

1

Resultados Preliminares

Neste trabalho k sempre denotará um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ e $\mathbb{P}_k^n$ denotará o n -espaço projetivo sobre k .

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados gerais que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1

Cohomologia

Proposição 1.1 *Seja k um corpo algebricamente fechado. Se X é um esquema sobre k , próprio, reduzido e conexo, então $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que X é irredutível. Podemos considerar $H^0(X, \mathcal{O}_X) \subseteq k(X)$. Como X é reduzido e próprio segue que $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ é um k -espaço vetorial de dimensão finita (veja Teorema II.5.19 em [5]). Logo, da hipótese sobre k , segue que $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$.

Suponhamos agora que X é redutível. Sejam $X_1, \dots, X_r$ as componentes irredutíveis de X . Temos que $H^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) = k$ para todo $i = 1, \dots, r$. Consideremos $a \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ e $a_i := a|_{X_i} \in k$. Se $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, e $x_{ij} \in X_i \cap X_j$ é um ponto fechado, então o valor de a neste ponto mostra que $a_i = a_j$. Como X é conexo, segue que $a = a_i$ para todo i .

□

A demonstração da Proposição 1.1 é dada por Kenji Ueno na página 126 de [18].

Teorema 1.2 (Grothendieck) *Seja X um espaço topológico Noetheriano de dimensão n . Então para todo $i > n$ e todo feixe de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre X , temos que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$*

Demonstração: Ver [5], Teorema 2.7, p. 208.

□

Teorema 1.3 *Sejam $n \geq 1$ e $X := \mathbb{P}_k^n$. Então:*

- (a) $k[X_0, \dots, X_n] \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ como anéis graduados,
- (b) $H^i(X, \mathcal{O}_X(m)) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ e para todo $m \in \mathbb{Z}$,
- (c) $H^n(X, \mathcal{O}_X(m)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-m-n-1))'$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver [5], Teorema 5.1, p. 225. □

Definição 1.4 Seja X um esquema próprio de dimensão n sobre um corpo k . Um feixe dualizante para X é um feixe coerente ω_X , juntamente com um morfismo $t : H^n(X, \omega_X) \rightarrow k$, tal que para todo feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X , a paridade natural

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, \omega_X),$$

seguida por t determina um isomorfismo

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F})'.$$

Se X um esquema projetivo sobre k , então X tem um feixe dualizante (veja [5], Proposição 7.5, p. 242).

Teorema 1.5 *Seja X um esquema projetivo sobre k , Cohen–Macaulay e de equidimensão n . Então para cada feixe localmente livre $\mathcal{F}$ sobre X existem isomorfismos naturais*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)'.$$

Demonstração: Ver [5], Corolário 7.7, p. 244. □

Seja Y um esquema sobre um corpo k . Se b é um número inteiro positivo, então Ω_Y^b denotará o b -ésimo produto exterior de Ω_Y^1 , ou seja, $\Omega_Y^b := \bigwedge^b \Omega_Y^1$.

Façamos R denotar o anel graduado $k[X_0, \dots, X_n]$ e R_l denotar o espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau l nas variáveis $X_0, \dots, X_n$, para cada $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$. Consideremos o R -módulo graduado

$R(-1)^{n+1}$. Sejam $e_0, \dots, e_n$ formando a base canônica de $R(-1)^{n+1}$. Temos a sequência exata de R -módulos graduados

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R(-1)^{n+1} \xrightarrow{\psi} R \longrightarrow 0 \quad (1-1)$$

onde ψ é determinado por $\psi(e_i) = X_i$ e M é o núcleo de ψ . Tomando os feixes associados a estes módulos, obtemos a sequência exata de Euler (veja [5], Teorema 8.13, página 176):

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \longrightarrow 0. \quad (1-2)$$

Para cada $j = 2, \dots, n$, definimos os morfismos:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_j : \bigwedge^j \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} &\longrightarrow \bigwedge^{j-1} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right) \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_j &\mapsto \sum_{i=1}^j (-1)^{i+1} \tilde{\psi}(v_i) v_1 \wedge \dots \wedge \widehat{v_i} \wedge \dots \wedge v_j \end{aligned} \quad (1-3)$$

induzido pelo morfismo sobrejetivo $\tilde{\psi}$ da sequência de Euler (1-2). Fazemos $\overline{\psi}_1 := \tilde{\psi}$. Da definição de $\overline{\psi}_j$ segue que $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j \subseteq \text{Ker}(\overline{\psi}_j)$ para cada $j = 1, \dots, n$. Além disso, se $v_1, \dots, v_{j-1}$ são seções locais de $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1$, então

$$\overline{\psi}_j(v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{j-1}) = \tilde{\psi}(v) v_1 \wedge \dots \wedge v_{j-1}$$

para toda seção local v de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}^{\oplus n+1}$. Logo, como $\tilde{\psi}$ é sobrejetivo, podemos garantir que $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1} \subseteq \text{Im}(\overline{\psi}_j)$ para cada $j = 2, \dots, n$. Por outro lado, segue diretamente da definição que $\overline{\psi}_{j-1} \overline{\psi}_j = 0$. Assim, temos que

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1} \subseteq \text{Im}(\overline{\psi}_j) \subseteq \text{Ker}(\overline{\psi}_{j-1}).$$

De (1-2) temos que

$$\text{Ker}(\overline{\psi}_1) = \text{Ker}(\tilde{\psi}) = \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1.$$

Suponha por indução que $\text{Ker}(\overline{\psi}_{j-1}) = \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}$. Segue então que $\text{Im}(\overline{\psi}_j) = \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}$. E portanto $\text{Ker}(\overline{\psi}_j)$ é localmente livre. Comparando os postos, verificamos que o posto de $\text{Ker}(\overline{\psi}_j)$ é igual ao de $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j$.

