

3

Determinação da Trajetória Ótima

Tal como acontece em muitos domínios da ciência moderna, é possível encontrar os primeiros passos da otimização em culturas de povos antigos. Citando, a título de exemplo, o conhecido episódio narrado por *Virgílio*, segundo o qual a rainha *Dido*, ao fundar a cidade de “Cartago”, determinou que essa fosse planejada segundo a figura geométrica para qual seria maximizada a área por ela delimitada com um dado perímetro constante [22]. Outro exemplo muito conhecido é o problema da braquistócrona, que foi proposto por *John Bernoulli* em 1696 como desafio à comunidade matemática da época. O problema consiste em encontrar uma curva que una dois pontos A e B situados num mesmo plano vertical, com a propriedade de que uma partícula inicialmente em repouso que deslize sobre essa curva leve o menor tempo possível para ir, sob a ação da gravidade, de A até B . O ponto A é suposto estar acima do ponto B mas não na mesma vertical. A solução deste problema foi publicada pouco menos de um ano após a sua colocação.

Todavia, o desenvolvimento dos métodos de otimização inicia-se, praticamente, só no século XVIII. Na verdade, é a partir dos anos quarenta que os desafios lançados por mais complexos problemas decisoriais visando a melhor utilização dos recursos disponíveis, as surpreendentes potencialidades do recém-descoberto cálculo automático e um maior esforço de matematização de problemas reais, permitem desenvolver a maioria dos potentes métodos de otimização que atualmente existem e que podem ser utilizados como preciosos instrumentos de apoio ao processo da tomada de decisões.

3.1

Definição da Otimização aplicada aos veículos

O problema de otimização é muito utilizado em diversas áreas da ciência, e seu objetivo é diferente em cada uma delas, porém o tratamento quase sempre é o mesmo. A otimização de alguma função em relação a alguma variável é abordada

segundo um procedimento matemático, e portanto, sempre é necessário trabalhar com modelos que expressem o comportamento físico do sistema que se quer otimizar. Neste trabalho deseja-se obter a trajetória ótima para o percurso de um veículo de competição, cujo principal objetivo é percorrer o traçado de um circuito no mínimo tempo possível. Este é um problema que pode ser resolvido segundo técnicas de otimização. Para tanto deve-se trabalhar com um modelo matemático que represente o veículo e as condições às quais está sujeito. No capítulo anterior desenvolveu-se um modelo matemático não linear do veículo, relativamente complexo que, após algumas avaliações e tentativas iniciais, foi considerado inadequado para o tratamento de interesse, e provavelmente será empregado apenas quando forem aplicadas técnicas de controle ótimo que não é a intenção deste trabalho. Então, para resolver o problema de otimização, se propõe um outro modelo matemático, muito mais simples, mas suficiente para descrever os fenômenos físicos envolvidos na dinâmica veicular, necessários para a determinação da trajetória ótima, com um tempo mínimo de percurso. O modelo veicular do Capítulo 2 é empregado para avaliar os resultados encontrados a partir da representação mais simples, como será visto adiante no Capítulo 4.

Em [21] tem-se a abordagem do problema da trajetória ótima através das ferramentas de otimização, na qual o modelo matemático do veículo é mais limitado e menos representativo do que o desenvolvido neste trabalho. Deste modo, considerou-se suficiente a escolha feita, como, inclusive, comprovam os resultados encontrados, como discutido a seguir.

A Figura 3.1 apresenta uma curva com duas trajetórias possíveis: uma pelo centro da pista, e outra empregando a tangência em um determinado ponto. Pode-se provar, por conceitos triviais de movimento de uma partícula, que, quando há limitação na aceleração lateral (centrípeta) máxima, no primeiro caso a velocidade limite de percurso é menor que no segundo caso. Considerando que as distâncias a serem percorridas são praticamente iguais, o tempo de percurso da primeira trajetória será maior que o da segunda, fornecendo uma vantagem competitiva àquele que escolher o segundo traçado. A segunda seria uma “trajetória ótima”.

O exemplo da Figura 3.1 diz muito do trabalho que se pretende fazer. Aqui, aparentemente, se tem dois tipos de análises independentes, relacionadas aos movimentos longitudinal e lateral do veículo. Uma possibilita determinar o valor da velocidade que o veículo tem em cada instante de tempo, e a outra a mudança

de direção da velocidade. Porém ambas as análises estão fortemente ligadas. Partindo deste exemplo é possível ver que o modelo mais simples deve ter duas variáveis independentes, mas interrelacionadas, uma para cada um dos movimentos (lateral e longitudinal), como se explica de forma detalhada no item a seguir.

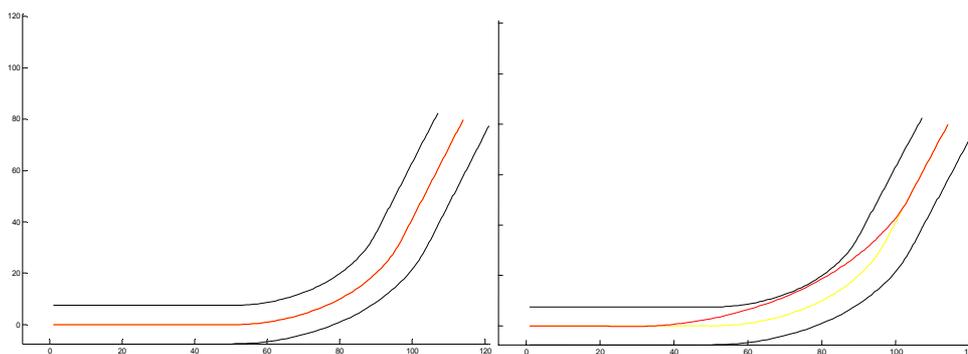


Figura 3.1. Duas trajetórias possíveis em uma curva, à esquerda se apresenta a trajetória pelo meio da pista, à direita a trajetória tangente à curva.

3.2 Modelo massa pontual

O modelo de massa pontual é uma representação bastante simples para um veículo terrestre, que não permite observar completamente a sua dinâmica, porém é suficiente para a determinação do traçado da trajetória ótima, levando à resultados muito próximos do real, como será visto. Uma vez obtida a trajetória ótima empregando este modelo simples, utiliza-se o modelo dinâmico não linear do veículo para percorrer o traçado estabelecido, mediante estratégias de controle, e verifica-se as diferenças encontradas.

Para determinação do modelo de massa pontual, parte-se da análise das equações de movimento, como no capítulo anterior, considerando-se o veículo como uma partícula no espaço, com sua massa concentrada no Centro de Massa. A análise é realizada supondo também um referencial local embarcado no veículo e a transformação de coordenadas para o referencial global, de modo a assim obter a trajetória do veículo, como no modelo mais complexo visto anteriormente. O modelo massa pontual pode ser obtido ao se fazer simplificações de linearidade e considerações físicas naquele modelo dinâmico não linear.

