)"] \arrow[d, "\iota"'] & H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) = 0 \arrow[d] \\
H^1(\Omega^1_C) \arrow[r, "H(\varphi)"] \arrow[d, "\wr"] & H^1(\mathcal{O}_C(m-1)) \\
H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

onde, como vimos, o mapa inclinado é sobrejetivo, e o mapa vertical inferior é um isomorfismo. Assim, $H(\varphi)$ é sobrejetivo. Por hipótese, k é um corpo algebricamente fechado de característica 0, ou $p > 0$ com $p \nmid d$. Então podemos usar o Teorema 1.15 ou o Teorema 1.16 e afirmar que ι é um homomorfismo diferente de zero. Logo existe $\gamma \in H^1(\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k})$ tal que $\alpha := \iota(\gamma) \neq 0$. Por outro lado a imagem de α em $H^1(\mathcal{O}_C(m-1))$ é zero, pois, pelo Teorema 1.3, $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m-1)) = 0$. Se provarmos que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \cong k$, então α será um gerador do grupo de cohomologia $H^1(\Omega^1_C)$, e como o homomorfismo $H(\varphi)$ é sobrejetivo, teremos então que

$$H^1(\mathcal{O}_C(m-1)) = 0. \tag{2-23}$$

Provemos agora que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \cong k$. Pelo Teorema 1.3, temos $H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) = 0$ para $i = 1, 2$. Pela seqüência exata de cohomologia

$$H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to H^1(C, \mathcal{O}_C(r-3)) \to H^2(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to$$
$$\to H^2(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3))$$

obtida da seqüência exata

$$0 \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3) \to \mathcal{O}_C(r-3) \to 0,$$

temos que

$$\begin{aligned}
H^2(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) &\cong H^1(C, \mathcal{O}_C(r-3)) \\
&\cong H^0(C, \mathcal{O}_C(-r+3) \otimes \omega_C)' \ \text{(Teorema 1.5)} \\
&= H^0(C, \mathcal{O}_C(-r+3) \otimes \mathcal{O}_C(r-3))' \ \text{(Hipótese)} \\
&= H^0(C, \mathcal{O}_C) \\
&= k \ \text{(Proposição 1.1).}
\end{aligned}$$

Tomando cohomologia na seqüência exata (2-20) tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)$, obtemos a seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \to H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to H^2(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)).$$

Agora, $H^2(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) = 0$ pelo Lema 1.14. Logo, segue de (2-22) que

$$H^1(C, \mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \cong H^2(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \cong k.$$

Finalmente, usaremos agora as igualdades (2-21) e (2-23) para provar as desigualdades enunciadas no teorema. Sendo C uma curva a.C.M., temos pela Proposição 1.24 que a regularidade de C é o menor inteiro positivo r para o qual $H^1(\mathcal{O}_{C,\mathbb{P}^n_k}(r-2)) = 0$. Conseqüentemente, segue de (2-21) e (2-23) que a regularidade de C satisfaz as desigualdades do teorema.

□

Observação 2.14 As hipóteses de C ser uma curva aritmeticamente Cohen–Macaulay e subcanônica no Teorema 2.13 são muito restritivas. Entretanto, como a hipótese de a curva C ser subcanônica não aparece no Teorema 0.1 de E. Esteves [17] nós suspeitamos de que ela não seja realmente necessária. Por outro lado, como mostra o Exemplo 2.16, a hipótese de C ser aritmeticamente Cohen–Macaulay é necessária para termos as cotas apresentadas no teorema.

Exemplo 2.15 Curvas lisas de gênero g mergulhadas em $\mathbb{P}^n_k$ por um sistema linear completo de grau $d \geq 2g$ são exemplos de curvas aritmeticamente Cohen–Macaulay. Além disso, curvas lisas mergulhadas em $\mathbb{P}^n_k$ pelo sistema canônico são subcanônicas. (veja o Exemplo 4 de [21], página 468)

Exemplo 2.16 Para cada inteiro $d \geq 2$ consideremos o mergulho

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1_k & \to & \mathbb{P}^3_k \\ (x:y) & \mapsto & (x^d : x^{d-1}y : xy^{d-1} : y^d) \end{array}$$

e seja C_d a sua imagem. A curva C_d é lisa e definida em $\mathbb{P}^3_k$ por

$$X_1X_2 - X_0X_3, \quad X_1^{d-1} - X_2X_0^{d-2}, \quad X_2^{d-1} - X_1X_3^{d-2}.$$

Consideremos o campo vetorial η_d de grau 1 em $\mathbb{P}^3_k$ induzido por

$$dX_0\partial_0 + (d-2)X_1\partial_1 - (d-2)X_2\partial_2 - dX_3\partial_3.$$

Observemos que o campo η_d deixa a curva C_d invariante.