Seja $K := \text{Ker}(\overline{\psi}_j)$. Das inclusões de feixes

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j \subseteq K \quad \text{e} \quad \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j \subseteq \bigwedge^j \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1},$$

obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \frac{K}{\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j} \rightarrow \frac{\bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right)}{\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j} \rightarrow \frac{\bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right)}{K} \rightarrow 0. \quad (1-4)$$

Da seqüência exata (1-2), segue que para cada $j = 1, \dots, n$ e para cada $x \in \mathbb{P}_k^n$ o morfismo

$$\bigwedge^j \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1|_{\{x\}} \longrightarrow \bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right)|_{\{x\}}$$

é injetivo. Portanto o conúcleo do homomorfismo acima é localmente livre (veja Proposição 1.16, na página 27 de [11]), ou seja,

$$\bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right) / \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j$$

é localmente livre. Como

$$\bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right) / K \simeq \text{Im}(\bar{\psi}_j) = \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1},$$

segue que este quociente é um feixe localmente livre.

Da seqüência exata (1-4) temos que $K/\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j$ é um somando de feixes localmente livres, logo é um feixe localmente livre. Além disso, da seqüência exata

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j \rightarrow K \rightarrow \frac{K}{\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j} \rightarrow 0, \quad (1-5)$$

segue que o posto de $K/\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j$ é zero e portanto que $K/\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j = 0$, ou seja, $\text{Ker}(\bar{\psi}_j) = \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j$. Com isto, provamos a existência da seguinte seqüência exata:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j \rightarrow \bigwedge^j \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1} \right) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1} \rightarrow 0. \quad (1-6)$$

Esta seqüência será usada na prova do próximo resultado.

Teorema 1.6 (Fórmulas de Bott) Sejam inteiros $n > 0$, $i > 0$ e $j = 0, 1, \dots, n$.

(a) Temos

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j) = 0, \quad \text{se } i \neq j \quad \text{ou } i > n$$

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^i) \cong k, \quad \text{se } 0 \leq i \leq n$$

(b) Se l é um inteiro diferente de zero, então

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} i = 0 & \text{e} & l > j \\ & \text{ou} & \\ i = n & \text{e} & l < j - n \end{cases}$$

Demonstração: Para $j = 0$ o teorema segue do Teorema 1.3. Para $j = n$ também, observando que $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^n \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n-1)$ (veja [5], Exemplo II.8.20.1, página 182).

Seja l um inteiro. Tensorizando a seqüência de Euler (1-2) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)$ e tomando a seqüência longa em cohomologia, obtemos para $i = 1, \dots, n$, as seqüências exatas

$$H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) \rightarrow H^i(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) \quad (1-7)$$

$$0 \rightarrow H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) \quad (1-8)$$

Vamos considerar inicialmente o caso $j = 1$. Mostremos (a) primeiro. Faça $l = 0$ em (1-7) e (1-8). Da exatidão de (1-8) segue que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1) = 0$. Por outro lado, se $i \geq 2$ então $H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = 0$ e $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)) = 0$ pelo Teorema 1.3, e portanto segue da exatidão de (1-7) que $H^i(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1) = 0$. Finalmente, da seqüência exata

$$0 = \bigoplus_{i=1}^{n+1} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n+1} H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)) = 0$$

temos que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) \cong k$.

Mostremos (b) agora. Faça $l \neq 0$ em (1-7) e (1-8). Se $i = 2, \dots, n-1$ então $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) = 0$ e $H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) = 0$ pelo Teorema 1.3, e portanto segue da exatidão de (1-7) que $H^i(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$. Resta agora estudar os casos em que $i = 0$, $i = 1$ e $i = n$.

Vamos começar analisando o caso $i = n$. Suponhamos que $l \geq 1-n$. Pelo Teorema 1.3, temos que $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) = 0$ e $H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) = 0$. Fazendo $i = n$ na seqüência (1-7), vemos que $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$.

Suponhamos agora que $l = -n$. Então, pelo Teorema 1.3, temos que $H^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n)) = 0$, $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n)) = 0$ e $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n-1)) = k$. Da exatidão da seqüência (1-7) segue que $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(-n)) \cong k^{n+1}$.

Por último, suponha $l < -n$. Suponhamos por absurdo que $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$. Como a seqüência (1-7) é exata, teríamos um homo-

morfismo injetivo

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)).$$

Mas, pelo Teorema 1.3, temos que

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) \right) = (n+1) \binom{-l}{n} > \binom{-l-1}{n} = \dim \left(H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) \right),$$

um absurdo. Logo $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) \neq 0$.

Vejamos o caso $i = 0$. Se $l < 1$, então segue da exatidão de (1-8) e do Teorema 1.3 que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$. Por outro lado, se $l > 1$ então, usando um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior, que não repetiremos aqui, mostra-se que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) \neq 0$.

Se $l = 1$, então o último homomorfismo em (1-8) é sobrejetivo pois $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = 0$. Por outro lado, o penúltimo homomorfismo

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1))$$

é um isomorfismo pois ele corresponde ao produto

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)).$$

Da seqüência (1-8) concluímos que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(1)) = 0$ e $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(1)) = 0$.

Finalmente, suponha $i = 1$. Se $n = 1$, este é o caso $i = n$ já tratado. Logo, podemos supor $n > 1$. Então temos do Teorema 1.3 que $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) = 0$, e portanto o último homomorfismo de (1-8) é sobrejetivo. Da exatidão de (1-8) segue que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$ se $l < 0$.

Por outro lado, se $l > 0$, então o penúltimo homomorfismo em (1-8) também é sobrejetivo, pois corresponde ao produto

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)),$$

e todo polinômio homogêneo de grau positivo pertence ao ideal $(X_0, \dots, X_n)$. Segue também então que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) = 0$. Isto termina a prova para $j = 1$.