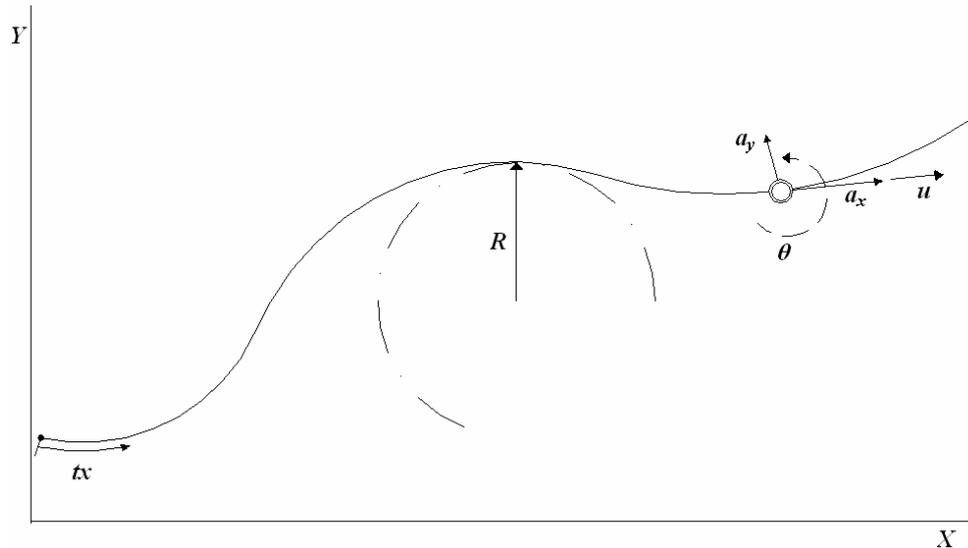


Figura 3.2. Variáveis do modelo massa pontual.

O modelo massa pontual descreve o movimento longitudinal, através da equação da aceleração do veículo em relação ao seu eixo x , dada por

$$u_x = u_0 + \int a_x dt \quad (3.1)$$

na qual, u_x é a velocidade (longitudinal) em função do tempo; u_0 é a velocidade inicial; a_x é a função aceleração (aceleração longitudinal) em função do tempo e dt é diferencial do tempo (variável de integração).

Deve-se ter em conta que para o modelo massa pontual do veículo não existe qualquer movimento lateral no referencial local. Mas então o que significa a aceleração lateral? Isto caracteriza apenas a força que torna possível mudar a direção do vetor velocidade (longitudinal). Não é feita qualquer integração da aceleração lateral, mas emprega-se esta variável para determinar a velocidade angular, associada à mudança de direção do vetor velocidade, segundo

$$a_y = \frac{u_x^2}{R} \quad (3.2)$$

$$u_x = R \dot{\theta} \quad (3.3)$$

nas quais, a_y é a função aceleração lateral (ou aceleração normal) em função do tempo, R é o raio de curvatura em função do tempo, $\dot{\theta}$ é a velocidade angular em função do tempo.

Deste modo, a função das equações associadas ao movimento lateral é apenas caracterizar o movimento de rotação, que pode representar, dentro de

certas considerações, a atitude do veículo. A aceleração lateral gera um raio de curvatura e também uma velocidade angular para cada instante de tempo, que estão relacionadas como mostrado. Vê-se claramente que o movimento lateral está muito relacionado ao movimento longitudinal.

Arruma-se as Equações 3.2 e 3.3 que relacionam a aceleração lateral, a velocidade longitudinal e a velocidade angular, levando às Equações 3.5, 3.6 e 3.7,

$$a_y = \frac{u_x^2}{R} = \frac{u_x^2}{\left(\frac{u_x}{\dot{\theta}}\right)} = u_x \cdot \dot{\theta} \quad (3.4)$$

ou

$$\dot{\theta} = \frac{a_y}{u_x} \quad (3.5)$$

e

$$\theta = \int \dot{\theta} dt \quad (3.6)$$

$$R = \frac{u_x}{\dot{\theta}} \quad (3.7)$$

nas quais θ representa a atitude do veículo (ângulo *yaw* do veículo).

Agora, com as Equações 3.1, 3.5, 3.6 e 3.7 é possível fazer uma transformação de coordenadas e expressar a velocidade do veículo em coordenadas globais para, depois, mediante uma integração no tempo, obter a sua posição, ou seja a trajetória, de acordo com

$$U_x = u_x \cdot \cos(\theta) \quad (3.8)$$

$$V_y = u_x \cdot \text{sen}(\theta) \quad (3.9)$$

$$X = \int U_x dt \quad (3.10)$$

$$Y = \int V_y dt \quad (3.11)$$

nas quais, U_x é a velocidade do veículo na direção do eixo **x** do referencial global, V_x é a velocidade na direção do eixo **y** do referencial global, **X** e **Y** são as posições no referencial global.

Assim o modelo massa pontual está completamente descrito nas equações anteriores, que podem ser facilmente resolvidas no *Simulink/Matlab*, onde as variáveis de entrada são as duas acelerações, longitudinal e lateral, a massa do

veículo é constante no tempo, e as funções de saída são a posição nos eixos X e Y no referencial global, que geram a trajetória do veículo.

3.3 Algoritmos de Otimização

Existem vários modos de classificar os métodos de otimização. Entre os principais têm-se os métodos diretos e indiretos. São denominados métodos indiretos aqueles que não dependem da comparação direta dos valores numéricos assumidos em dois ou mais pontos. Os métodos indiretos fazem uso de condições necessárias para que um ponto seja de mínimo ou de máximo, condições essas expressas através de relações matemáticas, que são, por sua própria natureza, indiretas. Os métodos diretos pressupõem a determinação e comparação dos valores da função a otimizar em diversos pontos situados dentro da faixa de definição das variáveis independentes [23]. O problema a ser aqui resolvido por suas características deverá ser tratado por um método indireto.

Uma outra possibilidade para a solução do problema em questão é a aplicação dos algoritmos genéticos, que formam uma família de procedimentos computacionais inspirados na evolução. Normalmente os algoritmos genéticos são vistos como otimizadores de funções, embora a quantidade de problemas para os quais se aplicam seja bastante abrangente [24].

Os procedimentos evolucionários não serão adotados neste trabalho, mas poderão ser investigados em futuras pesquisas nesta área, por se considerar que ainda é preciso conhecer melhor os resultados do problema tratado através de metodologias clássicas de otimização.

Como em quase todo problema de otimização é preciso ter uma função objetivo e uma ou mais restrições, identifica-se estes no problema específico. Analisa-se a seguir especificamente o uso do modelo massa pontual no procedimento de otimização, e define-se o algoritmo a utilizar em forma geral para que seja entendido o que se pretende fazer, sem entrar ainda na programação no *Simulink/Matlab*. No modelo massa pontual, descrito no item anterior, as variáveis de entrada são as acelerações e as funções de saída são a posição nas coordenadas globais. O objetivo é que o veículo percorra, dentro de uma pista pré-determinada, um traçado no menor tempo possível.

Deste modo, as variáveis do problema de otimização são as acelerações (lateral e longitudinal), que no caso de um veículo de competição, percorrendo uma determinada pista, possuem perfis com características conhecidas. Assim não se pretende obter como resultado qualquer função aceleração, mas sim formas de onda no tempo que caracterizem as acelerações que são aproximadas ao comportamento físico que ocorre em um veículo de competição, como é explicado mais detalhadamente adiante.

As restrições do problema de otimização neste caso são três: o veículo deve ficar em todo tempo dentro da pista, as acelerações não podem ultrapassar o limite estabelecido pelo círculo de aderência do veículo, e a velocidade não pode ser maior que a máxima admissível (limitação física devida potência do motor).

Na Figura 3.3 mostra-se, em forma esquemática muito simplificada, o que se pretende conseguir da otimização. Neste diagrama apresenta-se as variáveis de otimização e as restrições que a otimização vai considerar aplicados no modelo massa pontual, incluído no processo de otimização.

