Introdução

Este trabalho se divide em três capítulos. No primeiro apresentamos algumas definições e resultados usados nos dois capítulos seguintes. No segundo trabalhamos com campos vetoriais (com coeficientes em um fibrado em retas) sobre espaços projetivos. Determinamos, sob certas condições, cotas para o grau de hipersuperfícies que definem curvas invariantes por tais campos. No terceiro estudamos equações de Pfaff de posto 1 sobre espaços projetivos. Nele determinamos, sob certas condições, cotas para o grau de hipersuperfícies soluções de tais equações.

Consideremos um corpo algebricamente fechado k de característica $p \geq 0$, o n-espaço projetivo $\mathbb{P}^n_k$ sobre k, e um campo vetorial η sobre $\mathbb{P}^n_k$ (veja Definição 2.1). O grau de η é o grau da hipersuperfície de pontos em um hiperplano geral $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ onde a direção dada por η vive em H. Denotamos este grau por $m := \deg(\eta)$ (veja Definição 2.6).

Um subesquema fechado $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é dito invariante pelo campo vetorial η, se η induz um campo vetorial sobre Y (veja Definição 2.3). No caso $k = \mathbb{C}$ e $n = 2$, em 1891, Poincaré considerou em [2], página 161, a seguinte questão: Podemos limitar o grau de curvas planas invariantes por η? Se tal limite for dado, então podemos restringir a procura por tais curvas a um espaço vetorial de dimensão finita. O problema de encontrar tais limites é conhecido como *Problema de Poincaré*.

Não é possível encontrar o limite procurado por Poincaré somente em termos do grau m do campo vetorial (veja a Observação 9 em [17], página 7). Entretanto, dada uma curva reduzida $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d invariante por η, limites para d em termos de m foram dados sob certas condições em η ou C. Por exemplo, se C é uma curva em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d, que tem somente nós por singularidades, D. Cerveau e A. Lins Neto mostraram em [8] que C é invariante por um campo vetorial de grau m somente se $d \leq m+2$, valendo a igualdade somente se C é redutível.

Generalizações do resultado de Cerveau e Lins Neto logo apareceram na literatura. M. Soares mostrou em [9] que se $k = \mathbb{C}$ e H é uma hipersuperfície lisa de grau d invariante por um campo de grau m, então

$d \leq m+1$. Em 2000, M. Brunella e L. G. Mendes mostraram em [14] que se $H \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é invariante por η, então $\deg(H) \leq m+n$, se H tem apenas singularidades do tipo "normal-crossings".

De modo geral, se η é um campo vetorial de grau m em $\mathbb{P}^n_k$, podemos considerar o problema de Poincaré como o de restringir a procura por subesquemas fechados invariantes por η a um subespaço vetorial de dimensão finita. Este problema pode ser resolvido se conseguirmos limitar os graus das hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n_k$ que definem Y, ao invés de tentar limitar o grau de Y propriamente. Esses graus são limitados pela regularidade de Castelnuovo–Mumford $\operatorname{reg}(Y)$ (veja Observação 1.21 e Definição 1.23). Por esta razão a segunda seção do primeiro capítulo é dedicada à regularidade de Castelnuovo–Mumford. Todos os resultados desta seção são conhecidos, a menos, talvez, da Proposição 1.24 e do Corolário 1.26, para os quais não encontramos referências.

Levando em conta que a regularidade de uma curva plana é o seu grau (veja o Corolário 1.27), E. Esteves generaliza em [17] a desigualdade de Cerveau e Lins Neto:

Teorema 0.1 *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma curva reduzida, aritmeticamente Cohen–Macaulay, de grau d e com no máximo nós ordinários por singularidades. Se C é invariante por um campo vetorial η de grau m em $\mathbb{P}^n_k$ e C contém somente um número finito de singularidades de η, então $d \leq m+2$, com igualdade somente se C é redutível ou $p|d$, onde $p = \operatorname{car}(k)$.*

Em seguida, E. Esteves e S. Kleiman analisaram o que ocorre com curvas planas que possuem outros tipos de singularidades além dos nós ordinários. Eles provaram o resultado seguinte em [20]:

Teorema 0.2 *Seja $C \subseteq \mathbb{P}^2_k$ uma curva reduzida de grau d. Assuma que k é um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ com $p \nmid d$. Suponha que C é uma curva invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^2_k$ de grau m. Sejam Σ o subesquema dos pontos singulares de C, $\sigma := \operatorname{reg}(\Sigma)$ e $\rho := \sigma - d + 2$. Então*

$$d \leq \begin{cases} m+1, & se\ \rho \leq 0 \\ m+1+\rho, & se\ \rho > 0 \end{cases}$$

Além disso, se o campo possui um número finito de singularidades e $d \geq 2m+2$, então $d = m+1+\rho$.

Cotas para o grau d envolvendo as singularidades de C já haviam aparecido em [10], mas o resultado acima é o primeiro que leva em consideração a posição das singularidades, refletida em σ.

Neste trabalho conseguimos generalizar o Teorema 0.2 para dimensão superior, provando:

Seja $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma curva, $n \geq 2$. Suponha que C é reduzida, aritmeticamente Cohen–Macaulay, subcanônica e de grau d. Assuma que k é um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ com $p \nmid d$. Sejam Σ o subesquema das singularidades de C, $\sigma := \mathrm{reg}(\Sigma)$, $r := \mathrm{reg}(C)$ e $\rho := \sigma - r + 2$. Suponha que C é uma curva invariante por um campo vetorial de $\mathbb{P}^n_k$ de grau m. Se $\dim(\mathcal{S} \cap C) = 0$, onde $\mathcal{S}$ é o lugar singular do campo, então

$$r \leq \begin{cases} m+1, & \text{se } \rho \leq 0 \\ m+1+\rho, & \text{se } \rho > 0 \end{cases}$$

Observamos ainda que o resultado acima, que neste trabalho é o Teorema 2.13, é uma generalização parcial do Teorema 0.1. De fato, mostramos no Lema 2.20 que se $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é uma curva integral, aritmeticamente Cohen–Macaulay e subcanônica, que tem apenas nós ordinários por singularidades, vale que $\mathrm{reg}(\Sigma) \leq \mathrm{reg}(C) - 2$, ou seja, $\rho \leq 0$. E portanto $r \leq m + 1$. A generalização é parcial, pois foi necessário acrescentar a hipótese de subcanonicidade.

Na Proposição 2.18 damos condições necessárias para que seja verdadeira a igualdade $r = m+1+\rho$ no enunciado acima. Para estabelecermos esta igualdade precisamos determinar a regularidade do lugar singular $\mathcal{S}$ de um campo vetorial, quando $\mathcal{S}$ tem um número finito de pontos. Este cálculo é feito no Capítulo 2 e é apresentado no Teorema 2.10. Apesar de a hipótese sobre a dimensão de $\mathcal{S}$ parecer muito restritiva, ela não é, pois em geral o lugar singular de um campo vetorial tem dimensão zero.

Se $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é uma curva que é a interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, \ldots, d_{n-1}$, e C é invariante por um campo vetorial η de grau m, M. Soares provou em [15] que:

$$d_1 + \ldots + d_{n-1} \leq m + n - 1 \qquad \text{se } C \text{ é lisa.}$$

Se C tem no máximo nós ordinários como singularidades, A. Campillo, M. Carnicer e J. García de la Fuente mostraram em [16] que $\sum d_i \leq m + n$. (Eles também obtiveram cotas para $\sum d_i$ no caso em que C tem singularidades piores.) Como consequência do Teorema 2.13 obtemos o Corolário 2.19, que é uma generalização destes resultados:

Se $C \subseteq \mathbb{P}^n_k$ é interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, \ldots, d_{n-1}$, e C é invariante por um campo vetorial de grau m, então:

$$d_1 + \cdots + d_{n-1} \leq \begin{cases} m+n-1, & \text{se } \rho \leq 0 \\ m+n-1+\rho, & \text{se } \rho > 0 \end{cases}$$

desde que a característica de k seja $p \geq 0$ com $p \nmid \deg(C)$.