Se $n \leq 2$ o teorema está provado. Suponha agora que $n > 2$. Como o teorema vale para $j = 1$, também vale para $j = n - 1$. De fato, o produto

exterior de formas diferenciais nos dá um emparelhamento perfeito,

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^u \otimes \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{n-u} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^n$$

para todo $u = 1, \dots, n-1$. Em outras palavras, temos um isomorfismo natural

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^u \cong (\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{n-u})^\vee \otimes \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^n.$$

Como $\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^n$ é o feixe dualizante de $\mathbb{P}_k^n$, temos do Teorema 1.5 que

$$H^i(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{n-u}(l)) \cong H^{n-i}(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^u(-l))' \quad \text{para todo } l. \quad (1-9)$$

Usando o isomorfismo acima pra $u = 1$ derivamos o teorema para $j = n-1$ do já provado caso $j = 1$.

Se $n \leq 3$ o teorema já está provado. Suponhamos então que $n \geq 4$ e $2 \leq j \leq n-2$. Torcendo a seqüência (1-6) por l , obtemos para cada $j = 2, \dots, n$ a seqüência exata:

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l) \rightarrow \bigwedge^j (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(l) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}(l) \rightarrow 0. \quad (1-10)$$

Observemos que

$$\bigwedge^j (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-j)^{\oplus \binom{n+1}{j}}.$$

Da seqüência longa de cohomologia de (1-10) e do Teorema 1.3, obtemos:

$$H^i(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \cong H^{i-1}(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}(l))$$

para $i = 2, \dots, n-1$. Portanto, concluímos que

$$H^i(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \cong \begin{cases} H^{i-j+1}(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^1(l)) & \text{se } i \geq j \\ H^{i+n-j-1}(\mathbb{P}_k^n, \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{n-1}(l)) & \text{se } i < j \end{cases}$$

para $i = 2, \dots, n-1$. Logo, se $i \geq j$ o teorema segue do caso $j = 1$ já provado, e se $i < j$ o teorema segue do caso $j = n-1$. Com isto, resta analisarmos os casos $i = 0$, $i = 1$ e $i = n$.

O caso $i = 1$ segue do caso $i = n-1$, já provado, através dos isomorfismos (1-9), com j no lugar de u .

Passemos agora ao caso $i = 0$. Recordemos que $2 \leq j \leq n-2$. Suponhamos primeiro que $l-j \leq -1$. Da cohomologia da seqüência (1-10)

temos uma injeção:

$$H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \rightarrow H^0\left(\bigwedge^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(l)\right).$$

Como

$$H^0\left(\bigwedge^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(l)\right) = \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-j))$$

e, pelo Teorema 1.3, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l-j)) = 0$, concluimos que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) = 0$.

Suponhamos agora que $l = j$. Para $u = 0$ ou $u = 1$, pelo Teorema 1.3, temos que

$$H^u\left(\bigwedge^{j+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(j)\right) = \oplus H^u(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)) = 0.$$

Da cohomologia da sequência (1-10) temos então que

$$H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j)) \cong H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j+1}(j)).$$

Do caso $i = 1$, segue que $H^1(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j+1}(j)) = 0$. Logo $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j)) = 0$

Suponhamos agora que $l = j + 1$. Para provarmos que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \neq 0$, consideremos o morfismo $\bar{\psi}_j \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(j+1)$ (veja 1-3). Dele obtemos o homomorfismo

$$\oplus H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)) \xrightarrow{H^0(\bar{\psi}_j \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(j+1))} \oplus H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(2))$$

$$P_{i_1, \dots, i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j} \mapsto \sum_{v=1}^j (-1)^{v+1} X_{i_v} P_{i_1, \dots, i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_v} \wedge \dots \wedge e_{i_j}.$$

O núcleo deste homomorfismo não é zero, pois a imagem de

$$\sum_{i=0}^j (-1)^i X_i e_0 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_j$$

é zero. Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^0\left(\bigwedge^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(j+1)\right) & \xrightarrow{\delta} & H^0\left(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}(j+1)\right) \\ & \searrow^{H^0(\bar{\psi}_j \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(j+1))} & \downarrow \\ & & H^0\left(\bigwedge^{j-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(j+1)\right) \end{array}$$

Como $\text{Ker}\left(H^0(\bar{\psi}_j \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(j+1))\right)$ é não trivial, e como o homomorfismo

vertical é injetivo, segue que $\text{Ker}(\delta)$ é não trivial. Mas, tomando cohomologia na seqüência (1-10), temos que $\text{Ker}(\delta) = H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j+1))$. Segue que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j+1)) \neq 0$.

Finalmente, suponha que $l > j+1$. Seja $H \subseteq \mathbb{P}_k^n$ uma hipersuperfície de grau $l-j-1$. Então H induz um homomorfismo injetivo

$$\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j+1) \xrightarrow{H} \Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l).$$

Como $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(j+1)) \neq 0$, segue que $H^0(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \neq 0$.

Consideremos agora o último caso: $i = n$. Recordemos que $2 \leq j \leq n-2$. Usando os isomorfismos (1-9) para $i = n$ e $u = n-j$, e o caso $i = 0$ já provado, temos que $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \neq 0$, se $l < j-n$.

Finalmente, suponha que $l \geq j-n$. Da seqüência longa de cohomologia de (1-10), obtemos a seqüência exata:

$$H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}(l)) \rightarrow H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) \rightarrow H^n\left(\bigwedge^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-1)^{\oplus n+1})(l)\right).$$

Já provamos que $H^{n-1}(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^{j-1}(l)) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 1.3 temos que $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-j+l)) = 0$, pois $l \geq j-n$. Portanto $H^n(\Omega_{\mathbb{P}_k^n}^j(l)) = 0$. $\square$

Uma outra prova do Teorema 1.6 é dada em [4], Teorema 1.1 na página 40.