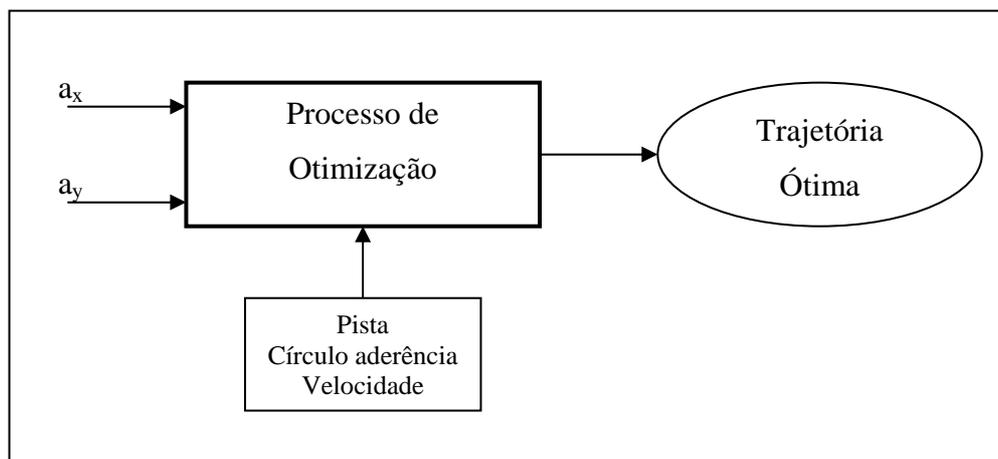


Figura 3.3. Diagrama do algoritmo de Otimização.

A seguir explica-se cada parte do algoritmo de otimização que vai se utilizar, tratando das variáveis e das restrições, da função objetivo, e dos critérios considerados para trabalhar dentro dos limites da realidade física do problema em questão.

3.4

Definição das variáveis e restrições

Descreve-se agora as variáveis associadas ao modelo matemático empregado na otimização. Pode-se chamar as variáveis do modelo massa pontual como variáveis dinâmicas, que são definidas pela equação de movimento. Estas variáveis que descrevem o movimento do veículo e sua localização são: a velocidade angular do veículo $\dot{\theta}$, a velocidade longitudinal u_x , posição no eixo x do referencial global (X), posição no eixo y do referencial global (Y), a atitude do veículo que é o ângulo θ .

3.4.1

Variáveis de entrada

As variáveis de entrada do problema de otimização, as mesmas do modelo veicular, são as acelerações lateral e longitudinal, que podem ser positivas ou negativas, variáveis no tempo ou constantes. Agora como obter funções matemáticas que descrevam tais acelerações? Felizmente, como se quer otimizar a trajetória seguindo o comportamento dos veículos de competição, tem-se o apoio da tecnologia de última geração utilizada nestes veículos. A telemetria é um sistema de aquisição de dados que faz uso de transdutores embarcados, através da qual as informações são transmitidas e processadas para análise em tempo real ou posterior. As acelerações do veículo podem ser obtidas por este processo, no qual os dados normalmente não estão em função do tempo, pelo menos não em forma explícita, mas sim em função da distância percorrida pelo veículo. Tais dados podem ser utilizados para definir os perfis de aceleração no procedimento de otimização da trajetória. A Figura 3.3 apresenta um exemplo da forma como se obtém os dados a partir da telemetria e os perfis típicos das acelerações longitudinal e lateral. Existe um certo “padrão” para as funções aceleração, que pode ser adotado no tratamento do problema, simplificando muito a análise a ser realizada. Pode-se considerar que o comportamento das acelerações, pelo menos no que diz respeito à sua forma, é conhecido, não se alterando significativamente de pista para pista, ou mesmo de veículo para veículo, ou ainda de piloto para piloto.

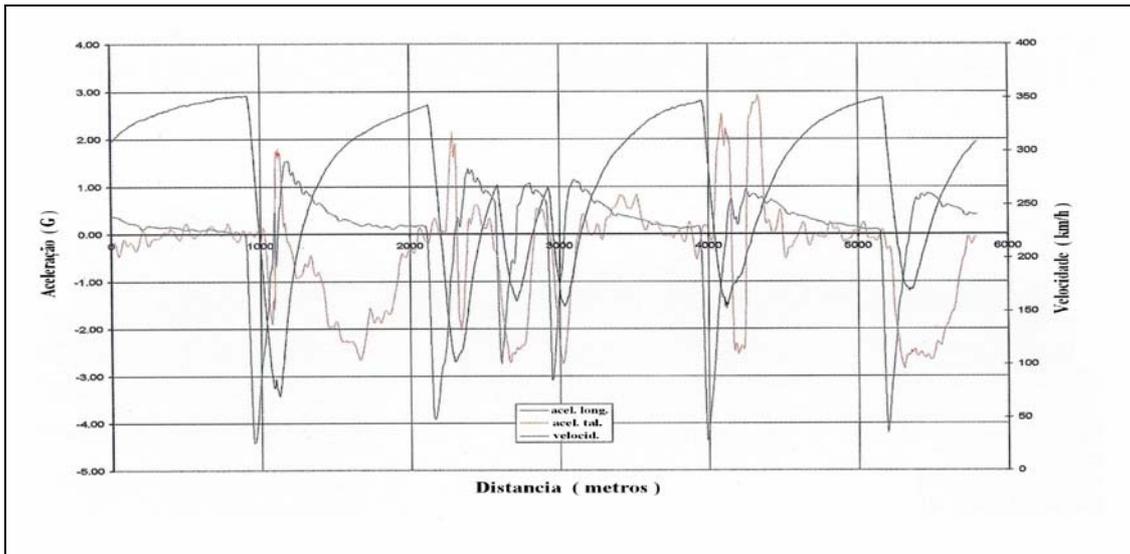


Figura 3.4 Exemplo dos dados obtidos da telemetria.

Uma vez que o objetivo é minimizar o tempo de percurso, o que se quer é ter o tempo como resultado e não como variável de alguma função. Assim o ponto de partida é conseguir expressões que representem os fenômenos físicos durante o percurso de retas e curvas, que não contenham o tempo de forma explícita. A seguir apresentam-se as funções que serão adotadas para as acelerações, para cada situação em qualquer trajetória, dependentes da distância percorrida pelo veículo

A distância tx que o veículo percorre no tempo t é dada pela equação

$$tx = \int u_x dt \quad (3.12)$$

na qual u_x é a velocidade do veículo.

Para a caracterização da **aceleração longitudinal positiva (tração)**, considera-se que ao se acionar o pedal do acelerador, o veículo atinge inicialmente uma elevada aceleração, e, conforme a velocidade aumenta, sua derivada diminui até chegar à velocidade máxima, na qual a aceleração é nula. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se uma função exponencial,

$$a_x = a_0 \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right) \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.13)$$

que deve satisfazer os seguintes valores iniciais e finais: $tx = x_0 \Rightarrow a_x = a_0$ e $tx = x_f \Rightarrow a_x = a_f$, na qual $a_0 > a_f$, são as acelerações, inicial e final respectivamente, tx é a distância percorrida, x_0 é a posição inicial do veículo,

e x_f é a posição final durante o processo de aceleração. A Figura 3.4 mostra o perfil estimado para a aceleração longitudinal positiva tendo como variável independente a posição do veículo na pista.

