

## 2

### Modelo do Veículo

Dado o interesse da análise a ser realizada neste trabalho, é preciso determinar um modelo para simular o comportamento dinâmico de um veículo, considerando principalmente sua dinâmica lateral e longitudinal.

Nos veículos de competição a alta velocidade que percorrem pistas planas a dinâmica vertical não é muito evidente, por que a pista pode ser considerada perfeitamente plana e a sua dinâmica lateral apenas esta afetada pelas outras duas dinâmicas, neste tipo de veículo as mais relevantes são as dinâmicas lateral e longitudinal. Entretanto o estudo desse tipo de veículo pode se resumir a seu movimento no plano, onde os comandos que dirigem as suas dinâmicas lateral e longitudinal são os comandos de esterçamento (sistema de direção) e os sistemas de tração e frenagem na dinâmica lateral.

Neste caso, portanto, é suficiente, a princípio, que essa representação tenha 5 graus de liberdade no referencial local do veículo: dois de translação (longitudinal e lateral), relacionados às velocidades em  $x$  e  $y$ , e três de rotação (*yaw*, *roll* e *pitch*), sendo identificados pelos ângulos  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $\rho$  respectivamente. Os movimentos de translação correspondem aos deslocamentos no plano  $XY$  do referencial global. A Figura 2.1 ilustra os sistemas de referencia e variáveis empregados para o tratamento da trajetória de um veículo no plano.

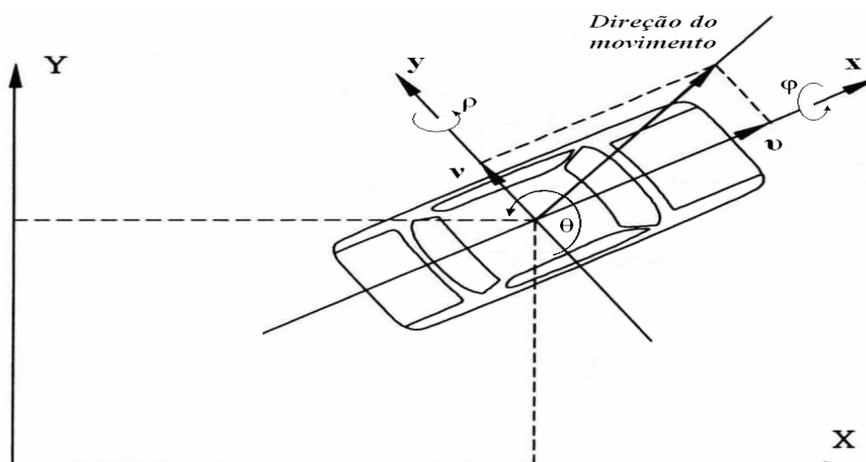


Figura 2.1. Sistemas de referência e variáveis para análise de trajetória no plano.

## 2.1 Equações de movimento

A dinâmica de um veículo em relação a um sistema de eixos que passa no seu centro de massa, é analisada através da teoria dos corpos rígidos, e pode ser representada desde um simples modelo de massa pontual até um modelo bastante complexo onde todas as principais características físicas e geométricas do veículo são consideradas. Neste capítulo será desenvolvido um modelo de acordo com a análise a ser realizada adiante, que poderá ser simplificado na medida do necessário. Por exemplo, o modelo de massa pontual, assim como o modelo dinâmico linear, podem ser obtidos impondo algumas hipóteses simplificadoras ou de linearização ao modelo não linear aqui descrito.

O primeiro passo para obter o modelo em questão corresponde a determinar as equações de movimento que descrevem a dinâmica lateral e a dinâmica longitudinal de um veículo em movimento. Para isso considera-se o veículo composto por três massas distintas: uma suspensão identificada como  $m_s$ , ou massa do chassi, e duas massas não-suspensas, à frente e à ré do veículo, identificadas como  $m_{uf}$  e  $m_{ur}$ , ou massas dos pneus/rodas, respectivamente. A massa total deste veículo é representada pela soma das três massas, e representada por  $m_{tot}$ ,

$$m_{tot} = m_s + m_{uf} + m_{ur} \quad (2.1)$$

As forças impostas ao veículo levam a

$$F_x = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = m_{tot} a_x - m_s h_{sp} \ddot{\rho} \quad (2.2)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (2.3)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = m_{tot} a_y + m_s h_{sr} \ddot{\phi} \quad (2.4)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (2.5)$$

onde  $F_x$  representa o somatório das forças que atuam no eixo longitudinal, sendo  $F_{xi}$  cada uma das forças presentes nas rodas e  $a_x$  a aceleração longitudinal que é composta por duas parcelas:  $\ddot{x}$  e  $\dot{y}\dot{\theta}$ . Já  $F_y$  representa o somatório das forças laterais, sendo  $F_{yi}$  a força em cada uma das rodas. Assim como no eixo longitudinal,  $a_y$  representa a aceleração lateral que, por sua vez, é composta por duas parcelas:  $\ddot{y}$  e  $\dot{x}\dot{\theta}$ . Na Equação 2.2 aparece um termo de aceleração angular

de *pitch*  $\ddot{\theta}$ , que tem um efeito no movimento longitudinal, como está explícito. Algo similar acontece no movimento lateral, descrito na Equação 2.4, onde a aceleração angular de *roll*  $\ddot{\phi}$ , que relaciona a massa suspensa com a força lateral total.

A dedução das acelerações em x e y aparece por prova geométrica, para pequenas variações angulares [13], ao longo de uma trajetória curvilínea. Como pode ser observado na Figura 2.2, a variação em x pode ser descrita como

$$\Delta V_x = V_x \cos \Delta\theta + \Delta V_x \cos \Delta\theta - V_x - V_y \sin \Delta\theta - \Delta V_y \sin \Delta\theta \quad (2.6)$$

Considerando-se a variação angular pequena e negligenciando-se o termo de variação de velocidade em y, obtém-se o resultado,

$$\frac{\Delta V_x}{\Delta t} = V_x + \frac{\Delta V_x}{\Delta t} - V_x - V_y \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.7)$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta} \quad (2.8)$$

como mostrado anteriormente.

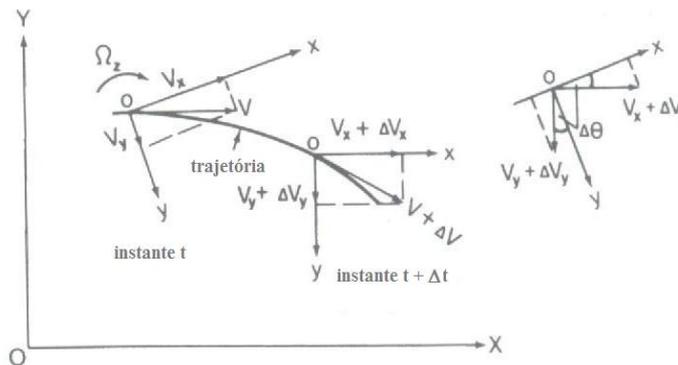


Figura 2.2. Determinando as acelerações em x e y.

De maneira similar, deduz-se a aceleração em y, através de

$$\Delta V_y = V_y \cos \Delta\theta + \Delta V_y \cos \Delta\theta - V_y + V_x \sin \Delta\theta + \Delta V_x \sin \Delta\theta \quad (2.9)$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta t} = V_y + \frac{\Delta V_y}{\Delta t} - V_y + V_x \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2.10)$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta} \quad (2.11)$$

A dedução das acelerações em x e y também aparece como resultado das equações de corpo rígido, pela teoria de Newton-Euler, descrita em um referencial local que acompanha o veículo. As equações de Newton Euler para as forças, no sistema móvel são dadas por

$$\sum F = \dot{P} + \Omega x P \quad (2.12)$$

na qual

$$P = m \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

são respectivamente a quantidade de movimento linear e a velocidade angular do corpo. Para se realizar o produto vetorial da velocidade angular emprega-se uma matriz, dada por

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Então as Equações de Newton-Euler para forças no referencial local são reescritas por

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} \dot{z}\dot{\rho} - \dot{y}\dot{\theta} \\ \dot{x}\dot{\theta} - \dot{z}\dot{\phi} \\ \dot{y}\dot{\phi} - \dot{x}\dot{\rho} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A Equação 2.16 mostra a interrelação que existe entre os movimentos nos três eixos do sistema local. Para modelo de interesse negligencia-se o movimento vertical, então as equações simplificadas são respectivamente dadas por

$$\sum F_x = m(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\theta}) \quad (2.17)$$

$$\sum F_y = m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\theta}) \quad (2.18)$$

$$\sum F_z = m(\dot{y}\dot{\phi} - \dot{x}\dot{\rho}) \quad (2.19)$$

A dedução gráfica mostrada anteriormente leva aos mesmos resultados que as Equações 2.17, 2.18 e 2.19. Para melhor interpretar estas equações, considerando que apenas o movimento no plano  $xy$  interessa, elimina-se a Equação 2.19. A somatória de forças esta composta por todas as forças que atuam no sistema veicular, então ali estão incluídas as forças de tração e frenagem, as forças laterais geradas nos pneumáticos do veículo, e também está incluída a força aerodinâmica. Esta somatória é projetada nos eixos do sistema referencial

segundo os modelos dos pneumáticos. Nosso sistema veicular não está influenciado pela inclinação da pista ou aclave, desde que se considera uma pista completamente plana. Então todas as forças envolvidas no sistema são

$$\sum F = F_{Tração} + F_{Frenagem} + F_{Aerodinamicas} \quad (2.20)$$

As Equações de Newton Euler no sistema móvel para os momentos determinam que

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}} + \vec{\Omega} \times \vec{H} \quad (2.21)$$

na qual o vetor quantidade de movimento angular, obtido pelo produto da matriz de inércia e do vetor velocidade angular, é dado por

$$\vec{H} = J \cdot \vec{\Omega} \quad (2.22)$$

onde a matriz inércia do veículo  $J$ , que tem por componentes os momentos de inércia para cada eixo que passa pelo centro de massa e os produtos de inércia do veículo, levando a uma matriz simétrica, é dada por

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Como um veículo terrestre é simétrico em relação ao plano  $xz$ , podem-se considerar alguns produtos de inércia nulos, levando assim uma matriz inércia com alguns componentes nulos,