Sejam Y um subesquema fechado de um esquema X e $i : Y \rightarrow X$ o morfismo de inclusão. O núcleo do morfismo de feixes $i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ será denotado por $\mathcal{I}_{Y,X}$. O feixe $\mathcal{I}_{Y,X}$ é dito o feixe de ideais de Y em X .

Definição 1.7 Seja $R := k[X_0, \dots, X_n]$. Considere $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema fechado e $I \subseteq R$ um ideal homogêneo.

- (a) Se $\tilde{I} = \mathcal{I}_{X, \mathbb{P}_k^n}$, então I é dito um ideal de definição de X .
- (b) A saturação de I é o ideal homogêneo

$$\bar{I} := \{F \in R \mid \forall i \in \{0, \dots, n\}, \exists r \geq 0 \text{ tal que } X_i^r F \in I\}.$$

- (c) Se $\bar{I} = I$, então I é dito um ideal saturado.

Se $I \subseteq R$ é um ideal homogêneo, então o subesquema de $\mathbb{P}_k^n$ definido por I e por $\bar{I}$ são iguais. De fato, precisamos apenas mostrar que $I_{(\mathfrak{p})} = \bar{I}_{(\mathfrak{p})}$

para cada ideal homogêneo primo $\mathfrak{p} \subseteq R$ diferente de $(X_0, \dots, X_n)$, onde $I_{(\mathfrak{p})}$ denota o grupo dos elementos de grau 0 na localização $I_{\mathfrak{p}}$. Claramente $I_{(\mathfrak{p})} \subseteq \bar{I}_{(\mathfrak{p})}$. Por outro lado, como $\mathfrak{p} \neq (X_0, \dots, X_n)$, existe $i \in \{0, \dots, n\}$ para o qual $X_i \notin \mathfrak{p}$. Dado $a/b \in \bar{I}_{(\mathfrak{p})}$, como $a \in \bar{I}$, segue que existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i^r a \in I$. Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{X_i^r a}{X_i^r b} \in I_{(\mathfrak{p})}.$$

Lema 1.8 *Se X é um subesquema de $\mathbb{P}_k^n$ e $\mathcal{I}_X$ é o seu feixe de ideais, então*

$$I := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m))$$

é um ideal saturado e é o maior ideal de definição de X . Mais precisamente, todo ideal de definição de X tem saturação I .

Demonstração: Como $\mathcal{I}_X$ é um feixe quase-coerente, temos que $\mathcal{I}_X = \tilde{I}$ (veja Proposição II.5.15 de [5]). Logo, I é um ideal de definição de X .

Podemos ver facilmente que para todo ideal $I \subseteq R$ homogêneo, $\bar{I}$ é um ideal homogêneo. Portanto, para verificarmos que I é saturado, basta considerarmos polinômios homogêneos. Para cada $i = 0, \dots, n$, seja $U_i \subseteq \mathbb{P}_k^n$ o aberto $X_i \neq 0$. Então

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(U_i) \cong k[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)},$$

onde $k[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)}$ representa os elementos de grau 0 na localização $k[X_0, \dots, X_n]_{X_i}$. Seja $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ um polinômio homogêneo de grau d , i.e., $F \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d))$. Suponhamos que $F \in \bar{I}$. Então existe $s \geq 0$ tal que

$$X_i^s F \in \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m))$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que de fato $X_i^s F \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(s+d))$, e isto por sua vez implica que $F|_{U_i} \in H^0(U_i, \mathcal{I}_X(d))$. Como $\mathcal{I}_X(d)$ é um subfeixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d)$, segue que $F \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(d)) \subseteq I$. Logo I é saturado.

Seja J um ideal de definição de X , isto é, tal que $\tilde{J} = \mathcal{I}_X$. Então $J \subseteq I$. E como $\tilde{J} = \tilde{I}$, existe um inteiro $d \geq 0$ tal que todo $F \in I$ homogêneo de grau $\deg(F) \geq d$ pertence a J . Afirmamos que I é a saturação de J . De fato, $\bar{J} \subseteq \bar{I} = I$. Por outro lado, se $F \in I$ é homogêneo, então $X_i^d F \in J$ para cada $i = 0, \dots, n$, e portanto $F \in \bar{J}$.

□

Segue do Lema 1.8 que $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m))$ é o único ideal de definição de X saturado.

Definição 1.9 Sejam X um subesquema fechado de $\mathbb{P}_k^n$, de dimensão pura r e $I \subseteq R := k[X_0, \dots, X_n]$ o seu ideal saturado de definição. Dizemos que X é aritmeticamente Cohen–Macaulay (ou simplesmente a.C.M.) se R/I é Cohen–Macaulay.

A definição acima equivale a dizer que R/I tem uma resolução livre graduada de comprimento $n - r$ sobre $k[X_0, \dots, X_n]$, ou seja, que existem R -módulos livres graduados $F_1, \dots, F_{n-r}$ e uma seqüência exata da forma:

$$0 \rightarrow F_{n-r} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

De fato, se X é a.C.M. devemos verificar que a dimensão projetiva de R/I é $n - r$. Seja $\mathfrak{m} := (X_0, \dots, X_n)$. Temos que $\dim(R/I)_{\mathfrak{m}} = r + 1$, e como R/I é Cohen–Macaulay, temos que

$$\text{depth}(R/I)_{\mathfrak{m}} = \dim(R/I)_{\mathfrak{m}} = r + 1.$$

Pela fórmula de Auslander–Buchsbaum (veja [21], Exercício 19.8, página 489)

$$\text{pd}(R/I) = \text{depth}(\mathfrak{m}, R) - \text{depth}(\mathfrak{m}, R/I).$$