Como as curvas C_d não são aritmeticamente Cohen–Macaulay se $d > 3$, vemos que a hipótese de C ser aritmeticamente Cohen–Macaulay no Teorema 2.13 é realmente necessária.

Este exemplo pode ser encontrado na Observação 21 de [17].

Observação 2.17 No Teorema 2.13 o nosso foco é nas folheações, mas as desigualdades obtidas podem ser vistas sob o ângulo das curvas. Desta forma elas fornecem cotas inferiores que dizem quão singular são estas curvas. Este ângulo é exatamente o estudado por Du Plessis e Wall para curvas planas em [13].

Proposição 2.18 *Assuma as hipóteses do Teorema 2.13. Suponha que $r \geq 5$ se $m = 1$ e $r \geq mn - n + 4$ se $m > 1$. Se $\mathcal{S}$ é um conjunto finito, então $r = m + 1 + \rho$.*

Demonstração: Segue da hipótese que $r \geq m + 2$. De fato,

$$n(m-1) + 4 \geq 2(m-1) + 4 \geq m + 2.$$

Então $r \leq m+1+\rho$, pelo Teorema 2.13. Devemos provar que $r \geq m+1+\rho$.

Pelo Teorema 2.10, a regularidade de $\mathcal{S}$ é $mn - n + 2$. Portanto

$$H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(i-1)) = 0 \quad \text{se} \quad i \geq mn - n + 2.$$

Observemos que, como $\mathcal{S}$ é finito, $H^1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathcal{S}}(j)) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Tomando a cohomologia da seqüência exata

$$0 \to \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(j) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathcal{S}}(j) \to 0,$$

obtemos uma seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathbb{P}^n_k}(j)) \to H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j)) \to H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathcal{S}}(j)), \tag{2-24}$$

e portanto $H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(i-1)) = 0$ se $i \geq mn - n + 2$.

Defina $j := m + \rho - 2$. Como $r \leq m + 1 + \rho$ temos

$$j + 1 = m + 1 + \rho - 2 \geq r - 2 \geq mn - n + 4 - 2 = mn - n + 2,$$

donde concluímos, usando a exatidão de (2-24), que

$$H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j)) = H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j+1-1)) = 0.$$

Agora, da seqüência exata longa de cohomologia da seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(j) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j) \to \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(j) \to 0,$$

obtemos a seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(j)) \to H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j)) \to H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(j)) \to H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(j)). \quad (2\text{-}25)$$

Se $H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(j)) \neq 0$, então pela exatidão de (2-25), e como $H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,\mathbb{P}^n_k}(j)) = 0$, temos que $H^2(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(j)) \neq 0$, e portanto $j+2 < r$, isto é,

$$r \geq j+3 = m+\rho+1.$$

Provemos então que $H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(j)) \neq 0$. Dos isomorfismos (2-16) e (2-18), e usando que $\omega_C = \mathcal{O}_C(r-3)$, temos

$$\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3) \cong \mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(m-1),$$

e portanto

$$H^1(\mathcal{I}_{\mathcal{S}\cap C,C}(m+\rho-2)) \cong H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3+\rho-1)) = H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-2)).$$

Basta então provarmos que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-2)) \neq 0$.

Tomando a cohomologia da seqüência exata (2-20) tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\sigma-2)$, obtemos a seqüência exata

$$H^1(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-2)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-2)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma-2)). \quad (2\text{-}26)$$

Da hipótese, $r \geq m+4$. De fato,

$$n(m-1)+4 \geq 2(m-1)+4 = m+(m-2)+4 \geq m+4$$

se $m > 1$. Logo

$$r \leq m+\rho+1 = m+3+\sigma-r \leq m+3+\sigma-m-4 = \sigma-1,$$

e como r é a regularidade de C temos que

$$H^1(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-2)) = H^1(\mathcal{I}_{C,\mathbb{P}^n_k}((\sigma-1)-1)) = 0.$$

Por definição, σ é o menor inteiro tal que $\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}$ é σ-regular. Logo, pelo Lema 1.14, podemos afirmar que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(\sigma-2)) \neq 0$. Segue então da exatidão de (2-26) que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(\sigma - 2)) \neq 0$. $\square$

Corolário 2.19 *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^n$ uma curva reduzida de grau d. Suponha que k é um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ com $p \nmid d$. Suponha que C é uma interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}$, e que C é invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^n_k$ de grau m. Sejam Σ o lugar dos pontos singulares de C, $\sigma := \mathrm{reg}(\Sigma)$, $r := \mathrm{reg}(C)$ e $\rho := \sigma - r + 2$. Se $\dim(\mathcal{S} \cap C) = 0$, onde $\mathcal{S}$ é o lugar singular do campo, então*

$$d_1 + \ldots + d_{n-1} \leq \begin{cases} m + n - 1, & se\ \rho \leq 0 \\ m + n - 1 + \rho, & se\ \rho > 0 \end{cases}$$

Demonstração: Como C é uma interseção completa em $\mathbb{P}^n_k$, temos que C é a.C.M pelo Lema 1.13, e subcanônica pelo Corolário 1.27. Também pelo Corolário 1.27, a regularidade de C é $d_1 + \cdots + d_{n-1} - n + 2$. O corolário segue então do Teorema 2.13. $\square$

Lema 2.20 *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma curva integral,* a.C.M. *e subcanônica. Seja $\Sigma \subseteq C$ o subesquema das singularidades de C. Se C tem somente nós ordinários por singularidades, então* $\mathrm{reg}(\Sigma) \leq \mathrm{reg}(C) - 2$.