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sendo o vetor aceleração angular, que contém as segundas derivadas no tempo dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, dado por

$$\vec{\ddot{\Omega}} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

e o vetor velocidade angular, que contém as primeiras derivadas no tempo dos ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, respectivamente, dado pela Equação 2.13 e empregando a Equação 2.14 para representar o produto vetorial, finalmente se tem a equação de Newton-Euler para momentos aplicados ao veículo. A derivada do vetor quantidade de movimento angular é o produto da aceleração angular vezes a

matriz inércia do veículo, sendo a matriz inércia constante no tempo no referencial local. Portanto o somatório de momentos no sistema local móvel fica na forma

$$\begin{bmatrix} \sum M_X \\ \sum M_Y \\ \sum M_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\rho} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \\ -\dot{\rho} & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Fazendo os respectivos cálculos da matriz momento total e separando os componentes em cada eixo principal se tem, o Momento de *Roll*

$$\sum M_X = J_{xx} \ddot{\phi} + J_{xz} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\rho} \dot{\phi} - J_{yy} \dot{\rho} \dot{\theta} + J_{zz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.27)$$

o Momento de *Pitch*

$$\sum M_Y = J_{yy} \ddot{\rho} + J_{xx} \dot{\theta} \dot{\phi} - J_{xz} \dot{\phi}^2 + J_{xz} \dot{\theta}^2 - J_{zz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.28)$$

e o Momento de *Yaw*

$$\sum M_Z = J_{xz} \ddot{\phi} + J_{zz} \ddot{\theta} - J_{xx} \dot{\rho} \dot{\phi} + J_{yy} \dot{\rho} \dot{\phi} + J_{xz} \dot{\rho} \dot{\theta} \quad (2.29)$$

É preciso agora escrever as equações de somatório de momentos gerados por fatores externos ao veículo, tanto para o movimento de *yaw* (em torno do eixo vertical) quanto para o movimento de *roll* (em torno do eixo longitudinal) e o movimento *pitch* (em torno do eixo lateral). Analisa-se inicialmente o movimento *yaw*. Levando-se em consideração as forças atuantes nos pneus dianteiros e traseiros, esquerdos e direitos, respectivamente indicadas pelos índices 1, 2, 3 e 4, nos eixos x e y ( $F_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $i=x,y$  e  $j=1,2,3,4$ ), mais os braços de alavanca existentes, que descrevem as bitolas e as distancias do CG aos eixos das rodas, é possível escrever uma relação para o somatório de momentos referentes ao movimento de *yaw* do veículo ( $\theta$ ), dada por

$$\sum M_z = aF_{y1} + \frac{t_f}{2} F_{x1} + aF_{y2} - \frac{t_f}{2} F_{x2} - bF_{y3} + \frac{t_r}{2} F_{x3} - bF_{y4} - \frac{t_r}{2} F_{x4} \quad (2.30)$$

onde  $a$  representa a distancia entre o CG e o eixo dianteiro,  $t_f$  representa a bitola do eixo dianteiro,  $b$  representa a distancia entre o CG e o eixo traseiro,  $t_r$  representa a bitola do eixo traseiro e  $I_{yaw}$  representa o momento de inércia em torno do eixo z.

A Figura 2.3 representa o diagrama de corpo livre indicando todas as forças laterais e longitudinais que geram o movimento *yaw*, também se mostra as distancias que entram no calculo do momento total.

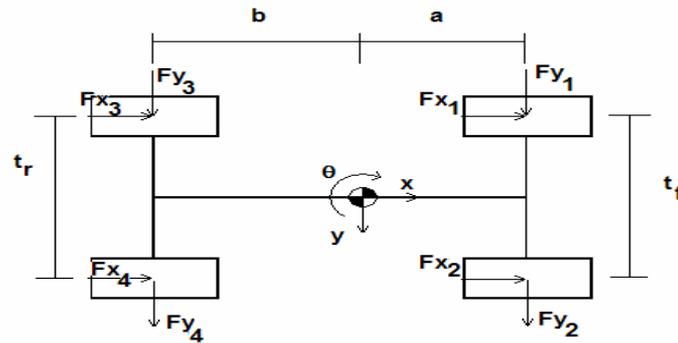


Figura 2.3. Diagrama de corpo livre para equilíbrio de momentos em relação ao eixo z.

Poder-se-ia considerar inicialmente que o problema envolve apenas o movimento de *yaw*, mas isso não é verdade, já que pelo desenvolvimento das equações de Neuton-Euler, Equação 2.26, quando a análise é realizada no sistema referencial móvel, nota-se que também os movimentos de *roll* e *pitch* estão presentes. Então na Equação 2.31 são acrescentados os termos da Equação 2.29, levando ao resultado da Equação 2.32,

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} \quad (2.31)$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\phi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\phi} + I_{pitch} \dot{\phi} \dot{\rho} \quad (2.32)$$

As Equações 2.32 e 2.30 são igualadas gerando uma equação diferencial que descreve o movimento *yaw* do veículo. As forças no eixo *x* e *y* são desenvolvidas com o modelo do pneumático, explicado mais adiante.

Agora para o equacionamento de momentos no movimento de rolagem, é preciso considerar o amortecimento e a rigidez de rolagem ( $\beta_{roll}$ ,  $\kappa_{roll}$ ), que dependem dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões ( $B_f$ ,  $B_r$ ,  $K_f$ ,  $K_r$ ) mais as bitolas traseira e dianteira. Assim

$$\beta_{roll} = \frac{1}{2} (B_f t_f^2 + B_r t_r^2) \quad (2.33)$$

$$\kappa_{roll} = \frac{1}{2} (K_f t_f^2 + K_r t_r^2) \quad (2.34)$$

Na Figura 2.4, são mostradas as acelerações geradas durante o movimento de rolagem do veículo, considerando o sistema em um referencial fixo, que levam a equação diferencial

$$I_{roll} \ddot{\phi} + \beta_{roll} \dot{\phi} + \kappa_{roll} \phi = m_s g h_{sr} \sin \phi + m_s a_y h_{sr} \cos \phi \quad (2.35)$$

onde  $I_{roll}$  representa o momento de inércia de rolagem do veículo,  $h_{sr}$  representa a altura entre o CG e o centro de rolagem,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\varphi$  o ângulo de rolagem (*roll*).

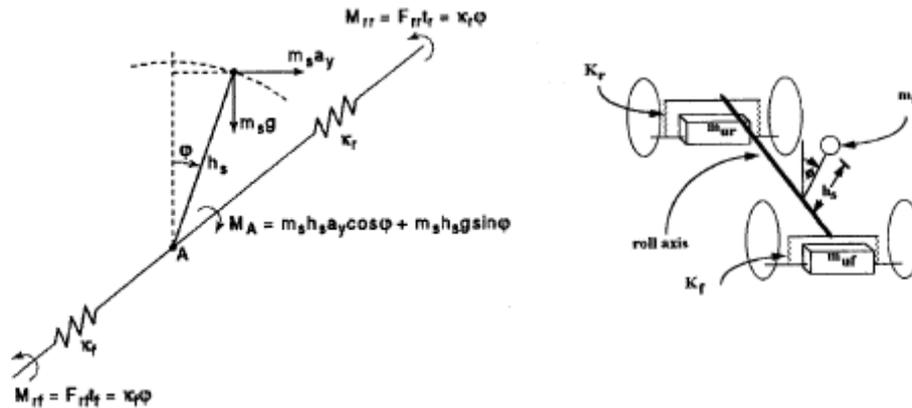


Figura 2.4. Diagrama de aceleração de rolagem.

Pela Equação 2.27, verifica-se que o movimento de rolagem em um referencial móvel não depende somente do movimento de *roll*, mas também dos movimentos de *yaw* e *pitch*. Então devem-se acrescentar na Equação 2.35 os termos da Equação 2.27, de acordo as leis de Newton-Euler, quando a análise é realizada no referencial local móvel, levando à Equação 2.36,

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\varphi}) - I_{pitch} \ddot{\theta} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \dot{\varphi} + \kappa_{roll} \varphi = m_s g h_{sr} \sin \varphi + m_s a_y h_{sr} \cos \varphi \quad (2.36)$$

A rolagem do veículo é provocada pelas forças nos pneus, e estas forças já estão implicitamente incluídas na Equação 2.36 pela aceleração lateral  $a_y$ . Esta aceleração lateral é o resultado de uma força externa responsável pelo movimento lateral do veículo.

De forma muito semelhante ao desenvolvido para movimento de rolagem, se o mesmo para a determinação da equação diferencial que descreve o movimento *pitch*. Agora é preciso considerar o amortecimento e a rigidez associados a este movimento ( $\beta_{pitch}$ ,  $\kappa_{pitch}$ ), que dependem dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões ( $B_f$ ,  $B_r$ ,  $K_f$ ,  $K_r$ ), e também da distancia entre o CG e os eixos das rodas, tanto dianteiros quanto traseiros. Estes valores são calculados segundo as Equações 2.37 e 2.38,

$$\beta_{pitch} = 2(B_f a^2 + B_r b^2) \quad (2.37)$$

$$\kappa_{pitch} = 2(K_f a^2 + K_r b^2) \quad (2.38)$$

Empregando o mesmo procedimento adotado para gerar a equação de movimento de rolagem, então, inicialmente, para maior compreensão do movimento *pitch*, define-se uma equação diferencial que apenas depende do ângulo de *pitch*, levando à Equação 2.39,

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + \beta_{pitch} \dot{\rho} + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s a_x h_{sp} \cos \rho \quad (2.39)$$

onde  $I_{pitch}$  representa o momento de inércia do movimento *pitch*,  $h_{sp}$  representa a altura entre o CG e o centro de giro do movimento *pitch*,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\rho$  o ângulo *pitch*.

Agora tomando a Equação 2.28, obtida segundo Newton-Euler, acrescentam-se os parâmetros que relacionam o movimento *pitch*, com os outros dois movimentos (*roll* e *yaw*), e se determina uma equação diferencial que descreve o movimento *pitch* no referencial local, Equação 39,

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\varphi} + I_{roll} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \rho + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s a_x h_{sp} \cos \rho \quad (2.40)$$

A arfagem do veículo é provocada pelas forças de tração e frenagem, e estas forças já estão implicitamente incluídas na Equação 2.40 pela aceleração longitudinal  $a_x$ , esta aceleração longitudinal é o resultado de uma força externa responsável pelo movimento longitudinal do veículo.