Além disso,

$$\text{depth}(\mathfrak{m}, R) = n + 1 \quad \text{e} \quad \text{depth}(\mathfrak{m}, R/I) = \text{depth}(R/I)_{\mathfrak{m}},$$

e portanto

$$\text{pd}(R/I) = n + 1 - (r + 1) = n - r.$$

Reciprocamente, se $\text{pd}(R/I) = n - r$, então segue da fórmula de Auslander–Buchsbaum que

$$\text{depth}(\mathfrak{m}, R/I) = r + 1.$$

Logo

$$\text{depth}(R/I)_{\mathfrak{m}} = \dim(R/I)_{\mathfrak{m}},$$

ou seja, $(R/I)_{\mathfrak{m}}$ é Cohen–Macaulay. Segue portanto que R/I é Cohen–Macaulay (veja [21], Exercício 19.10, página 489).

Lema 1.10 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema aritmeticamente Cohen-Macaulay, e suponha que a dimensão de X é $r > 0$. Então, para todo $m \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:*

- (a) *A restrição $\varphi_m : H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ é sobrejetiva.*
- (b) *$H^i(X, \mathcal{O}_X(m)) = 0$ para $i = 1, \dots, r-1$.*
- (c) *$H^j(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$ para $j = 1, \dots, r$.*

Demonstração: Se $r = n$, então $X = \mathbb{P}_k^n$ e o lema segue do Teorema de Serre (Teorema 1.3).

Suponhamos agora que $r < n$. Seja I o ideal de definição saturado de X . Consideremos uma resolução livre graduada de R/I :

$$0 \rightarrow F_{n-r} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

Dela obtemos uma resolução de $\mathcal{O}_X$ por feixes localmente livres totalmente decompostos:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-r} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \quad (1-11)$$

Seja $\mathcal{I}_X := \tilde{I}$ o feixe de ideais de X . Da seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m) \rightarrow \mathcal{O}_X(m) \rightarrow 0,$$

obtemos a seqüência de cohomologia

$$H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)).$$

Se mostrarmos que $H^1(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$, então o primeiro item do lema estará provado. Sejam $\mathcal{I}_i := \text{Im}(\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i-1})$ para $i = 2, \dots, n-r-1$ e façamos $\mathcal{I}_1 := \mathcal{I}_X$. Da seqüência exata longa (1-11) obtemos as seguintes seqüências exatas curtas:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{i+1}(m) \rightarrow \mathcal{F}_i(m) \rightarrow \mathcal{I}_i(m) \rightarrow 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n-r-2,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{n-r}(m) \rightarrow \mathcal{F}_{n-r-1}(m) \rightarrow \mathcal{I}_{n-r-1}(m) \rightarrow 0.$$

Tomemos a cohomologia das seqüências acima para obtermos as seguintes seqüências exatas:

$$H^i(\mathcal{F}_i(m)) \rightarrow H^i(\mathcal{I}_i(m)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{I}_{i+1}(m)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}_i(m)),$$

para $i = 1, \dots, n-r-2$. Os feixes $\mathcal{F}_i$ são da forma $\mathcal{F}_i = \bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m_j)$, onde a soma é finita e os m_j são inteiros. Logo $H^l(\mathcal{F}_i(m)) = 0$ para $l = 1, \dots, n-1$. Com este fato e as seqüências exatas acima concluimos que

$$H^i(\mathcal{I}_i(m)) \cong H^{i+1}(\mathcal{I}_{i+1}(m)),$$

para $i = 1, \dots, n-r-2$. Logo

$$H^1(\mathcal{I}_X(m)) \cong H^{n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)).$$

Temos também a seqüência exata

$$H^{n-r-1}(\mathcal{F}_{n-r-1}(m)) \rightarrow H^{n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)) \rightarrow H^{n-r}(\mathcal{F}_{n-r}(m))$$

e como

$$H^{n-r-1}(\mathcal{F}_{n-r-1}(m)) = H^{n-r}(\mathcal{F}_{n-r}(m)) = 0$$

segue que $H^{n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)) = 0$, e portanto $H^1(\mathcal{I}_X(m)) = 0$.

Para provarmos os demais itens consideremos a seguinte seqüência exata de cohomologia:

$$H^j(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) \rightarrow H^j(X, \mathcal{O}_X(m)) \rightarrow H^{j+1}(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)).$$

Se $j = 1, \dots, r-1$, então $H^j(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) = 0$. Logo precisamos apenas mostrar que $H^{j+1}(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$. Como no primeiro item, usamos as seqüências exatas

$$H^{j+k}(\mathcal{F}_k(m)) \rightarrow H^{j+k}(\mathcal{I}_k(m)) \rightarrow H^{j+k+1}(\mathcal{I}_{k+1}(m)) \rightarrow H^{j+k+1}(\mathcal{F}_k(m)),$$

para $k = 1, \dots, n-r-2$, para provarmos que

$$H^{j+1}(\mathcal{I}_X(m)) \cong H^{j+n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)).$$

Usamos agora a seqüência exata

$$H^{j+n-r-1}(\mathcal{F}_{n-r-1}(m)) \rightarrow H^{j+n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)) \rightarrow H^{j+n-r}(\mathcal{F}_{n-r}(m)),$$

para provarmos que $H^{j+n-r-1}(\mathcal{I}_{n-r-1}(m)) = 0$, e portanto que $H^{j+1}(\mathcal{I}_X(m)) = 0$.

□

Observação 1.11 Tomando $m = 0$ no item (a) do Lema 1.10, vemos que se $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ é a.C.M. então X é conexa.