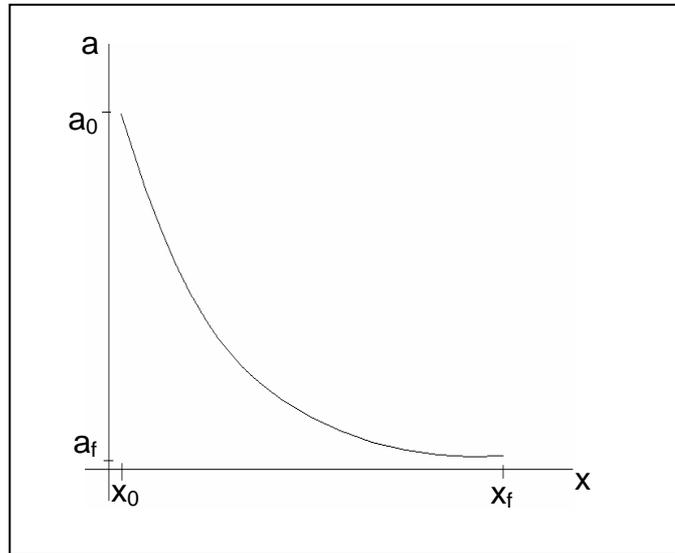


Figura 3.5. Função para a aceleração longitudinal do veículo.

Já para a **aceleração longitudinal negativa (frenagem)**, ao se acionar o pedal do freio, considera-se que, inicialmente, o veículo atinge uma alta desaceleração, e, de acordo com a diminuição da velocidade, a desaceleração também diminui até chegar a uma velocidade mínima (pode ser nula, ou quando o piloto alivia o pedal de freio), na qual a desaceleração é nula. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se uma outra função exponencial, semelhante à anterior, mas com valores sempre negativos, dada por

$$a_x = -a_0 \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right) \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.14)$$

que deve satisfazer os valores iniciais e finais: $tx = x_0 \Rightarrow a_x = a_0$ e $tx = x_f \Rightarrow a_x = a_f$, na qual $a_0 > a_f$, são as desacelerações, inicial e final respectivamente, tx é a distância percorrida, x_0 é a posição inicial do veículo na pista, e x_f é a posição final durante a etapa de desaceleração. A Figura 3.6 mostra o perfil suposto para as acelerações longitudinal positiva (tração) e negativa (frenagem) tendo como variável independente a posição do veículo na pista.

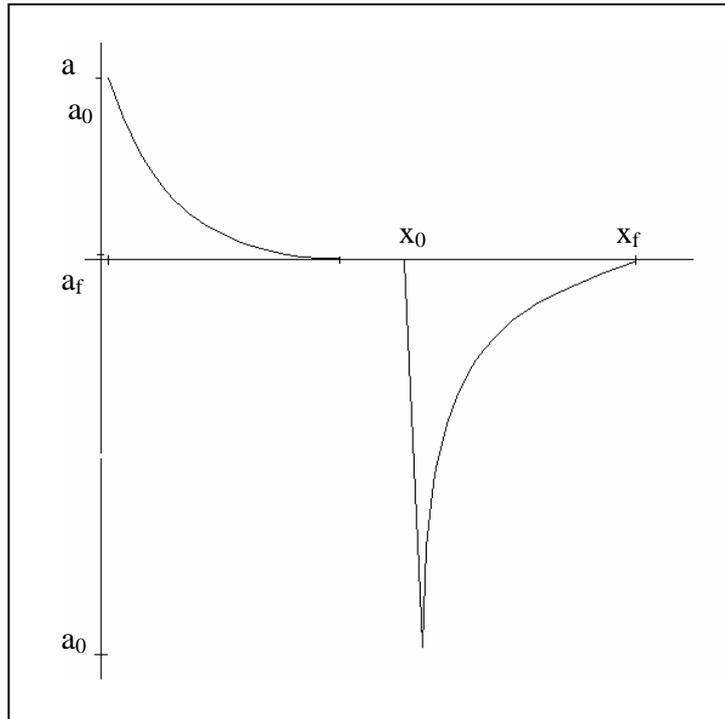


Figura 3.6. Função para aceleração e desaceleração longitudinal do veículo.

Para a *aceleração lateral positiva (entrada da curva)*, quando o piloto faz manobras com o volante do veículo, ao mudar de direção as rodas dianteiras, são geradas as forças laterais, que a sua vez levam às acelerações laterais. Este movimento transitório pode ser aproximado mediante alguma expressão matemática, que deve ser semelhante ao comportamento mostrado nos gráficos obtidos pela telemetria. Para representar de melhor forma possível este comportamento define-se novamente uma função exponencial

$$a_y = a_n \left[1 - e^{\left(\frac{tx - x_0}{x_f - x_0} \right) [-4]} \right] \quad (3.15)$$

que deve satisfazer os valores iniciais e finais: $tx = x_0 \Rightarrow a_n = 0$ e $tx = x_f \Rightarrow a_n = a_y$, na qual a_n é a aceleração lateral final, tx é a distância percorrida, x_0 é a posição inicial do veículo, e x_f é a posição final na entrada da curva. Nota-se que se considerou que o sistema atinge uma condição final em aproximadamente 4 vezes o tempo de decaimento da exponencial decrescente, prática comum na análise de sistemas dinâmicos lineares, daí o fator (-4) no expoente da Equação 3.15.

A representação da *aceleração lateral negativa (saída da curva)*, é muito semelhante à anterior, mas agora se quer chegar de uma aceleração inicial (diferente de zero) até a aceleração final nula. Para representar da melhor forma possível este comportamento define-se a função exponencial:

$$a_y = a_n \cdot e^{\left(\frac{tx-x_0}{x_f-x_0}\right)[-4]} \quad (3.16)$$

que satisfazer os valores iniciais e finais: $tx = x_0 \Rightarrow a_n = a_0$ e $tx = x_f \Rightarrow a_n = 0$, na qual a_n é a aceleração centrípeta inicial, tx é a distância percorrida, x_0 é a posição inicial do veículo, x_f é a posição final na saída da curva. Na Figura 3.6 mostra-se o comportamento das funções empregadas para representação da aceleração lateral do modelo veicular massa pontual. Poderia-se ter considerado ainda uma fase na qual a aceleração lateral é constante durante o percurso da curva, entretanto acredita-se que o próprio problema de otimização possa convergir para tal situação, caso ela realmente ocorra. Pela análise dos dados da telemetria entretanto observou-se que raramente se atinge uma condição permanente, estando o veículo sempre sujeito aos transientes descritos pelas Equações 3.15 e 3.16.

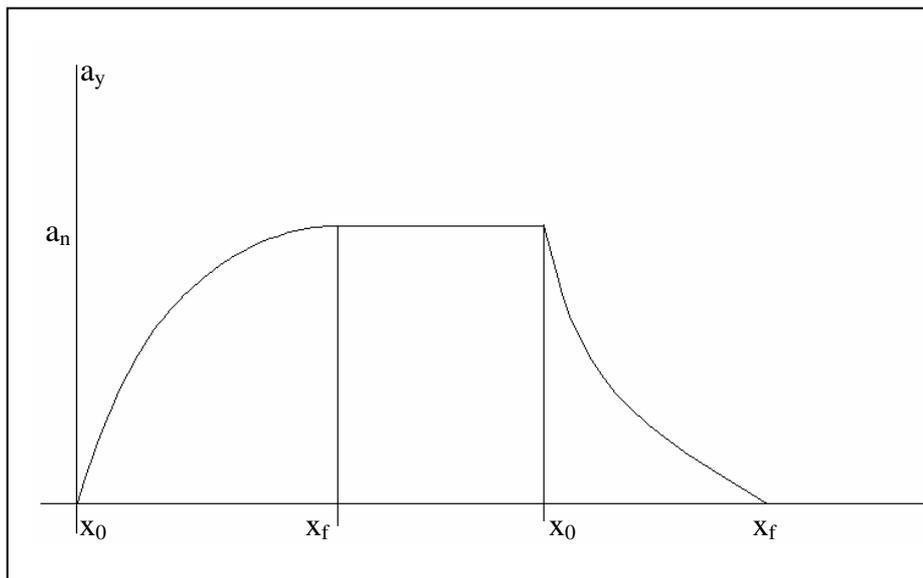


Figura 3.7 Função para aceleração lateral do veículo.