Uma vez escritas todas às equações de movimento do modelo não linear do veículo, em relação ao sistema referencial móvel, é possível agrupá-las, resultando um conjunto de equações diferenciais que modelam o comportamento dinâmico do veículo. As Equações 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.32, 2.36 e 2.40, juntas, compõem as equações de movimento do veículo, com 5 graus de liberdade,

$$\sum F_x = m_{tot} \ddot{x} - m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} - m_s h_{sp} \ddot{\rho}$$

$$\sum F_y = m_{tot} \ddot{y} - m_s h_{sr} \ddot{\varphi} + m_{tot} \dot{x} \dot{\theta}$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\varphi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\varphi} + I_{pitch} \dot{\varphi} \dot{\rho}$$

$$I_{roll} \ddot{\varphi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\varphi}) - I_{pitch} \dot{\theta} \dot{\rho} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \varphi + \kappa_{roll} \varphi = m_s g h_{sr} \text{sen} \varphi + m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_{sr} \cos \varphi$$

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\varphi} + I_{roll} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \rho + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s (\ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}) h_{sp} \cos \rho$$

## 2.2

### Modelo dos componentes do veículo

Desenvolve-se a seguir o modelo de cada um dos componentes do veículo, com a finalidade de entender claramente sua contribuição para a representação que possibilita analisar o movimento no plano horizontal  $xy$  local ou  $XY$  global, associado à trajetória do veículo e a atitude de *yaw*, incluindo os efeitos de *roll* e *pitch*, como discutido no item anterior. A Figura 2.5 apresenta um esquema de todo o modelo, na qual a interrelação entre os componentes, e as respectivas variáveis de interesse, encontram-se explicitadas.

Cada componente na Figura 2.5 é representado por um bloco, uma forma conveniente para facilitar o desenvolvimento e compreensão de um modelo de grande porte, como é o caso aqui tratado. No procedimento empregado a seguir, o modelo de cada componente é desenvolvido e testado, e só então inserido na representação do sistema como um todo. Esta metodologia simplifica enormemente a modelagem de problemas complexos, envolvendo diversos elementos, e minimiza a possibilidade de erros.

A entrada do modelo mostrado na Figura 2.5 é o ângulo do volante, que a partir a Caixa de Direção do veículo, passando pela Geometria de Ackermann, gera como saída os ângulos de esterçamento para cada pneu dianteiro (direito e esquerdo). Estes por sua vez excitam o subsistema Ângulos de Deriva, juntamente com a velocidade lateral e longitudinal do veículo, gerando os sinais de entrada para os Pneus. O modelo dos pneumáticos irá levar às forças e aos momentos empregados para excitar a dinâmica do veículo no referencial local, dependendo da posição dos pontos de contato dos pneus em relação ao chassi, definida no elemento “Geometria do Veículo”.

A dinâmica do veículo em um referencial que passa no seu centro de massa foi apresentada no item anterior. Finalmente a “Transformação de Coordenadas” possibilita representar as variáveis no referencial global, para determinação da trajetória do veículo.

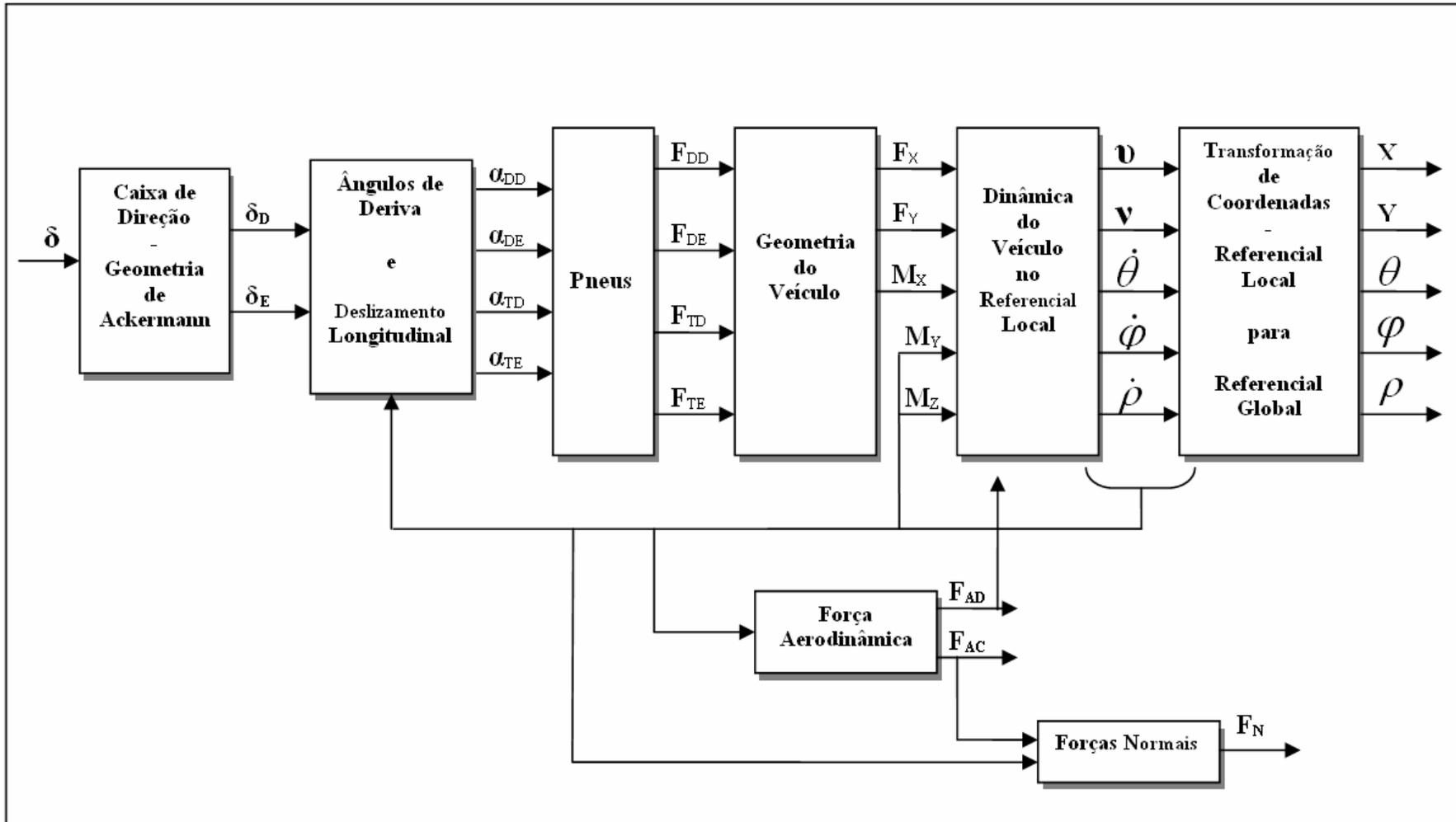


Figura 2.5. Esquema do modelo do veículo.

### 2.2.1 Geometria de Ackermann

Analisa-se a seguir a geometria de Ackermann, que possibilita determinar, em função do ângulo de esterçamento do volante ( $\delta$ ), os ângulos de esterçamento das rodas dianteira direita e esquerda ( $\delta_D$  e  $\delta_E$ ) e o raio de curvatura instantâneo ( $R$ ), de acordo com o esquema da Figura 2.6.

O modelo da geometria de Ackermann relaciona o ângulo do volante do motorista e os ângulos de esterçamento, mediante algumas condições ideais dos veículos, que geralmente, na realidade, não são cumpridas. Nos mecanismos de direção reais dos veículos não se têm componentes (braços) suficientes para garantir que a Geometria de Ackermann possa ser completamente satisfeita. Entretanto, como ponto de partida para os projetos, sempre se leva em consideração tal condição ideal, como apresentado a seguir. A Figura 2.6 mostra a relação entre as variáveis envolvidas neste problema.

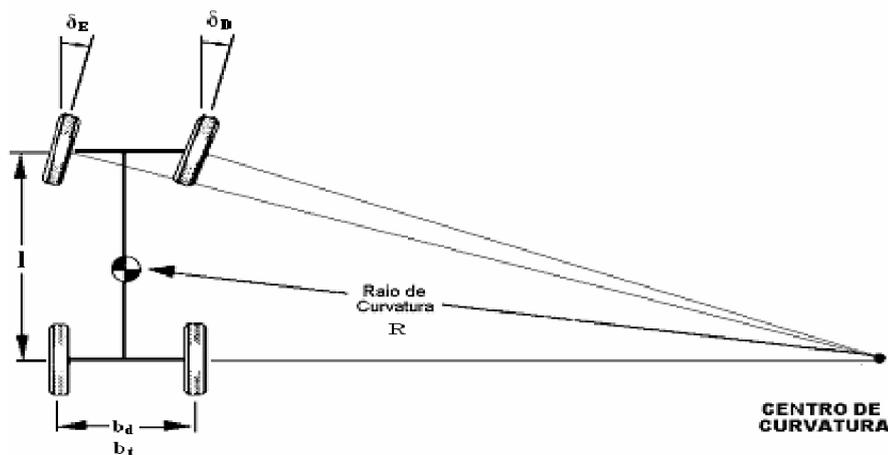


Figura 2.6. Ângulo de esterçamento das rodas dianteiras e raio de curvatura segundo a Geometria de Ackermann.

Empregando a Geometria de Ackermann tem-se que os ângulos de esterçamento são diferentes  $\delta_D \neq \delta_E$ . Quando se gira o volante para um determinado sentido, o ângulo esterçamento da roda interna sempre é maior do que aquele da roda externa à curva que se deseja percorrer. Tal condição permite definir duas funções como mostrado na Equação 2.41,

$$\begin{cases}
\text{Para } \delta < -f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_D = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_D)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_E = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right. \\
\text{Para } \delta > f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_E = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_E)} + \frac{b_d}{2} \\ \delta_D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R + b_d/2}\right) \end{array} \right.
\end{cases} \quad (2.41)$$

sendo  $\delta$  positivo para curvas à esquerda e negativo para curvas à direita (medido em relação ao eixo  $x$  negativo). Na Equação 2.41,  $k_d$  e  $f_d$  são, respectivamente, a relação de transmissão e a folga do sistema de direção,  $b_d$  e  $b_t$  são, respectivamente, as bitolas dianteira e traseira,  $l = l_d + l_t$  é distancia entre eixos das rodas,  $l_d$  e  $l_t$  são as distancias dos eixos das rodas dianteiras e traseiras ao centro de massa CM,  $R$  é o raio de curvatura instantâneo durante o movimento do veículo [11].