Definição 1.12 Seja $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema fechado de dimensão $r \geq 0$. Dizemos que X é uma interseção completa se existem polinômios homogêneos $f_1, \dots, f_{n-r} \in k[X_0, \dots, X_n]$ tais que $\mathcal{I}_{X, \mathbb{P}_k^n} = \tilde{I}$, onde $I = (f_1, \dots, f_{n-r})$.

Lema 1.13 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema fechado de dimensão $r > 0$. Se X é uma interseção completa, então X é aritmeticamente Cohen–Macaulay.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{I}_{X, \mathbb{P}_k^n} = \tilde{I}$, onde I é gerado por $n - r$ polinômios homogêneos $f_1, \dots, f_{n-r}$. Temos que $\dim(R/I) = r + 1$. Como $\dim(R) = n + 1$, e R é regular, segue que $f_1, \dots, f_{n-r}$ formam uma seqüência regular. Consideremos o complexo de Koszul determinado por $f_1, \dots, f_{n-r}$. Como $f_1, \dots, f_{n-r}$ formam uma seqüência regular, o complexo é exato. Portanto ele fornece uma resolução livre de R/I de comprimento $n - r$. $\square$

Lema 1.14 *Seja X um subesquema finito de $\mathbb{P}_k^n$. Se $\mathcal{I}_X$ é o feixe de ideais de X , então $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ e cada $i = 2, \dots, n - 1$. Além disso, se $n \geq 2$, então $H^n(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$ se e somente se $m \geq -n$.*

Demonstração: Seja $m \in \mathbb{Z}$. Como X é um esquema finito, segue do Teorema 1.2 que $H^i(X, \mathcal{O}_X(m)) = 0$ para todo $i \geq 1$. Segue do Teorema 1.3 que $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$ e $i > n$. Considerando a cohomologia da seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m) \rightarrow \mathcal{O}_X(m) \rightarrow 0, \quad (1-12)$$

obtemos, para cada $i = 2, \dots, n - 1$, a seqüência exata

$$H^{i-1}(\mathcal{O}_X(m)) \rightarrow H^i(\mathcal{I}_X(m)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)).$$

Se $i = 2, \dots, n - 1$, então $H^{i-1}(\mathcal{O}_X(m)) = 0$ e $H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) = 0$, e da seqüência exata acima segue que $H^i(\mathcal{I}_X(m)) = 0$. Para a segunda afirmação, consideremos a seqüência exata

$$0 = H^{n-1}(\mathcal{O}_X(m)) \rightarrow H^n(\mathcal{I}_X(m)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_X(m)) = 0$$

que implica em

$$H^n(\mathcal{I}_X(m)) \cong H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)).$$

Pelo Teorema 1.3, $H^n(\mathcal{I}_X(m)) = 0$ se e somente se $m \geq -n$. $\square$

Os dois próximos resultados são fundamentais neste trabalho. Eles dão condições necessárias para o não anulamento do homomorfismo de restrição

$$H^b(\Omega_X^b) \rightarrow H^b(\Omega_Y^b).$$

Teorema 1.15 *Sejam X um esquema projetivo sobre um corpo k de característica zero e $f : Y \rightarrow X$ um morfismo finito. Seja $b := \dim Y$. Então o homomorfismo natural $H^b(\Omega_X^b) \rightarrow H^b(\Omega_Y^b)$ é diferente de zero.*

Demonstração: Ver [19], Proposição 2.1, p. 3774. □

Teorema 1.16 *Sejam X um esquema projetivo sobre um corpo k de característica $p > 0$ e $f : Y \rightarrow X$ um morfismo finito. Seja $b := \dim Y$. Suponha que existem divisores de Cartier $E_1, \dots, E_b$ em X tais que*

$$\int_X E_1 \cdots E_b \cdot f_*[Y] \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Então o homomorfismo natural $H^b(\Omega_X^b) \rightarrow H^b(\Omega_Y^b)$ é diferente de zero.

Demonstração: Ver [19], Proposição 2.2, p. 3777. □

Esteves e Kleiman apresentam os dois resultados acima em separado, pois dão uma prova mais simples para o primeiro. Contudo, a prova que dão para o segundo resultado vale em qualquer característica, inclusive $p = 0$. E se tomarmos E_i como seções hiperplanas de X , vemos que a condição pedida no enunciado do Teorema 1.16 é automaticamente verificada.

No caso em que $X = \mathbb{P}_k^n$ e f é um mergulho, a conclusão do Teorema 1.16 é verificada se $p \nmid \deg(Y)$. De fato, tomando os E_i como sendo hiperplanos, e usando o fato que $f_*[Y] = \deg(f)[f(Y)]$, concluimos que

$$\int_X E_1 \cdots E_b \cdot f_*[Y] = \deg(f) \deg(f(Y)) = \deg(Y).$$

1.2

Regularidade de Castelnuovo–Mumford

Teorema 1.17 (Serre) *Sejam X um esquema projetivo sobre k e $\mathcal{O}_X(1)$ um feixe invertível muito amplo em X . Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente, então*

- (a) *para cada $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ é um k -módulo finitamente gerado;*
- (b) *existe um inteiro n_0 , dependendo de $\mathcal{F}$, tal que para cada $i > 0$ e cada $n \geq n_0$, $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.*

Demonstração: Ver [5], Teorema 5.2. p. 228. □

Definição 1.18 Sejam $\mathcal{F}$ um feixe coerente em $\mathbb{P}_k^n$ e $m \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é m -regular se $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(m - i)) = 0$ para todo $i > 0$.

Dado um feixe coerente $\mathcal{F}$, pelos Teoremas 1.17 e 1.2, tomando $m = n_0 + n$ teremos que $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(m - i)) = 0$ para todo $i > 0$. Portanto, existe um inteiro m tal que $\mathcal{F}$ é m -regular.