Assim ficam definidas as variáveis de entrada, que são um conjunto de funções que descrevem o comportamento físico das acelerações dos veículos de

competição, dependentes de 4 parâmetros em cada uma das quatro situações consideradas: as acelerações e as posições inicial e final nos trechos do circuito.

A dependência das acelerações com respeito à distância percorrida é fácil e lógica de assimilar e trabalhar, uma vez que a variável que o piloto está vendo e processando em seu cérebro é sua posição na pista (ou caminho), e ele realiza manobras de modo a acompanhar o traçado da pista, segundo as características dinâmicas do veículo.

3.4.2

Variáveis de saída

As variáveis de saída são duas: as posições do veículo nos eixos X e Y do referencial global, obtidas pela solução das equações diferenciais do modelo massa pontual, que descrevem o movimento do veículo, realizada através do *Simulink/Matlab*. Os valores dessas posições dependem dos valores instantâneos de velocidade angular e velocidade longitudinal do veículo, que por sua vez são obtidos pela integração das acelerações longitudinal e lateral, como mostrado anteriormente. Os resultados deste modelo serão avaliados empregando uma pista pré-definida, analisando o comportamento de tais variáveis em função da distância percorrida ou do tempo, de modo a verificar se as restrições impostas são satisfeitas e se tal comportamento é aceitável, comparativamente àquele obtido por uma representação mais detalhada e realista.

3.4.3

Restrições de otimização

Adota-se neste modelo de massa pontual basicamente três restrições, a primeira das quais é muito simples: a velocidade do veículo não pode ser maior que um máximo estabelecido em 325 km/h (comum em veículos de competição) Essa velocidade é limitada pela capacidade do motor, uma vez que ele não pode produzir mais potência. Assim

$$u_x \leq 325 \text{ km/h} \quad (3.17)$$

A segunda restrição também não é muito complexa, e representa as limitações das acelerações. Sabe-se pelo círculo de aderência de um veículo de competição que

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \leq 5g \quad (3.18)$$

$$-5g \leq a_y \leq 5g \quad (3.19)$$

$$-5g \leq a_x \leq 2g \quad (3.20)$$

sendo g a aceleração da gravidade. A intersecção das três desigualdades fornece a restrição nas acelerações (e desacelerações), tanto longitudinal quanto lateral, assegurando que estas variáveis permaneçam dentro do círculo de aderência.

A terceira restrição é a mais complexa, e relativamente difícil de se avaliar e descrever matematicamente, pois representa as condições que estabelecem que o veículo deve permanecer dentro da pista, com uma certa tolerância admissível, considerando que podem existir em alguns casos áreas de escape ou trechos fora da pista que são usados como parte do traçado. Como seria muito ineficiente fazer a avaliação para cada ponto da trajetória, dentro da largura da pista, realizou-se esta comparação em função apenas dos valores limites superior e inferior da pista no eixo lateral Y do sistema referencial global, a partir do posicionamento longitudinal (eixo X), empregando diretamente os resultados encontrados pelo *Simulink/Matlab*. Deste modo, para cada ponto de deslocamento longitudinal xt , qualquer coordenada yt associada deve estar entre $y_{inf.}$ e $y_{sup.}$ da pista, como mostrado na Figura 3.7. Matematicamente deve-se ter para cada xt um valor de yt de acordo com

$$y_{inf.} \leq yt \leq y_{sup.} \quad (3.21)$$

na xt é a posição no eixo X do referencial global, yt é a posição no eixo Y do referencial global, $y_{inf.}$ é o limite inferior da pista e $y_{sup.}$ é o limite superior da pista no eixo Y do referencial global para a posição xt .

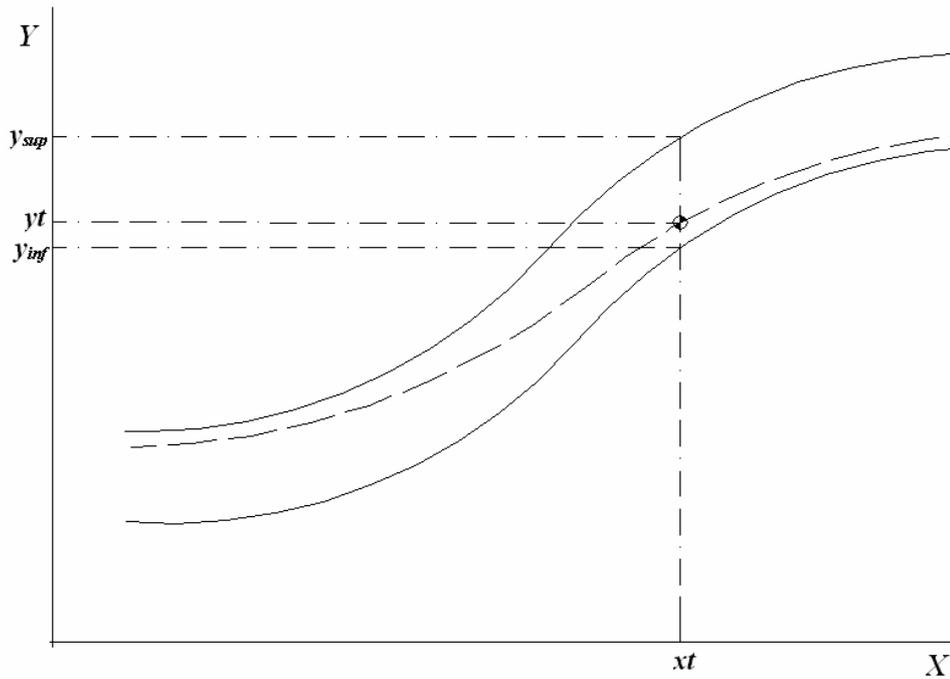


Figura 3.8. Restrição da pista.

3.4.4

Função objetivo

A função objetivo do problema de otimização é o tempo, uma vez que se pretende obter mínimo tempo para o percurso considerado. O *tempo* deverá ser representado por uma função da distância percorrida pelo veículo. Esta função *tempo* será minimizada variando os parâmetros das acelerações. Deve-se lembrar que o tempo total de percurso será a soma dos tempos encontrados para cada situação particular, ou seja existe um tempo associado a um trecho reto, subdividido em uma faixa na qual se tem uma aceleração positiva e em seguida uma desaceleração; e aqueles correspondentes a um trecho curvo, que normalmente também estão subdivididos em dois ou três condições de aceleração distintas.