Para avaliar e validar esta função simula-se o comportamento para valores arbitrários de ângulos do volante, a partir de dados genéricos de veículos de passeio, Tabela 1 [11]. Para analisar a variação dos ângulos de esterçamento foram feitos movimentos triviais no volante, que possibilitaram a determinação analítica dos ângulos das rodas. Os resultados obtidos analiticamente para avaliar o modelo são mostrados na Tabela 2, correspondem a estados estacionários, para os quais se tem alguns valores fixos da função ângulo do volante.

São realizadas simulações para os valores da Tabela 2, empregando a implementação em *Simulink/Matlab* da Equação 2.41. A Figura 2.7 mostra a entrada, ângulos do volante constantes em determinados intervalos de tempo. As Figuras 2.8 e 2.9 mostram os resultados obtidos para os ângulos de esterçamento direito e esquerdos respectivamente. Estes ângulos são muito próximos, mas não são iguais. É bom ressaltar que com ângulos menores do volante, os ângulos de esterçamento se aproximam mais em seus valores, e com ângulos maiores da volante os ângulos de esterçamento se afastam mais. Os valores encontrados são idênticos aos da Tabela 2, como não poderia deixar de ser.

Tabela 1. Parâmetros arbitrários construtivos de um veículo de passeio genérico.

<b>Parâmetro</b>	<b>Símbolo</b> <b>Unidade</b>	<b>Valor</b>
Distancia entre eixos	$l$ [m]	2,59
Distancia do eixo dianteiro ao CG	$l_d$ [m]	1,43
Distancia do eixo traseiro ao CG	$l_t$ [m]	1,16
Bitola dianteira	$b_d$ [m]	1,49
Bitola traseira	$b_t$ [m]	1,45
Raio de curva mínimo	$R_{\text{mín}}$ [m]	2,0
Esterçamento máximo roda interna	$\delta_{\text{máx}}$ [°]	50,19
Esterçamento máximo roda externa	$\delta_{\text{Emáx}}$ [°]	28,61
Esterçamento máximo volante	$\delta_{\text{máx}}$ [°]	90
Relação de transmissão da direção	$k_d$	0,318
Folga do sistema de direção	$f_d$ [°]	1,0
Velocidade longitudinal constante	$u$ [km/h]	20

Tabela 2. Ângulos de esterçamento e raio de curvatura para valores constantes do ângulo do volante.

Ângulo da Volante $\delta$	Ângulo de esterçamento Direito $\delta_D$	Ângulo de esterçamento Esquerdo $\delta_E$	Raio de curvatura instantâneo R
+ 90 °	+ 22.5531 °	+ 28.6200 °	+ 5.4914 m
- 90 °	- 28.6200 °	- 22.5531 °	- 5.4914 m
+ 45 °	+ 12.5407 °	+ 14.3100 °	+ 10.8985 m
- 45 °	- 14.3100 °	- 12.5407 °	- 10.8985 m

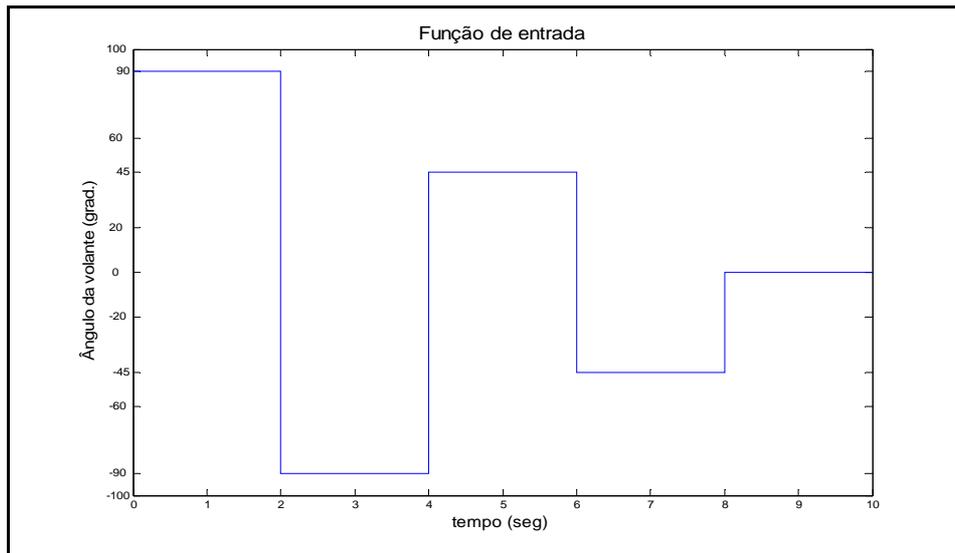


Figura 2.7. Função entrada da volante, ângulos estacionários.

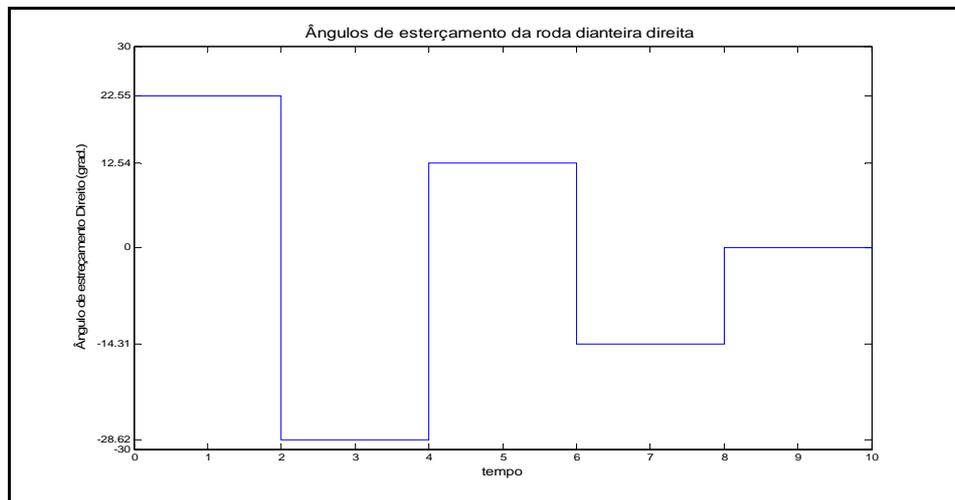


Figura 2.8. Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita, ângulos estacionários.

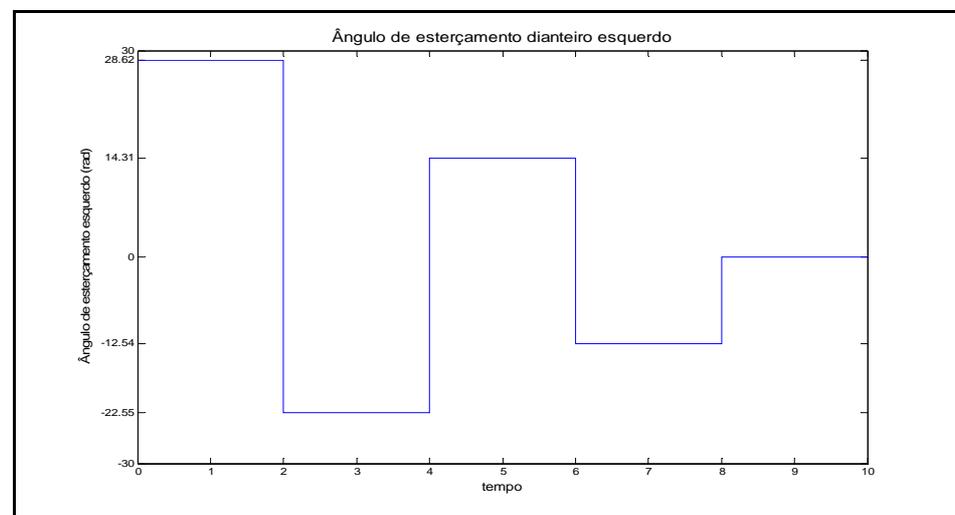


Figura 2.9. Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda, ângulos estacionários.

Na Figura 2.10 apresenta-se uma função de entrada para o ângulo de esterçamento do volante com variação no tempo, desde  $0^\circ$  até  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ , voltando ao  $0^\circ$ . As Figuras 2.11 e 2.12 mostram os resultados da simulação em *Simulink/Matlab*, os ângulos de esterçamento da roda direita e esquerda, respectivamente. Na Figura 2.13 apresenta-se a variação dos ângulos de esterçamento em relação ao ângulo do volante e na Figura 2.14 uma comparação direta entre estas variáveis. Nota-se nestes casos mais claramente a diferença entre os ângulos quando o esterçamento é feito em um sentido ou no outro.

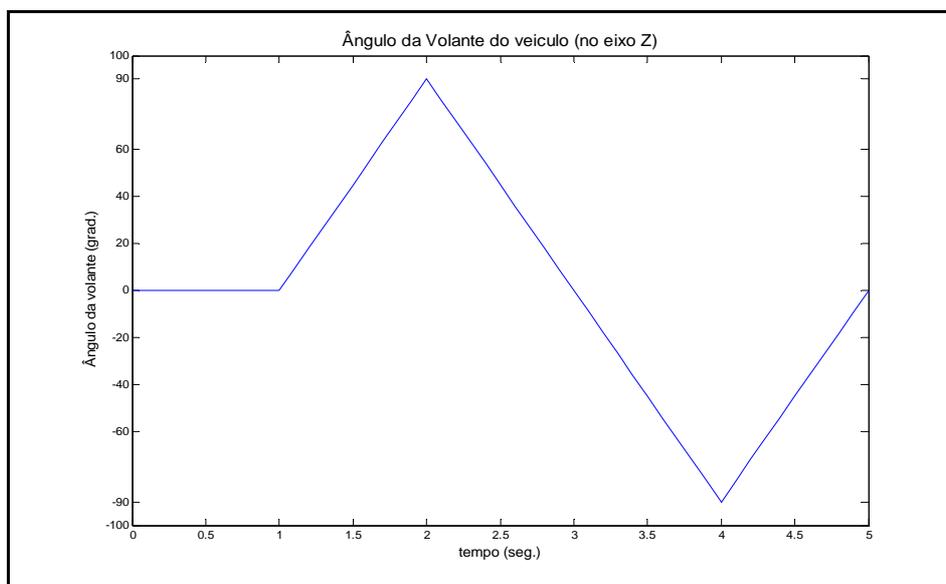


Figura 2.10. Função de entrada para o ângulo da volante.