O resultado acima segue do fato que

$$\mathrm{reg}(C) = d_1 + \cdots + d_{n-1} - n + 2,$$

como provado no Corolário 1.27. No enunciado acima, ρ é como no enunciado anterior, isto é, $\rho = \mathrm{reg}(\Sigma) - \mathrm{reg}(C) + 2$, e portanto

$$\rho = \mathrm{reg}(\Sigma) + n - d_1 - \cdots - d_{n-1}.$$

Neste trabalho também generalizamos o Teorema 0.2 de Esteves e Kleiman em outra direção, via equações de Pfaff. Mais especificamente, consideremos agora uma 1-forma diferencial algébrica

$$\omega = F_0 dX_0 + \ldots + F_n dX_n,$$

onde os F_i são polinômios homogêneos de grau $m-1$ satisfazendo $\sum X_i F_i = 0$. A condição garante que ω define uma seção de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Dizemos que m é o grau de ω. A forma ω define uma equação de Pfaff $\omega = 0$ de posto 1 em $\mathbb{P}^n_k$ (veja Definição 3.1 e Exemplo 3.2). Dizemos que uma hipersuperfície reduzida $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ dada por $F = 0$, é uma solução da equação de Pfaff se existe uma 2-forma

$$\theta_F \in \bigwedge^2 \Omega^1_{k[X_0,\ldots,X_n]|k}$$

satisfazendo $\omega \wedge dF = F\theta_F$ (veja Definição 3.5 e Exemplo 3.6).

Note que se η é um campo vetorial de grau m em $\mathbb{P}^2_k$, então η é dado por um campo

$$\eta = G_0 \frac{d}{dX_0} + G_1 \frac{d}{dX_1} + G_2 \frac{d}{dX_2},$$

onde G_0, G_1 e G_2 são polinômios homogêneos de grau m. Associado a η

temos uma equação de Pfaff de grau $m+2$, dado pelo determinante

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{vmatrix} dX_0 & dX_1 & dX_2 \\ X_0 & X_1 & X_2 \\ G_0 & G_1 & G_2 \end{vmatrix} = \\ &= (X_1G_2 - X_2G_1)dX_0 + (X_2G_0 - X_0G_2)dX_1 + (X_0G_1 - X_1G_0)dX_2.\end{aligned}$$

Mostra-se, em condições razoáveis, que uma curva plana reduzida é invariante por η se e somente se ela é solução de $\omega = 0$ (veja Proposição 3.11).

Assim, enxergando o Teorema 0.2 como um teorema sobre hipersuperfícies que são soluções de equações de Pfaff de posto 1, provamos no Teorema 3.14 a seguinte generalização:

Seja $\omega = 0$ uma equação de Pfaff de posto 1 e grau m em $\mathbb{P}^n_k$. Sejam $H \subseteq \mathbb{P}^n_k$ uma hipersuperfície reduzida de grau d, Σ o lugar singular de H e $\sigma := reg(\Sigma)$ a sua regularidade. Se H é uma solução da equação de Pfaff $\omega = 0$, se nenhuma componente de H está contida no lugar singular da equação, e se a característica de k é $p \geq 0$ com $p \nmid d$, então

$$d \leq \begin{cases} m-1, & \text{se } \rho \leq 0 \\ m-1+\rho, & \text{se } \rho > 0 \end{cases}$$

onde $\rho := \sigma - d + 2$.

O lugar singular $\mathcal{S}$ da equação de Pfaff $\omega = 0$, onde $\omega = \sum F_i dX_i$, é o esquema de zeros de $F_0, \ldots, F_n$, ou o esquema de zeros da seção ω de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(m)$. Seu feixe de ideais é então a imagem do homomorfismo induzido $T_{\mathbb{P}^n_k}(-m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$. No caso em que núcleo deste homomorfismo é localmente livre, e totalmente decomposto, conseguimos calcular, no Proposição 3.21, a regularidade de Castelnuovo–Mumford de $\mathcal{S}$. Este pode ser o primeiro passo para determinar quando vale a igualdade $d = m-1+\rho$ acima. Infelizmente, não conseguimos avançar além deste primeiro passo.