De maneira geral, entretanto, considerando que

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (3.22)$$

então chega-se a

$$dt = \frac{dx}{v} \quad (3.23)$$

3.5 Apresentação da Função Objetivo

Para determinação do **tempo** (t) de percurso se empregam as funções aceleração do item anterior e aplica-se a teoria infinitesimal para resolver as equações diferenciais. O tempo pode ser calculado de duas formas distintas, utilizando como variável de integração a distância percorrida (dx) ou a velocidade (dv). Assim,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{então:} \quad dt = \frac{dx}{v} \quad \text{portanto:} \quad t = \int \frac{1}{v} \cdot dx \quad (3.25)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{então:} \quad dt = \frac{dv}{a} \quad \text{portanto:} \quad t = \int \frac{1}{a} \cdot dv \quad (3.26)$$

na qual a é a aceleração longitudinal. Sendo a aceleração longitudinal função da distância percorrida é mais conveniente utilizar a Equação 3.25. Para tanto deve-se antes calcular a velocidade em função da distância percorrida; e como essa variável é diferente para cada trecho de aceleração ou desaceleração, ou naqueles em que a velocidade é constante, apresenta-se a seguir a solução em cada caso, de acordo com o tipo de movimento.

3.5.1 Movimento longitudinal acelerado

Este movimento acontece no trecho de x_0 ate x_f , com a aceleração longitudinal dada por

$$a_x = a_0 \cdot e^{\left(\frac{x-x_0}{x_f-x_0}\right) \cdot \left[\ln\left(\frac{a_f}{a_0}\right)\right]} \quad (3.27)$$

na qual a_0 é a aceleração longitudinal inicial, a_f aceleração longitudinal final, x é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo, a_x é a aceleração no ponto x . Para obter a velocidade tem-se que resolver a seguinte equação diferencial

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\left(\frac{dx}{v}\right)} \quad \text{portanto:} \quad a \cdot dx = v \cdot dv \quad (3.28)$$

o que leva a velocidade em função a distância percorrida dada por

$$v_{(x)} = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \left(a_0 - a_0 \cdot \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f} \right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.29)$$

onde v_0 é a velocidade inicial (no ponto x_0), $v_{(x)}$ é a velocidade no ponto x . Como este é um movimento acelerado durante todo intervalo de tempo, então a velocidade máxima será encontrada na posição final deste trecho (x_f), dada por

$$v_{\max} = v(x_f) = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2(a_0 - a_f)(x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}}{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.30)$$

Agora, resolvendo a Equação 3.25, lembrando que na condição inicial para $x = x_0$ o **tempo** é nulo, obtém-se a Equação 3.31, que representa o **tempo** em função da distância percorrida durante um movimento acelerado, dado por

$$T_{(x)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{2(x_f - x_0) \cdot a_0 \left(1 - \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f} \right)} \right) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} \quad (3.31)$$

Esta função está diretamente relacionada com a distância percorrida, mas também com a velocidade inicial do veículo, aceleração longitudinal inicial e a

relação das acelerações inicial e final. Mas como o que se precisa é uma expressão matemática do tempo de percurso durante todo o trecho, apenas interessa o instante de tempo no ponto final do trecho, isto é, o **tempo** no ponto final $x = x_f$, dado por

$$T_{(x_f)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{2(x_f - x_0)(a_0 - a_f) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]} \right) (x_f - x_0)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \cdot a_0 \cdot (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} \quad (3.32)$$

e esta é a parcela da função objetivo no trecho de um movimento acelerado.

3.5.2 Movimento longitudinal desacelerado

Este movimento acontece no trecho de x_1 ate x_2 , sendo a desaceleração longitudinal dada por

$$a_x = -a_1 \cdot e^{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \cdot \left[\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \right]} \quad (3.33)$$

na qual a_1 é a desaceleração longitudinal inicial, a_2 é a desaceleração longitudinal final, x é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo, a_x é a desaceleração no ponto x . A velocidade em função a distância percorrida é dada por

$$v_{(x)} = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \left(a_1 - a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}}{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \quad (3.34)$$

na qual v_I é a velocidade inicial (no ponto x_I), e $v_{(x)}$ é a velocidade no ponto x . Existe uma análise interessante que pode ser realizada através desta equação que é verificar a relação entre as variáveis de modo que o movimento seja lógico e os valores fiquem de acordo com um comportamento realista para o veículo. Assim, para que a velocidade final seja nula se tem que percorrer a distância

$$(x_2 - x_1) = \frac{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{2(a_1 - a_2)} \quad (3.35)$$

e a velocidade será zero ao final do trecho para uma velocidade inicial dada por

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(a_1 - a_2)(x_2 - x_1)}{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}} \quad (3.36)$$

Da mesma forma que no item anterior é possível resolver a Equação 3.25 e obter o tempo em função da distância percorrida pelo veículo, dado por

$$T_{(x)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2(x_2 - x_1) \cdot a_1 \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right)}}{\left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \\ - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}}{\left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.37)$$

O tempo que o veículo leva para percorrer todo o trecho é obtido pela Equação 3.37 no ponto final $x = x_2$, e assim tem-se a parcela da função objetivo no trecho de um movimento desacelerado dada por,

$$T_{(x_2)} = \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2(x_2 - x_1)(a_1 - a_2)}}{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1)}} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} - \frac{2 \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}}{\sqrt{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1)}} \right) (x_2 - x_1)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.38)$$

Entretanto deve-se ter especial atenção neste caso, pois na Equação 3.38 existe um ponto singular, uma vez que seu denominador não pode se tornar nulo, também deve ser maior que zero, de modo que a raiz quadrada seja um número real. Assim as seguintes condições devem ser impostas

$$\left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 2 \cdot a_1 \cdot (x_2 - x_1) \right] \neq 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) > (x_2 - x_1) \quad (3.40)$$

levando ao problema associado à distância máxima para a qual a velocidade final será nula, dado pela Equação 3.35, e então

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot a_1} \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{2(a_1 - a_2)} \quad (3.41)$$

mostrando, finalmente, que as acelerações são positivas sempre nestas condições. Deste modo se utilizam apenas seus módulos, e então conclui-se que a aceleração final (a_2) não pode ser zero, mas pode ser muito próxima de zero.

No movimento com velocidade constante, que também pode acontecer em veículos de competição, o *tempo* é muito fácil de se calcular, e é dado por

$$T_{(x_f)} = \int \frac{1}{v} \cdot dx = \frac{x_f - x_0}{v} \quad (3.42)$$

na v é a velocidade constante, x_f é a distância final, x_0 é a distância inicial e T é o tempo de percurso do veículo.

Finalmente está completamente definida a função objetivo para os movimentos existentes. Como se pode ver esta função depende da velocidade e aceleração longitudinal, e também da distância percorrida, que implicitamente contém a influência da aceleração lateral, uma vez que essa variável está associada às restrições geométricas da pista, sendo a responsável pela mudança de direção do veículo.

3.6

Movimento em curvas

Ao início deste capítulo foram apresentadas, nas Equações 3.18, 3.19 e 3.20, as restrições de aceleração, tanto longitudinal quanto lateral, que estão limitadas pelo círculo de aderência do veículo. Também se apresentou a restrição de velocidade, Equação 3.17, onde para os veículos de competição o máximo aqui considerado é de 325 km/h. Essa velocidade máxima será comparada com a velocidade final do trecho de aceleração longitudinal, já que apenas nesta condição encontra-se a velocidade máxima do movimento.

Serão desenvolvidas agora as equações que modelam a mudança de direção do veículo devido à aceleração lateral, tanto na entrada da curva, durante o percurso da curva, e na saída da curva. A aceleração lateral define a direção do movimento, na ausência da aceleração lateral tem-se apenas um movimento retilíneo, isto é, o veículo trafega em uma linha reta, sem curvas. A influência da aceleração lateral no estudo aqui proposto é muito importante e fundamental.