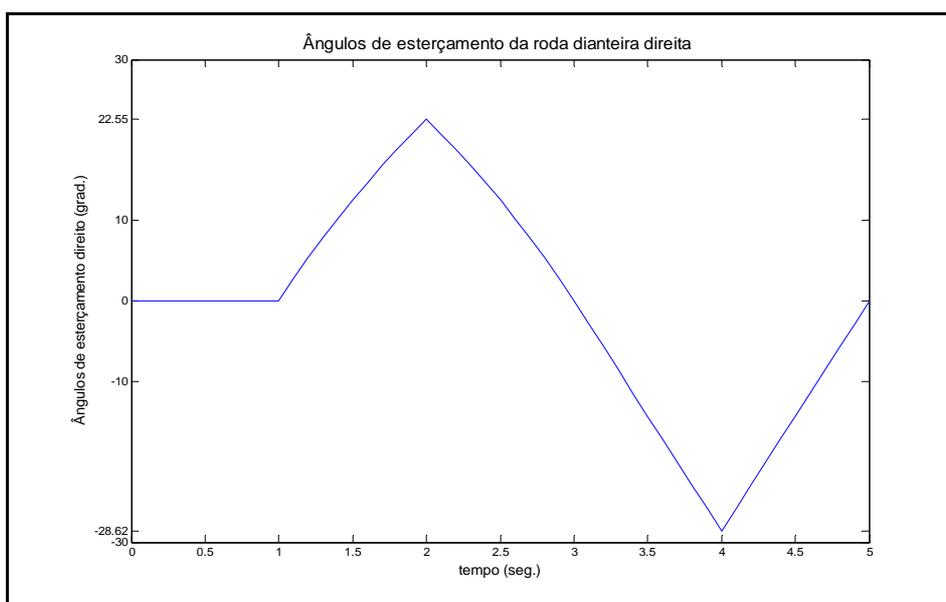


Figura 2.11. Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita.

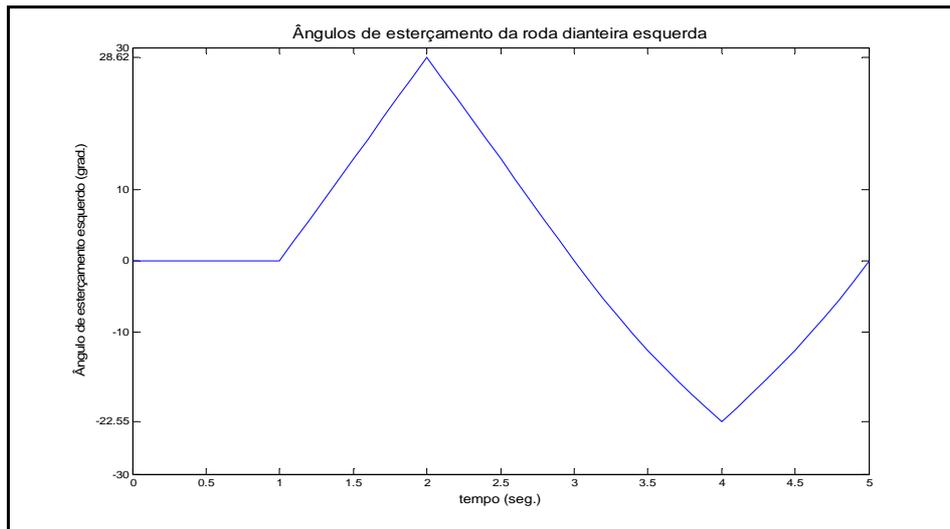


Figura 2.12. Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda.

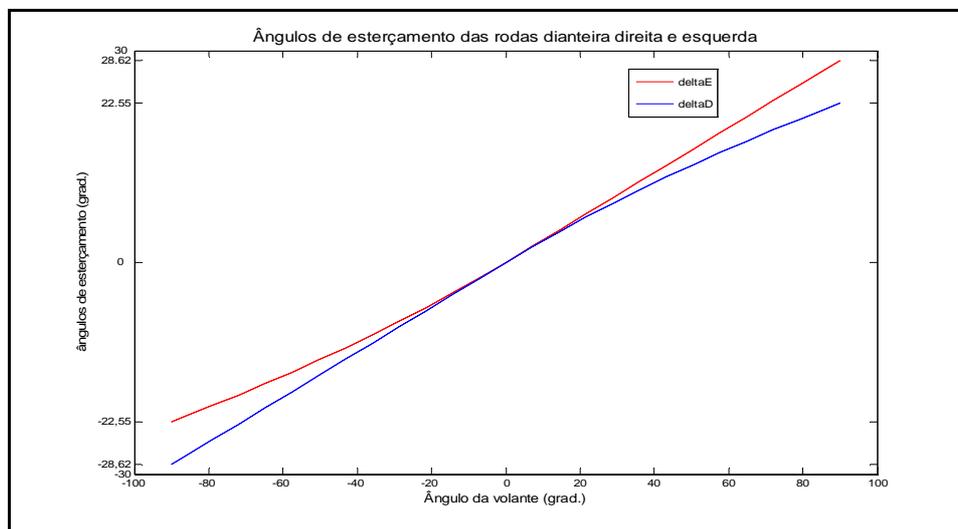


Figura 2.13. Ângulos de esterçamento em função ao ângulo da volante.

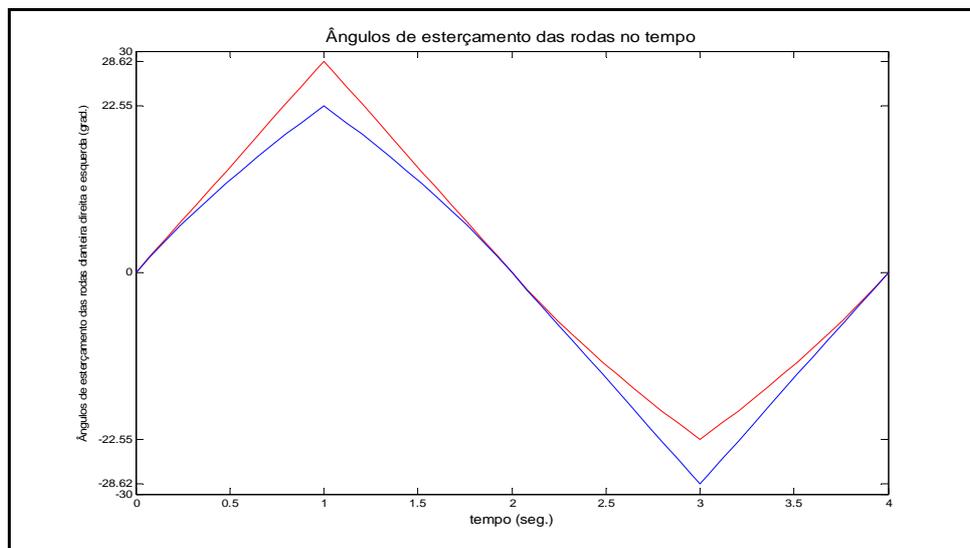


Figura 2.14. Comparação entre os ângulos de esterçamento das rodas.

### 2.2.2 Ângulos de deriva

O ângulo de deriva corresponde à diferença entre a trajetória pretendida pelo motorista, que atua sobre o carro ao alterar os ângulos de esterçamento, e a trajetória realmente cumprida. Na Figura 2.15 se mostra como este ângulo é gerado [13] para o modelo bicicleta, e na Figura 2.16 apresenta-se a semelhança desta variável com aquela associada ao movimento de caminhar de um ser humano: quando o veículo se desloca lateralmente, gera-se uma força lateral que provoca uma deformação do pneumático, e esta por sua vez irá propiciar a modificação na direção do movimento do veículo.

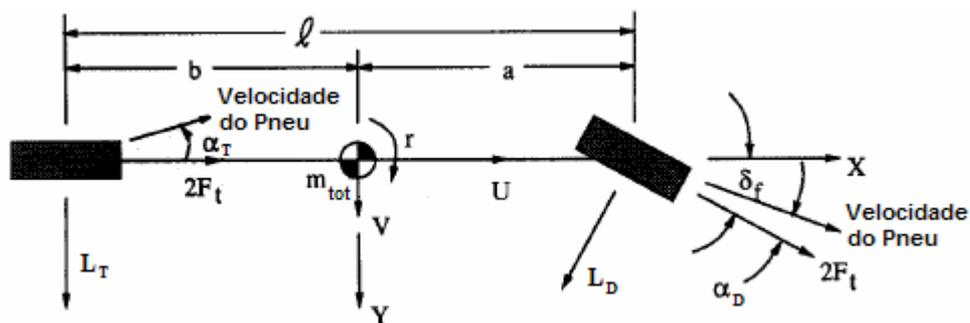


Figura 2.15. Identificação dos ângulos de deriva.

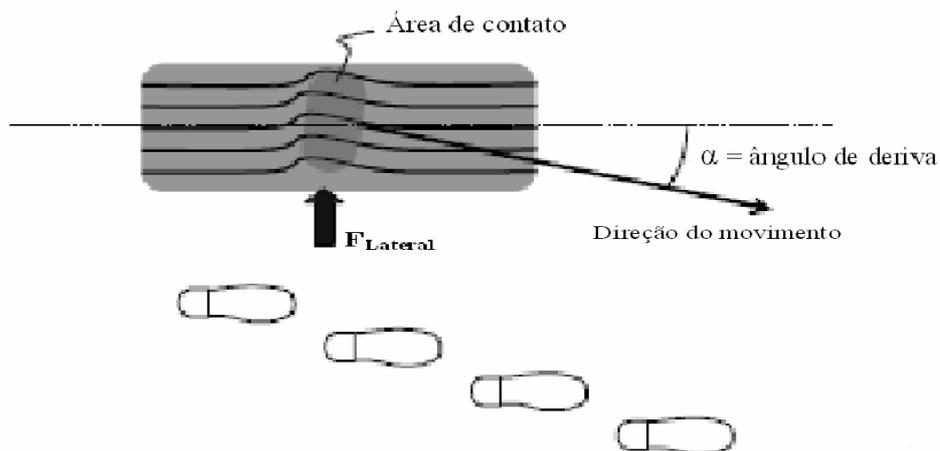


Figura 2.16. Comportamento do ângulo de deriva.

