

Joana Darc Antonia Santos
da Cruz

Conjuntos Algébricos
Invariantes de Folheações
no Espaço Projetivo

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura

Rio de Janeiro
Junho de 2006

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Joana Darc Antonia Santos da Cruz

**Conjuntos Algébricos Invariantes de
Folheações no Espaço Projetivo**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática Pura

Orientador: Prof. Derek Douglas Jack Hacon
Co-Orientador: Prof. Eduardo de Sequeira Esteves

Rio de Janeiro
Junho de 2006



Joana Darc Antonia Santos da Cruz

**Conjuntos Algébricos Invariantes de
Folheações no Espaço Projetivo**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Matemática Pura. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Derek Douglas Jack Hacon

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Eduardo de Sequeira Esteves

Co-Orientador

IMPA

Prof. Jorge Vitório Bacellar dos Santos Pereira

IMPA

Prof. Israel Vainsencher

UFMG

Prof. Miriam del Milagro Abdón

UFF

Prof. Carolina Bhering de Araújo

IMPA

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de Junho de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Graduou-se Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais em 22 de janeiro de 1994. Fez o mestrado em Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais no período de 03/1994 à 12/1996 em Geometria Algébrica. Trabalha desde 02/1998 na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Ficha Catalográfica

Cruz, Joana Darc Antonia Santos da

Conjuntos Algébricos Invariantes de Folheações no Espaço Projetivo/ Joana Darc Antonia Santos da Cruz; orientador: Derek Douglas Jack Hacon; co-orientador: Eduardo de Sequeira Esteves. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2006.

v., 75 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Folheação algébrica. 3. Geometria algébrica. 4. Campo vetorial. 5. Campo de Pfaff. 6. Regularidade de Castelnuovo–Mumford I. Hacon, D.D.J.. II. Esteves, E.. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Aos meus pais, Vera e Geraldo.

Agradecimentos

Em particular, agradeço ao meu co-orientador Prof. Eduardo de Sequeira Esteves.

Ao Prof Derek Douglas Jack Hacon.

Aos demais componentes da banca: Profs: Jorge Vitório Pereira, Israel Vainsencher, Miriam Abdón e Carolina Araújo.

A Reginaldo J. Santos.

À minha família.

Aos professores e funcionários da PUC-Rio e do IMPA.

À CAPES da qual fui bolsista durante o tempo de Doutorado.

Resumo

Cruz, Joana Darc Antonia Santos da; Hacon, D.D.J.; Esteves, E..
**Conjuntos Algébricos Invariantes de Folheações no Espaço
Projetivo.** Rio de Janeiro, 2006. 75p. Tese de Doutorado —
Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do
Rio de Janeiro.

A regularidade de Castelnuovo–Mumford r de uma variedade $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ é um limite superior para o grau das hipersuperfícies que definem V . Neste trabalho damos uma cota superior para r quando V é uma curva aritmeticamente Cohen–Macaulay e subcanônica que é invariante por um campo vetorial sobre \mathbb{P}_k^n (com coeficientes em um fibrado de retas), sob certas condições no corpo k . Além disso, damos uma cota superior para r (ou ainda, para o grau de V), quando V é uma hipersuperfície solução de um campo de Pfaff de posto 1 sobre \mathbb{P}_k^n , sob certas condições no corpo k . Estes limites obtidos são generalizações do limite dado por E. Esteves em [17].

Palavras–chave

Folheação Algébrica; Geometria Algébrica; Campo Vetorial; Campo de Pfaff; Regularidade de Castelnuovo–Mumford.

Abstract

Cruz, Joana Darc Antonia Santos da; Hacon, D.D.J.; Esteves, E..
Invariant Algebraic Varieties by Foliations on Projective Space. Rio de Janeiro, 2006. 75p. PhD. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Castelnuovo–Mumford regularity r of the variety $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ is an upper bound for the degrees of the hypersurfaces necessary to cut out V . In this work we give a bound for r when V is an arithmetically Cohen–Macaulay and sub-canonical curve which is invariant by a vector field on \mathbb{P}_k^n with coefficients in an invertible sheaf, under some conditions on the field k . Furthermore, we give a bound for r (i.e. for the degree of the V) when V is a hypersurface solution of the Pfaff equation of the rank 1, under some conditions on the field k . In both limits we consider the positions of the singularities of the V . These limits are the generalizations of the bounds given by E. Esteves in [17].

Keywords

Foliations; Algebraic geometry; Vector Fields; Pfaff Field; Castelnuovo–Mumford regularity.

Sumário

Introdução	9
1 Resultados Preliminares	14
1.1 Cohomologia	14
1.2 Regularidade de Castelnuovo–Mumford	29
2 Campos Vetoriais	35
3 Equações de Pfaff	56
3.1 Campos de Pfaff	56
3.2 Regularidade do lugar singular	69
Bibliografia	74