3.6.1

Movimento na entrada na curva

O movimento de entrada na curva acontece em um trecho que é definido pelos pontos de x_3 até x_4 , no qual a aceleração lateral inicial é nula, e que termina,

por hipótese, com aceleração lateral máxima. Para determinar a velocidade angular ($\dot{\theta}$) precisa-se da função velocidade do veículo (v_x) durante a entrada da curva, Equação 3.43, dada por

$$\dot{\theta} = \frac{a_y}{v_x} \quad (3.43)$$

Como considera-se que existe desaceleração longitudinal durante a entrada na curva, por que se precisa transferir energia longitudinal para lateral, deve-se reduzir a velocidade a medida que a aceleração lateral (a_y) aumenta. Como resultado pode-se até ter o caso de velocidade constante, mas com toda certeza esta não vai ser incrementada durante o movimento de entrada na curva.

Tomando a expressão da aceleração lateral apresentada antes e fazendo uma divisão simples para o caso de velocidade variável (desaceleração), tem-se

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \left[1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3} \right)^{[-4]}} \right] \cdot \ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right)}{\sqrt{\ln \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \left[v_1^2 \cdot \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) - 2 \left(a_1 - a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_2} \right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}} \quad (3.44)$$

na qual a_n é a aceleração lateral máxima, que acontece, ao final do movimento de entrada à curva, x é um ponto ao longo da distância percorrida pelo veículo, a_1 é a desaceleração longitudinal inicial, a_2 é a desaceleração longitudinal final, e $x_2 = x_4$ é a posição final do veículo, $x_1 = x_3$ é a posição inicial, $\dot{\theta}_{(x)}$ é a velocidade angular para a distância x .

Para o caso de velocidade constante (apenas em modulo), v , tem-se

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \left[1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3} \right)^{[-4]}} \right]}{v} \quad (3.45)$$

Pode-se também determinar uma expressão que indique o raio instantâneo de curvatura (ρ), dado por

$$a_y = \frac{v_x^2}{\rho} \quad (3.46)$$

ou

$$\rho_{(x)} = \frac{\left[v_1^2 \cdot \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - 2 \left(a_1 - a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_2}\right)} \right) (x_2 - x_1) \right]}{a_n \left[1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right] \cdot \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \quad (3.47)$$

Da Equação 3.47 pode se observar que quando o veículo se movimenta em linha reta o raio de curvatura é infinito. Também nota-se que a velocidade inicial limitará a mudança de direção, por que em maior velocidade inicial o veículo tende a percorrer uma linha reta. Para o caso de velocidade constante, se apresenta a Equação 3.48,

$$\rho_{(x)} = \frac{v^2}{a_n \left[1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right]} \quad (3.48)$$

De forma similar pode-se conseguir uma expressão matemática que aproxime o ângulo de atitude do veículo em função da distância percorrida, dado por

$$\theta_{(x)} = \frac{a_n \left[1 - e^{\left(\frac{x-x_3}{x_4-x_3}\right)^{[-4]}} \right] \ln\left(\frac{v_{(x)}}{v_1} \cdot \frac{a_3}{a_{(x)}}\right)}{\left(a_1 - \frac{(a_1 - a_2)v_1}{v_1 - v_2} \right)} \quad (3.49)$$

Pode-se ver na Equação 3.49 que a aceleração lateral é a principal responsável da direção do veículo (ou atitude do veículo). Sem a força lateral o veículo trafegaria simplesmente em linha reta. A velocidade e aceleração do veículo em um movimento desacelerado também afetam sua atitude. A Equação 3.49 é resultado de um movimento desacelerado. Caso se queria considerar outro tipo de movimento, como aquele com velocidade constante ou aceleração constante, precisa-se fazer outro desenvolvimento das equações.

Procurou-se estabelecer ainda uma expressão que considerasse as posições do veículo no sistema global, mas o equacionamento neste caso é demasiado complexo. Estes valores serão obtidos a partir dos resultados da simulação no *Simulink/Matlab*.

3.6.2

Movimento na saída da curva

Este movimento acontece em um trecho definido pelos pontos de x_5 até x_6 , no qual a aceleração inicial é máxima a_n , e que termina na saída da curva com aceleração lateral nula. Da mesma forma que o movimento de entrada na curva, considera-se uma aceleração longitudinal, por que se quer transferir energia lateral para longitudinal. Para tanto deve-se aumentar a velocidade na medida em que a aceleração lateral (a_n) diminui, ou o seu efeito caso a velocidade seja constante. Tomando a aceleração lateral apresentada anteriormente e fazendo uma divisão simples para o caso de velocidade variável (movimento acelerado), têm-se os seguintes resultados

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]} \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)}{\sqrt{\ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \left[2 \left(a_0 - a_0 \cdot \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f}\right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}} \quad (3.50)$$

na qual $x_f = x_5$ é a posição final do veículo, $x_0 = x_4$ é a posição inicial. Pode-se também determinar o raio de curvatura, dado por

$$\rho_{(x)} = \frac{\left[2 \left(a_0 - a_0 \cdot \left(\frac{a_f}{a_0}\right)^{\left(\frac{x_0-x}{x_0-x_f}\right)} \right) (x_f - x_0) + v_0^2 \cdot \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right) \right]}{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]} \ln\left(\frac{a_0}{a_f}\right)} \quad (3.51)$$

Para o caso de velocidade constante as expressões anteriores se reduzem a

$$\dot{\theta}_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]}}{v} \quad (3.52)$$

$$\rho_{(x)} = \frac{v^2}{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right) \cdot [-4]}} \quad (3.53)$$

De forma similar pode-se conseguir uma expressão que aproxime o ângulo de atitude do veículo em função da distância percorrida, no movimento acelerado, dado por

$$\theta_{(x)} = \frac{a_n \cdot e^{\left(\frac{x-x_5}{x_6-x_5}\right)^{[-4]} \ln\left(\frac{v_0 \cdot a_5}{v_{(x)} \cdot a_{(x)}}\right)}{\left(a_0 - \frac{(a_0 - a_f)v_f}{v_0 - v_f}\right)} \quad (3.54)$$

Finalmente, tem-se todas as equações que caracterizam o movimento do veículo, segundo o modelo empregado. As equações que representam a função objetivo, a velocidade do veículo e a aceleração longitudinal serão todas utilizadas no processo de otimização da trajetória, de acordo com a análise que se deseja realizar.

3.7

Procedimento de otimização

Neste item explica-se o procedimento para a obtenção da trajetória ótima em um caso geral, apresentado na Figura 3.9, indicando-se em forma clara tanto as variáveis de otimização quanto a função objetivo a minimizar, e também as restrições do problema de otimização. Para diminuir o número de variáveis iguala-se os trechos de entrada na curva e desaceleração, também se igualam os trechos de saída da curva e aceleração. Para finalizar o capítulo apresenta-se um fluxograma que resume o procedimento de otimização.

1. Inicialmente identifica-se todas as variáveis de otimização, em caso geral de uma curva simples (Figura 3.9), tem-se: um trecho de desaceleração ou entrada na curva, outro trecho com velocidade constante, e um terceiro trecho com aceleração ou saída da curva. As variáveis de otimização são:

Os valores máximos das acelerações: a_x e a_y do veículo; isto leva os valores iniciais das acelerações longitudinais a_1 (trecho de desaceleração) e a_0 (trecho de aceleração), e nas acelerações laterais a_n (trechos de entrada e saída da curva).