As Equações 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45, definem os ângulos de deriva em cada pneu: dianteiro direito (DD), dianteiro esquerdo (DE), traseiro direito (TD) e traseiro esquerdo (TE) respectivamente, em função do ângulo de esterçamento e

das velocidades longitudinal, lateral e angular de *yaw* do veículo e da posição dos pneus em relação ao centro de massa no referencial local, de acordo com

$$\alpha_{DD} = \delta_D - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.42)$$

$$\alpha_{DE} = \delta_E - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.43)$$

$$\alpha_{TD} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.44)$$

$$\alpha_{TE} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right) \quad (2.45)$$

Para avaliar o modelo do ângulo de deriva, supõe-se um ângulo do volante de  $45^\circ$ , o que gera, segundo a geometria de Ackermann, ângulos de esterçamento direito e esquerdo nas rodas de

$$\delta_{DD} = 12,54^\circ$$

$$\delta_{DE} = 14,31^\circ$$

Para testar o modelo em um estado não estacionário, supõe-se as velocidades de *yaw* desde 0 até 0,2 rad/s e lateral de 0 até 2 m/s variando linearmente, como mostrado nas Figura 2.17 e 2.18, mas mantendo a velocidade longitudinal constante em 20 m/s. As Equações 2.42 a 2.45 foram implementadas em *Simulink/Matlab*, e os resultados obtidos são mostrados na Figura 2.19, na qual os ângulos de deriva apresentam o comportamento esperado. Por exemplo, o ângulo de deriva dianteiro inicial é igual ao ângulo de esterçamento, e vai diminuindo. Já os ângulos de deriva traseiros iniciam em zero e vão crescendo negativamente.

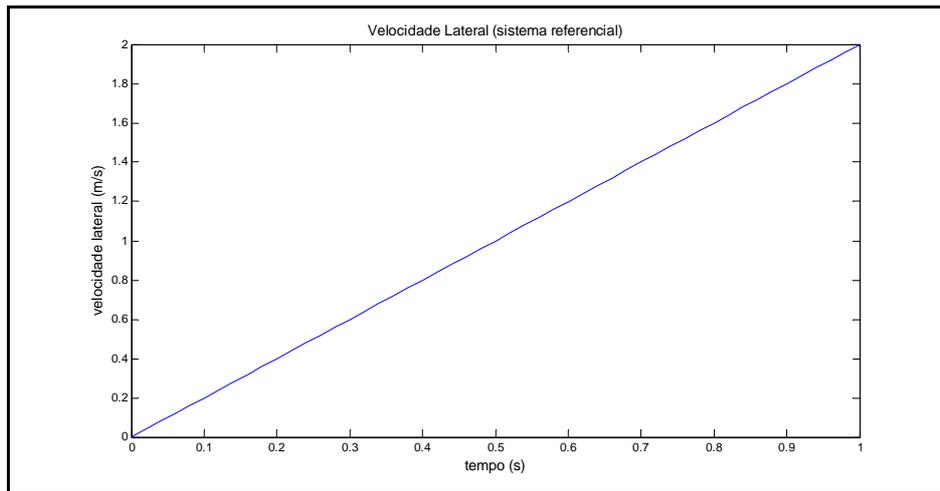


Figura 2.17. Função entrada da velocidade lateral para avaliar os ângulos de deriva.

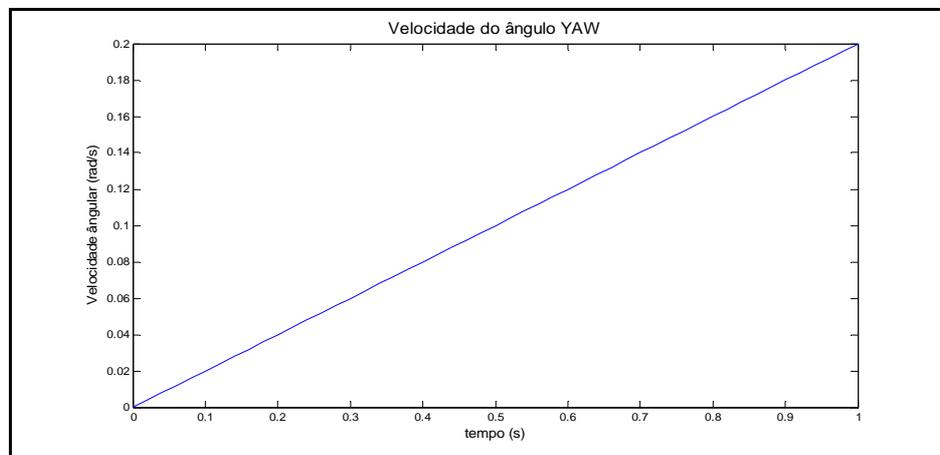


Figura 2.18. Função entrada da velocidade do yaw para avaliar os ângulos de deriva.

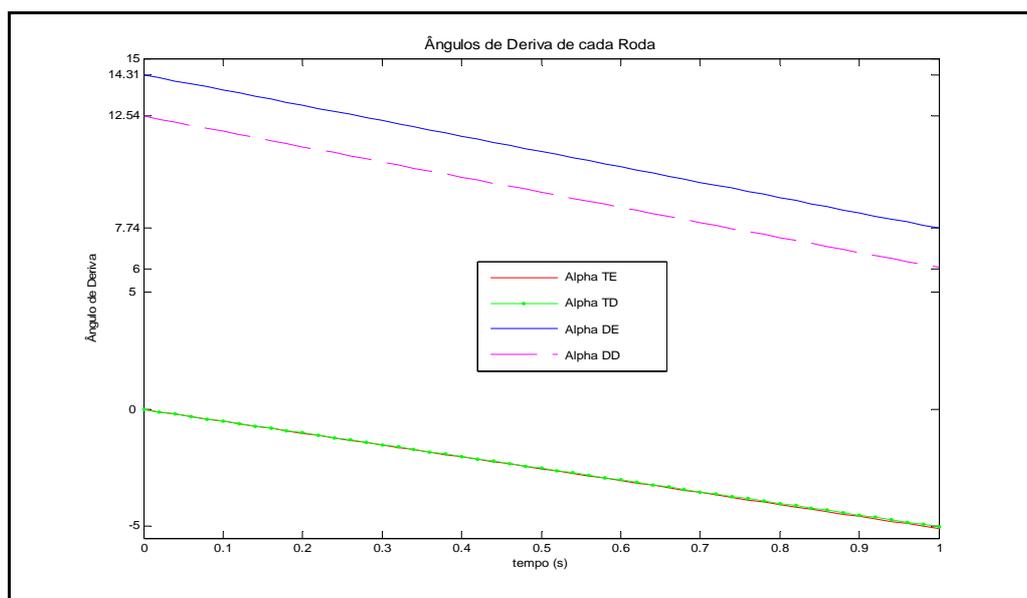


Figura 2.19. Ângulo de deriva de cada pneumático para uma função de entrada conhecida.

### 2.2.3

#### Forças laterais nos pneus

Apresenta-se agora o modelo adotado para as forças laterais ( $L_i$ ), que dependem dos ângulos de deriva e da rigidez lateral dos pneus. Não se pretendeu desenvolver todo o equacionamento para forças laterais, mas sim interpretar um modelo já consagrado, encontrado na documentação especializada [13]. As forças laterais podem ser expressas por

$$L_i = \frac{C_\alpha \operatorname{tg} \alpha_i}{1 - \lambda_s} f(S) \quad \therefore \quad i = DE, DD, TE, TD \quad (2.46)$$

onde  $f(S)$  é a relação de aderência característica do pneu, descrita por

$$f(S) = \begin{cases} S(2-S) & \text{se } S \leq 1 \\ 1 & \text{se } S > 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

$$S = \frac{\mu F_{Ni} \left(1 - \varepsilon_r U \sqrt{\lambda_s^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}\right)}{2 \sqrt{C_x^2 \lambda_s^2 + C_\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_i}} (1 - \lambda_s) \quad (2.48)$$

na qual as constantes são definidas como

$\mu$  - Coeficiente de Aderência à Pista

$F_{Ni}$  - Força Normal do  $i$ -ésimo pneu

$\varepsilon_r$  - Fator de Redução da Aderência da Pista

$U$  - Velocidade Longitudinal

$\lambda_s$  - Deriva Longitudinal

$C_\alpha$  - Rigidez Lateral

$\alpha_i$  - Ângulo de Deriva do  $i$ -ésimo Pneu

As Equações 2.46, 2.47 e 2.48 descrevem um modelo muito complexo, dependente de muitas variáveis, que pode ser simplificado por uma função linear para ângulos de deriva pequenos (Figuras 2.20 e 2.21), e como uma constante para ângulos acima de determinados valores. Então pode-se empregar uma representação para as forças laterais  $L_i$ , onde se considera a aproximação para pequenos deslocamentos angulares (menores a  $8^\circ$ ), e adotar as Equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52,

$$L_{DD} = C_{DD} \cdot \alpha_{DD} \quad (2.49)$$

$$L_{DE} = C_{DE} \cdot \alpha_{DE} \quad (2.50)$$

$$L_{TD} = C_{TD} \cdot \alpha_{TD} \quad (2.51)$$

$$L_{TE} = C_{TE} \cdot \alpha_{TE} \quad (2.52)$$

nas quais  $C_{DE}$ ,  $C_{DD}$  e  $C_{TE}$ ,  $C_{TD}$  correspondem aos coeficientes de rigidez lateral dos pneus dianteiro esquerdo, dianteiro direito, traseiro esquerdo e traseiro direito, respectivamente, que podem ser reduzidos a  $C_f$  e  $C_r$ , considerando que os pneus são iguais nos dois lados da dianteira e nos dois da traseira.