Demonstração: Como C é a.C.M. e subcanônica, pelo Corolário 1.26 temos $\omega_C = \mathcal{O}_C(r-3)$, onde $r := \mathrm{reg}(C)$.

Seja $\widetilde{C}$ a normalização de C e $\pi : \widetilde{C} \longrightarrow C$ o mapa de normalização. Como C só tem nós ordinários, uma análise local mostra que o mapa

$$\eta : \Omega^1_C \longrightarrow \pi_* \Omega^1_{\widetilde{C}}$$

é sobrejetivo, e o seu núcleo é exatamente o feixe de torção, isto é, temos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow T(\Omega^1_C) \longrightarrow \Omega^1_C \longrightarrow \pi_* \Omega^1_{\widetilde{C}} \longrightarrow 0.$$

Portanto, pela seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow T(\Omega^1_C) \longrightarrow \Omega^1_C \longrightarrow \mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C \longrightarrow 0,$$

vemos que $\mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C \cong \pi_* \Omega^1_{\widetilde{C}}$. Assim,

$$H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) = H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C) \cong H^1(\pi_* \Omega^1_{\widetilde{C}}) \cong H^1(\Omega^1_{\widetilde{C}}) \cong k,$$

onde o último isomorfismo decorre da hipótese que C é integral.

Observe que $H^1(\mathcal{O}_\Sigma(r-3)) = 0$, pois Σ é finito. Assim, tomando a seqüência exata longa de cohomologia de

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Sigma,C} \otimes \omega_C \xrightarrow{\mu_1} \omega_C \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{O}_\Sigma(r-3) \longrightarrow 0$$

obtemos uma seqüência exata:

$$H^0(\omega_C) \xrightarrow{H^0(\mu_2)} H^0(\mathcal{O}_\Sigma(r-3)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) \xrightarrow{H^1(\mu_1)} H^1(\omega_C) \to 0.$$

Como

$$\begin{array}{rcll} H^1(\omega_C) & \cong & H^0(\omega_C^{-1} \otimes \omega_C) & \text{(pelo Teorem 1.5)} \\ & = & H^0(\mathcal{O}_C) & \\ & = & k & \text{(pela Proposição 1.1)} \\ & \cong & H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,C}(r-3)) & \end{array}$$

segue que $H^1(\mu_1)$ é um isomorfismo, e portanto $H^0(\mu_2)$ é um homomorfismo sobrejetivo. Além disso, como C é a.C.M., temos do Lema 1.10 que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) \to H^0(\mathcal{O}_C(m))$ é sobrejetivo para todo $m \in \mathbb{Z}$. Pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^0(\mathcal{O}_\Sigma(r-3)) \\ & H^0(\mathcal{O}_C(r-3)) \arrow[ur, "H^0(\mu_2)"'] & \end{tikzcd}$$

concluímos que

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(r-3))$$

é um homomorfismo sobrejetivo. Da seqüência exata longa de cohomologia obtida da seqüência exata curta

$$0 \to \mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_\Sigma \to 0$$

tensorizada por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)$, obtemos a seqüência exata

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to H^0(\mathcal{O}_\Sigma(r-3)) \to H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)).$$

Segue que $H^1(\mathcal{I}_{\Sigma,\mathbb{P}^n_k}(r-3)) = 0$, já que $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(r-3)) = 0$ e o primeiro homomorfismo é sobrejetivo. Como a regularidade é um número positivo, usamos o Lema 1.14 para concluir que $\mathrm{reg}(\Sigma) \leq \mathrm{reg}(C) - 2$. □

Corolário 2.21 *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma curva integral que tem somente nós ordinários por singularidades. Suponha que C é* a.C.M. *e subcanônica. Se C é invariante por um campo vetorial de grau m e a característica de k é $p \geq 0$ com $p \nmid \deg(C)$, então $r \leq m + 1$.*

Demonstração: Basta usar o Lema 2.20 e o Teorema 2.13. □

Se, além das condições pedidas no Corolário 2.21, temos que C é interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, \ldots, d_{n-1}$, então segue do Corolário 2.21 e do Corolário 1.27 que

$$d_1 + \cdots + d_{n-1} \leq (m - 1) + n.$$