Definição 1.19 Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente em $\mathbb{P}_k^n$. A regularidade de Castelnuovo–Mumford, ou simplesmente regularidade, de $\mathcal{F}$ é o menor inteiro r para o qual $\mathcal{F}$ é r -regular.

Teorema 1.20 *Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente em $\mathbb{P}_k^n$. Se $\mathcal{F}$ é m -regular, então:*

- (a) *$\mathcal{F}$ é s -regular para todo $s \geq m$.*
- (b) *o homomorfismo natural*

$$H^0(\mathcal{F}(s)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(s+1))$$

é sobrejetivo para todo $s \geq m$.

Demonstração: Vamos provar o teorema usando indução em n . Se $n = 0$ não há o que provar. Suponhamos $n > 0$, e seja H um hiperplano que não contém os pontos associados de $\mathcal{F}$. Consideremos a seqüência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-H) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0.$$

Pela hipótese sobre H , tensorizando a seqüência exata acima por $\mathcal{F}(s)$, obtemos a seqüência exata:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(s-1) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(s) \rightarrow 0.$$

Tomando $s := m - i$, para cada $i > 0$, consideremos o seguinte pedaço da seqüência longa de cohomologia:

$$H^i(\mathcal{F}(m - i)) \rightarrow H^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(m - i)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i - 1)).$$

Como $\mathcal{F}$ é m -regular, temos que $H^i(\mathcal{F}(m - i)) = H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i - 1)) = 0$, e portanto $H^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(m - i)) = 0$. Logo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$ é m -regular em H . Como $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$, por indução que o teorema é válido para $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$.

Consideremos agora a seqüência exata

$$H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i - 1)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i)) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(m - i)).$$

Se $i \geq 0$, então $H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i - 1)) = H^{i+1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(m - i)) = 0$, pois $\mathcal{F}$ é m -regular e $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H$ é $(m + 1)$ -regular. Segue que $H^{i+1}(\mathcal{F}(m - i)) = 0$ e portanto $\mathcal{F}$ é $m + 1$ -regular. Por indução, temos que $\mathcal{F}$ é s -regular para todo $s \geq m$.

Consideremos agora o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{F}(s)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)) & \xrightarrow{u} & H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(s)) \otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \\ \downarrow w & & \downarrow z \\ H^0(\mathcal{F}(s)) \hookrightarrow H^0(\mathcal{F}(s + 1)) & \xrightarrow{v} & H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H(s + 1)) \end{array}$$

Se $s \geq m$, então o homomorfismo u é sobrejetivo pois $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = 0$ e $H^1(\mathcal{F}(s - 1)) = 0$. Por outro lado, z é sobrejetivo pela hipótese de indução. Portanto $v \circ w$ é um homomorfismo sobrejetivo, e segue que $\ker(v) = H^0(\mathcal{F}(s))$ e $\text{Im}(w)$ geram $H^0(\mathcal{F}(s + 1))$. Mas, como o mapa $\mathcal{F}(s) \rightarrow \mathcal{F}(s + 1)$ é dado por multiplicação pela forma linear em $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1))$ definindo H , temos que $\ker(v) \subset \text{Im}(w)$. Portanto, w é sobrejetivo. $\square$

Observação 1.21 Se $\mathcal{F}$ é feixe coerente m -regular sobre $\mathbb{P}_k^n$, então o $k[X_0, \dots, X_n]$ -módulo

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{F}(d))$$

é gerado por elementos de grau no máximo m . De fato, uma aplicação iterada do Teorema 1.20, (b), mostra que

$$H^0(\mathcal{F}(m)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(m + d))$$

é sobrejetivo para todo $d \geq 0$.

Observação 1.22 A regularidade de um feixe de ideais próprios é positiva. De fato, se $\mathcal{I}$ é um feixe de ideais próprios, então $\mathcal{I}$ determina um subesquema próprio Y de $\mathbb{P}_k^n$. Seja r a regularidade de $\mathcal{I}$. Tomemos a cohomologia da seqüência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(r-n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(r-n) \rightarrow \mathcal{O}_Y(r-n) \rightarrow 0$$

para obtermos a seqüência exata

$$H^n(\mathcal{I}(r-n)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(r-n)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_Y(r-n)).$$

Pela definição de r , temos $H^n(\mathcal{I}(r-n)) = 0$, e como a dimensão de Y é menor que n temos $H^n(\mathcal{O}_Y(r-n)) = 0$, donde concluímos que $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(r-n)) = 0$. Pelo Teorema 1.3, temos que $r \geq 0$. Se $r = 0$, segue do Teorema 1.20 que $H^0(\mathcal{I}) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(d)) \rightarrow H^0(\mathcal{I}(d))$ é sobrejetivo para todo $d \geq 0$. Mas, como $\mathcal{I} \neq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$, temos que $H^0(\mathcal{I}) = 0$, logo $H^0(\mathcal{I}(d)) = 0$ para todo $d \geq 0$, e portanto $\mathcal{I} = 0$, um absurdo. Logo $r > 0$.

Definição 1.23 Se $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ é um subesquema próprio fechado, então a regularidade de X é a regularidade de seu feixe de ideais. Por convenção, a regularidade de $\mathbb{P}_k^n$ é 1.

Denotaremos a regularidade de Castelnuovo–Mumford de X por $\text{reg}(X)$.

Da definição de regularidade e da Observação 1.21, vemos que a regularidade de X é uma cota superior para o grau das hipersuperfícies que definem X .