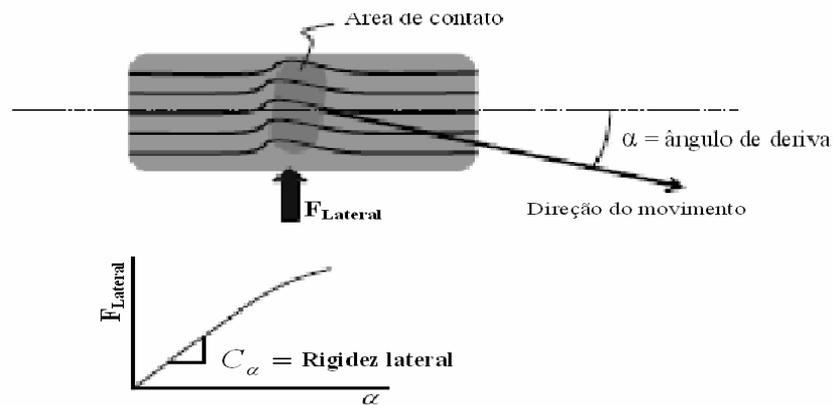


Figura 2.20. Curva característica dos ângulos de deriva.

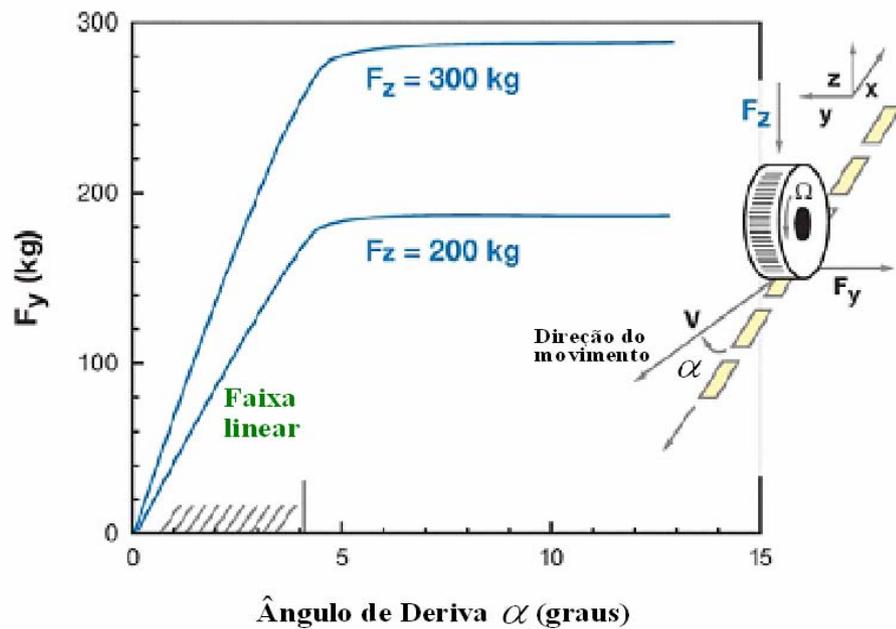


Figura 2.21. Força lateral em função ao ângulo de deriva. [17]

Como se pode ver na Figura 2.21, quando o ângulo de deriva é grande a força lateral tende a ser constante [17]. Uma vez que se pretende trabalhar com veículos de competição em altas velocidades, que percorrem pistas lisas [9], nestas condições, os ângulos de deriva são pequenos, o que é uma característica inerente aos carros de corrida, portanto a consideração de adotar o modelo linear é bastante aceitável. Emprega-se coeficientes de rigidez dos pneus,  $C_f = C_r = 60000$  N/rad, com variação linear para a força com ângulos de deriva entre  $\langle -8,8 \rangle$ ; para ângulos maiores a força será constante, dada pelo produto correspondente [14].

## 2.2.4

### Geometria do veículo

Descrevem-se agora as forças externas que atuam sobre o veículo e as formas como elas afetam o modelo matemático. Como se conhecem as relações que estabelecem as forças nos pneus, pode-se escrever as forças resultantes em  $x$ ,  $y$  e os momentos correspondentes.

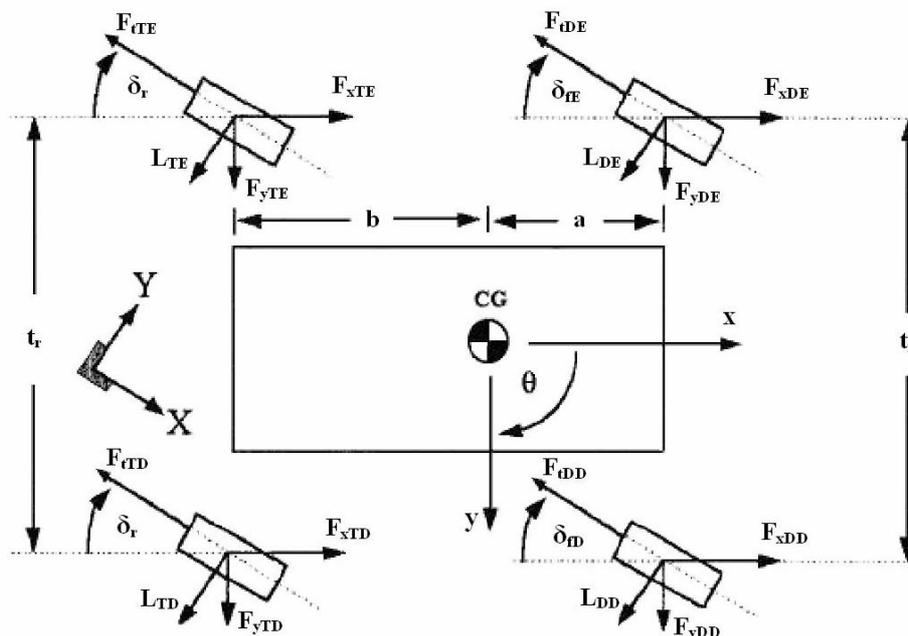


Figura 2.22. Orientação dos componentes das forças nos pneus.

Na Figura 2.22 se mostra cada componente das forças nos eixos  $x$  e  $y$ . A distribuição destas forças gera um momento que provoca o movimento de *yaw*.

Tais forças em cada um dos pneus são geradas pelos ângulos de esterçamento, como também as de frenagem, e dadas por

$$F_{xDE} = -C_{DE} \delta_b \cos \delta_{fE} - L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} \quad (2.53)$$

$$F_{xDD} = -C_{DD} \delta_b \cos \delta_{fD} - L_{DD} \text{sen} \delta_{fD} \quad (2.54)$$

$$F_{xTE} = -C_{TE} \delta_b \cos \delta_r - L_{TE} \text{sen} \delta_r \quad (2.55)$$

$$F_{xTD} = -C_{TD} \delta_b \cos \delta_r - L_{TD} \text{sen} \delta_r \quad (2.56)$$

nas quais  $\delta_{fE}$  é o ângulo de esterçamento do pneu dianteiro esquerdo,  $\delta_{fD}$  é o ângulo de esterçamento do pneu dianteiro direito,  $\delta_r$  é o ângulo de esterçamento dos pneus traseiros esquerdo e direito,  $L_{DE}$  é a força lateral do pneu dianteiro esquerdo,  $L_{DD}$  é a força lateral do pneu dianteiro direito,  $L_{TE}$  é a força lateral do pneu traseiro esquerdo,  $L_{TD}$  é a força lateral do pneu traseiro direito,  $\delta_b$  é ângulo do pedal do freio,  $C_{DE}$ ,  $C_{DD}$  e  $C_{TE}$ ,  $C_{TD}$  correspondem aos coeficientes de rigidez dos pneus, respectivamente.

Nestas equações tem-se as forças produzidas pela frenagem do veículo, forças longitudinais de cada pneumático, são descritas por:  $F_{iDE} = C_{DE} \delta_b$ ,  $F_{iDD} = C_{DD} \delta_b$ ,  $F_{iTE} = C_{TE} \delta_b$ ,  $F_{iTD} = C_{TD} \delta_b$ , como o modelo final desta dissertação se quer para velocidade constante, não se calculará as forças longitudinais, por quanto não se explica muito da modelagem das forças de frenagem e apenas se apresentam nas equações já simplificadas; para mais informação sobre este tema são mostradas na referência bibliográfica artigos que podem explicar mais amplamente o desenvolvimentos destas forças, em especial a referência [13].

A força total no eixo  $x$  corresponde ao somatório das relações descritas anteriormente, isto é a soma das Equações 2.53, 2.54, 2.55 e 2.56, dando como resultado a Equação 2.57,

$$F_x = -(C_{DE} \delta_b \cos \delta_{fE} + C_{DD} \delta_b \cos \delta_{fD}) - (C_{TE} + C_{TD}) \delta_b \cos \delta_r - (L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} + L_{DD} \text{sen} \delta_{fD}) - (L_{TE} + L_{TD}) \text{sen} \delta_r \quad (2.57)$$

Para o eixo  $y$ , a análise em cada pneu é muito similar, levando à

$$F_{yDE} = -C_{DE} \delta_b \text{sen} \delta_{fE} + L_{DE} \cos \delta_{fE} \quad (2.58)$$

$$F_{yDD} = -C_{DD} \delta_b \text{sen} \delta_{fD} + L_{DD} \cos \delta_{fD} \quad (2.59)$$

$$F_{yTE} = -C_{TE} \delta_b \text{sen} \delta_r + L_{TE} \cos \delta_r \quad (2.60)$$

$$F_{yTD} = -C_{TD} \delta_b \text{sen} \delta_r + L_{TD} \cos \delta_r \quad (2.61)$$

Sendo a força total no eixo  $y$  simplesmente a soma das Equações 2.58, 2.59, 2.60 e 2.61,

$$F_y = -(C_{DE} \delta_b \text{sen} \delta_{fE} + C_{DD} \delta_b \text{sen} \delta_{fD}) - (C_{TE} + C_{TD}) \delta_b \text{sen} \delta_r + (L_{DE} \cos \delta_{fE} + L_{DD} \cos \delta_{fD}) + (L_{TE} + L_{TD}) \cos \delta_r \quad (2.62)$$