Os pontos de aplicação das acelerações: $x_1 = x_3$ e $x_2 = x_4$ para o trecho de desaceleração e entrada na curva, $x_0 = x_5$ e $x_f = x_6$ para o trecho de aceleração e saída na curva. O trecho que fica entre a entrada e saída da curva é a velocidade constante, a aceleração longitudinal é nula, a aceleração lateral é constante. Então tem-se 7 variáveis de otimização: $a_1, a_0, a_n, x_f, x_2, x_0, x_1$.

2. A função objetivo é definida pela soma dos tempos em cada trecho. Então tem-se três funções *tempo*: no trecho de desaceleração, no de velocidade constante e no de aceleração. Estas funções estão definidas nas Equações 3.32, 3.38 e 3.42 respectivamente. A função objetivo fica então:

$$T = T_{\text{desaceleração}} + T_{\text{constante}} + T_{\text{aceleração}}$$

3. As restrições aplicadas ao problema de otimização são:
- Restrições relacionadas às acelerações a_x e a_y , descritas por desigualdades matemáticas, como é mostrado nas Equações 3.18, 3.19, 3.20, de modo que a aceleração total fique sempre dentro do Círculo de Aderência;
 - Restrição dada pela velocidade do veículo v . Pode-se considerar esta restrição para todos os pontos do movimento, ou para os pontos críticos nos quais se tenha certeza que neles existirão as maiores velocidades de todo o movimento. Para isto as relações relativas às velocidades são dadas nas Equações 3.29, 3.30 e 3.34; a restrição associada foi mostrada na Equação 3.17.
 - Restrição que delimita a trajetória do veículo dentro dos limites da pista (de maior complexidade que as outras). Para definir tais limites existem duas funções matemáticas: uma para cada lado da pista, os chamados limite inferior e limite superior. Estas funções devem ser avaliadas durante a simulação em cada passo do processo de otimização. Após do levantamento de resultados da trajetória e limites da pista, estes são comparados e se dividem em grupos de desigualdades, de acordo com a Equação 3.21.
 - Restrição de igualdade para estabelecer que o ponto final (x_f) da trajetória percorrida pelo veículo coincida com o ponto final da função objetivo. Este ponto final é obtido da simulação, e deve ser igual à distância total, igual também ao valor final da distância na função aceleração. Para isto no simulador se define uma função de parada, onde se especifica que quando o veículo chegar ao final da pista a simulação pára.
- Outras restrições de igualdade são definidas para estabelecer a continuidade entre os diferentes tipos de movimento que existem em

cada trecho da trajetória total do veículo. Para conectar estes movimentos é preciso igualar as condições iniciais de um com as condições finais do outro. Algumas condições iniciais e finais já são igualadas pela continuidade das funções ou mesmo pelo programa de simulação. Apenas os pontos inicial x_I e final x_f da pista estão especificados no problema, os outros pontos da distância percorrida são variáveis resultantes do problema de otimização e seguem uma seqüência lógica crescente, isto é, não podem ser maiores que o ponto final, nem menores que o ponto inicial da pista.

4. Deve-se contar com valores iniciais das variáveis de otimização $a_1, a_0, a_n, x_f, x_2, x_0, x_I$, por que o otimizador necessita para iniciar as iterações, estes valores, ou podem ser triviais, como aqueles para gerar a trajetória do centro da pista, mas convém que sejam aqueles que levariam por trajetórias próximas às ótimas, de modo que a convergência aos valores ótimos seja mais rápida.
5. A partir das restrições impostas, o programa pode obter os valores ótimos do problema, fornecendo como resposta o valor da função objetivo, o tempo mínimo, e os valores ótimos das variáveis de otimização.

Para facilitar a compreensão do processo de otimização apresenta-se na Figura 3.10 um fluxograma do procedimento.

Os resultados obtidos pelo procedimento apresentado, em cada tipo de movimento descrito anteriormente e para outros casos, são mostrados no Capítulo 4 a seguir, empregando o *Simulink* para reprodução do movimento através do modelo de massa pontual e do modelo dinâmico não linear do veículo, para fins de comparação. No Apêndice B descreve-se o programa *Matlab* empregado no procedimento aqui apresentado.

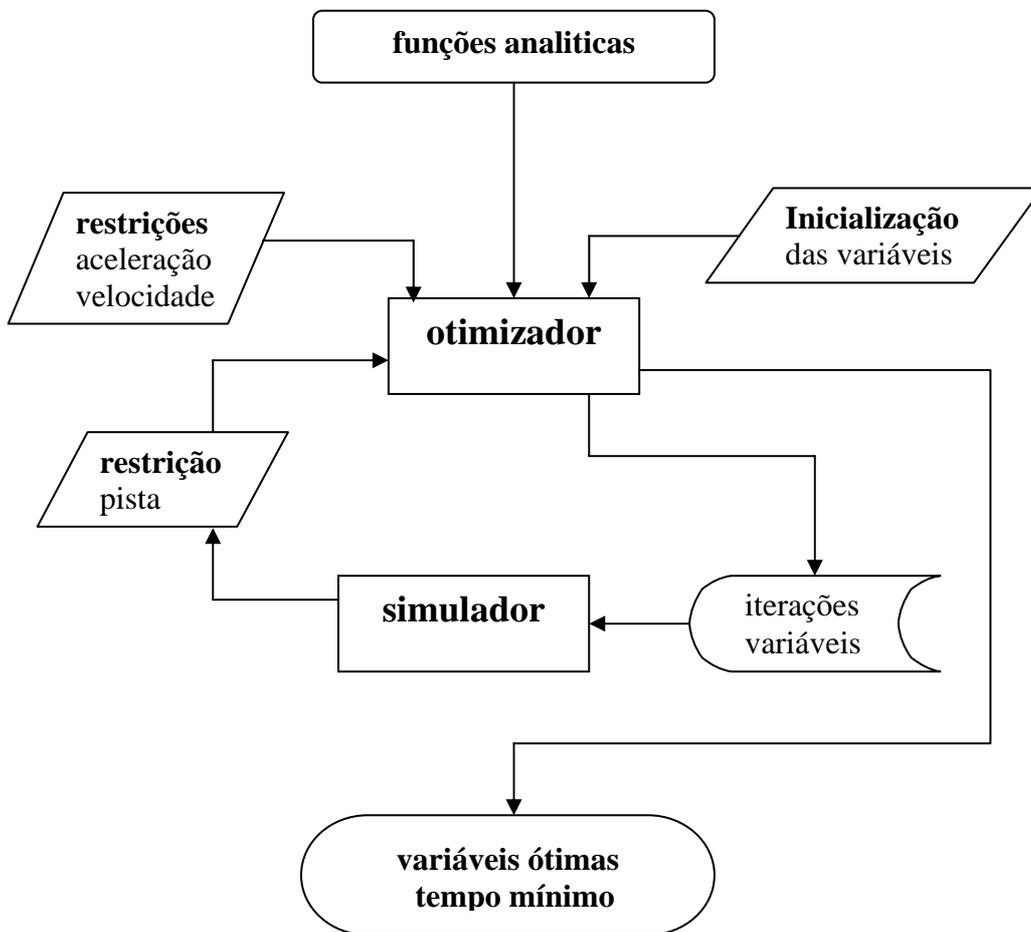


Figura 3.10. Fluxograma do procedimento de otimização do modelo massa pontual.