Proposição 1.24 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema fechado de $\mathbb{P}_k^n$ de dimensão pura $s > 0$. Suponha que X é a.C.M.. Então a regularidade de X é o menor inteiro positivo r para o qual $H^s(\mathcal{O}_X(r-s-1)) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos primeiro que $s = n$, ou seja, $X = \mathbb{P}_k^n$. Por definição, a regularidade de $\mathbb{P}_k^n$ é 1. Pelo Teorema 1.3, $H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(r-n-1)) = 0$ se e somente se $r \geq 1$. Portanto, a proposição vale para $s = n$.

Suponhamos agora que $s < n$. Para determinarmos a regularidade de X precisamos encontrar o menor inteiro positivo r para o qual $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(r-i)) = 0$ para todo $i > 0$. Pelo Lema 1.10, temos que $H^j(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m)) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ e cada $j = 1, \dots, s$. Logo devemos

determinar o menor inteiro positivo m para o qual $H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{I}_X(m-i)) = 0$ para $i = s+1, \dots, n$. Consideremos a seqüência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0. \quad (1-13)$$

Consideremos a cohomologia da seqüência acima para obtermos as seqüências exatas

$$H^{i-1}(\mathcal{O}_X(l)) \rightarrow H^i(\mathcal{I}_X(l)) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)).$$

Se $i = s+2, \dots, n-1$, então $H^{i-1}(\mathcal{O}_X(l)) = H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(l)) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$, e portanto $H^i(\mathcal{I}_X(l)) = 0$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. Precisamos então determinar o menor inteiro positivo r para o qual valem as igualdades abaixo:

$$H^{s+1}(\mathcal{I}_X(r-s-1)) = H^n(\mathcal{I}_X(r-n)) = 0.$$

Como r é positivo, então $H^{n-1}(\mathcal{O}_X(r-n)) = 0$ e $H^n(\mathcal{O}_X(r-n)) = 0$. Da seqüência de cohomologia associada à seqüência exata (1-13) extraímos a seqüência exata:

$$H^{n-1}(\mathcal{O}_X(r-n)) \rightarrow H^n(\mathcal{I}_X(r-n)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(r-n)) \rightarrow H^n(\mathcal{O}_X(r-n)).$$

Portanto, $H^n(\mathcal{I}_X(r-n)) = 0$. Ainda, com $r > 0$,

$$H^{s+1}(\mathcal{I}_X(r-s-1)) \cong H^s(\mathcal{O}_X(r-s-1)),$$

e portanto a regularidade de X é o menor inteiro positivo r para o qual $H^s(\mathcal{O}_X(r-s-1)) = 0$. □

Definição 1.25 Seja $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ um subesquema. Se existir $a \in \mathbb{Z}$ tal que o feixe dualizante ω_X de X satisfaz $\omega_X = \mathcal{O}_X(a)$, então dizemos que X é a -subcanônica (ou simplesmente subcanônica).

Corolário 1.26 Suponha que $C \subseteq \mathbb{P}_k^n$ é uma curva a.C.M, a -subcanônica e de regularidade r . Então $r = a + 3$.

Demonstração: Se $n = 1$, então $C = \mathbb{P}_k^1$, e portanto $a = -2$ e $r = 1$.

Suponhamos que $n > 1$. Observemos que $H^0(C, \mathcal{O}_C(i)) = 0$ se e somente se $i < 0$. De fato, pelo Lema 1.10, temos que o homomorfismo de grupos

$$H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(i)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(i))$$

é sobrejetivo se $i \in \mathbb{Z}$. Se $i < 0$, pelo Teorema 1.3, temos $H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(i)) = 0$. Logo, pela sobrejetividade do homomorfismo acima, temos que $H^0(C, \mathcal{O}_C(i)) = 0$ se $i < 0$. Também temos que $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$. Por fim, se $i > 0$ então $\mathcal{O}_C(i)$ é muito amplo, suas seções mergulham a curva, e logo $H^0(C, \mathcal{O}_C(i))$ não pode ser zero.

Por dualidade, temos

$$H^1(\mathcal{O}_C(r-2)) = H^0((\mathcal{O}_C(a-r+2))').$$

Portanto, $H^1(\mathcal{O}_C(r-2)) = 0$ se e somente se $a-r+2 < 0$, isto é, se e somente se $r \geq a+3$. Da Proposição 1.24 segue que $r = a+3$. $\square$

O próximo resultado nos diz como calcular a regularidade de Castelnuovo–Mumford de interseções completas em $\mathbb{P}_k^n$.

Corolário 1.27 *Se $C \subseteq \mathbb{P}_k^n$ é uma curva que é interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, então a regularidade de C é*

$$d_1 + \dots + d_{n-1} - n + 2,$$

e o seu feixe dualizante é

$$\omega_C = \mathcal{O}_C(d_1 + \dots + d_{n-1} - n - 1).$$

Demonstração: Pelo Teorema 7.11 em [5], temos que o feixe dualizante de C é dado por

$$\omega_C = \omega_{\mathbb{P}_k^n} \otimes \bigwedge^{n-1} \left(\frac{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}^2} \right)^\vee.$$

Da hipótese,

$$\left(\frac{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}^2} \right)^\vee \cong \mathcal{O}_C(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_C(d_{n-1})$$

e portanto

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{P}_k^n} \otimes \bigwedge^{n-1} \left(\frac{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}}{\mathcal{I}_{C, \mathbb{P}_k^n}^2} \right)^\vee &\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n-1) \otimes \bigwedge^{n-1} (\mathcal{O}_C(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_C(d_{n-1})) \\ &\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_C(d_1 + \dots + d_{n-1}) \\ &\cong \mathcal{O}_C(-n-1 + d_1 + \dots + d_{n-1}). \end{aligned}$$

Concluimos que C é uma curva $(d_1 + \dots + d_{n-1} - n - 1)$ -subcanônica. Pelo Corolário 1.26, temos

$$r = d_1 + \dots + d_{n-1} - n - 1 + 3.$$

□