Do mesmo modo que para as forças também o momento de *yaw* é analisado para cada pneu em particular, levando às Equações 2.63, 2.64, 2.65 e 2.66, e ao momento total em torno do CG, obtido pelo somatório da Equação 2.67, dadas por

$$M_{DE} = -\delta_b C_{DE} a \text{sen} \delta_{fE} - \delta_b C_{DE} \frac{t_f}{2} \cos \delta_{fE} + a L_{DE} \cos \delta_{fE} - \frac{t_f}{2} L_{DE} \text{sen} \delta_{fE} \quad (2.63)$$

$$M_{DD} = -\delta_b C_{DD} a \text{sen} \delta_{fD} + \delta_b C_{DD} \frac{t_f}{2} \cos \delta_{fD} + a L_{DD} \cos \delta_{fD} + \frac{t_f}{2} L_{DD} \text{sen} \delta_{fD} \quad (2.64)$$

$$M_{TE} = \delta_b C_{TE} b \text{sen} \delta_r - \delta_b C_{TE} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TE} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TE} \text{sen} \delta_r \quad (2.65)$$

$$M_{TD} = \delta_b C_{TD} b \text{sen} \delta_r + \delta_b C_{TD} \frac{t_r}{2} \cos \delta_r - b L_{TD} \cos \delta_r - \frac{t_r}{2} L_{TD} \text{sen} \delta_r \quad (2.66)$$

$$M_z = M_{DE} + M_{DD} + M_{TE} + M_{TD} \quad (2.67)$$

Considerando a velocidade constante, para avaliar o equacionamento realizado, tem-se  $\delta_b = 0$  (ângulo do pedal do freio, para velocidade constante), faz-se uma simulação para a velocidade angular de *yaw* variando 0 até 0,2 rad/s, a velocidade lateral de 0 até 2 m/s, com velocidade longitudinal (constante) igual a 20 m/s, e os ângulos de esterçamento constantes  $\delta_{DD} = 12,54$ ,  $\delta_{DE} = 14,31$ . O comportamento para os ângulos de deriva fica o mesmo da Figura 2.19, já que as condições são iguais àquelas empregadas para a avaliação dessas variáveis. As Figuras 2.23 a 2.24 mostram os resultados encontrados através do *Simulink/Matlab* para as forças nos eixos  $x$  e  $y$  e o momento de *yaw*. Os resultados expressam o que acontece com o modelo quando se faz uma manobra instantânea: o veículo inicialmente está se movimentando longitudinalmente a uma velocidade constante dada, quando instantaneamente se geram ângulos de estercimentos  $\delta_{DD} = 12,54$  e  $\delta_{DE} = 14,31$

mantidos constantes no tempo. Nestas condições a força lateral inicialmente é muito grande e ao longo do tempo diminui. Já que os ângulos de deriva diminuem, e também se espera que o momento que gera o movimento de *yaw* seja inicialmente muito grande e depois diminua. Este comportamento é assim por que se faz uma manobra instantânea, com isto se leva o sistema veicular de um estado estável a um com variáveis continuamente crescentes ou decrescentes.

A Figura 2.23 mostra a variação da força longitudinal, devida apenas à projeção da força lateral gerada pelo ângulo de deriva. Na verdade a força longitudinal deveria ser nula, uma vez que supõe-se o modelo com velocidade constante, mas há o efeito da projeção da força lateral. Os resultados mostrados nas figuras 2.24 e 2.25 são os esperados, expressando um comportamento lógico do veículo, o que permite dizer que o modelo foi considerado de acordo com os objetivos a que se propõe.

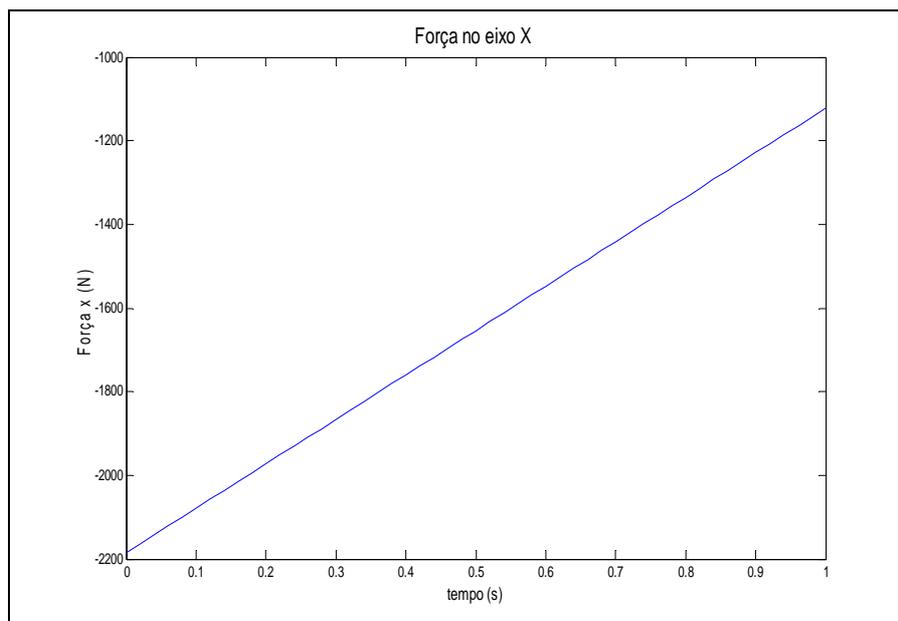


Figura 2.23. Força no eixo *x*, teste de modelo das forças no plano *xy*.

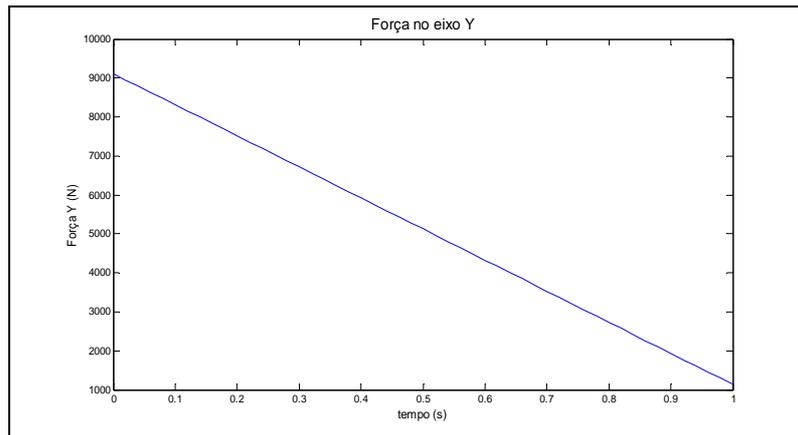


Figura 2.24. Força no eixo  $y$ , teste de modelo das forças no plano  $xy$ .

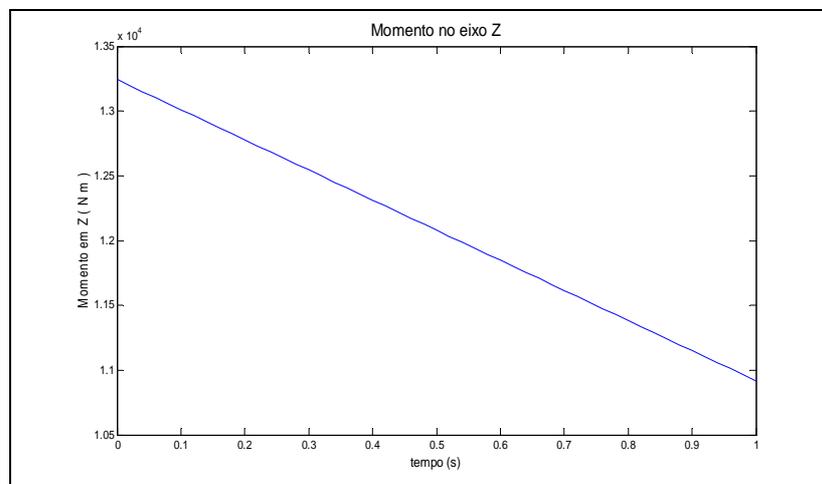


Figura 2.25. Momento no eixo  $z$ , teste de modelo das forças no plano  $xy$ .

## 2.2.5 Forças normais nos pneus

As forças normais no modelo tratado até este item são compostas pelas transferências de cargas devidas aos movimentos laterais, identificadas como carga devida à rolagem do corpo do veículo ( $F_{rf}$ ,  $F_{rr}$ ), dadas pelas Equações 2.68 e 2.69, carga devida à altura do centro de rolagem ( $F_{hf}$ ,  $F_{hr}$ ), mostradas nas Equações 2.70 e 2.71, e carga devida à massa não-suspensa ( $F_{uf}$ ,  $F_{ur}$ ), dadas nas Equações 2.72 e 2.73, de acordo com [13],

$$F_{rf} = \frac{\kappa_f h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_f} \quad (2.68)$$

$$F_{rr} = \frac{\kappa_r h_s m_s a_y}{\kappa_{roll} t_r} \quad (2.69)$$

$$F_{hf} = \frac{m_s b h_f a_y}{t_f (a + b)} \quad (2.70)$$

$$F_{hr} = \frac{m_s a h_r a_y}{t_r (a + b)} \quad (2.71)$$

$$F_{uf} = m_{uf} a_y \frac{h_f}{t_f} \quad (2.72)$$

$$F_{ur} = m_{ur} a_y \frac{h_r}{t_r} \quad (2.73)$$

nas quais  $h_f$  representa a altura da massa suspensa dianteira,  $h_{CG}$  representa a altura do CG,  $h_r$  representa a altura da massa suspensa traseira,  $\kappa_{roll}$  representa a rigidez de rolagem dada por

$$\kappa_{roll} = \kappa_f + \kappa_r \quad (2.74)$$

onde  $\kappa_f$  e  $\kappa_r$  representam os parâmetros de rigidez de rolagem dianteira e traseira respectivamente, e os termos  $K_f$  e  $K_r$  dados

$$\kappa_f = \frac{1}{2} K_f t_f^2 \quad (2.75)$$

$$\kappa_r = \frac{1}{2} K_r t_r^2 \quad (2.76)$$

caracterizam respectivamente a rigidez das suspensões dianteira e traseira.

Devem ser ainda consideradas outras duas componentes nas forças definidas anteriormente. A primeira é a carga normal devida à ação de frenagem ( $F_{bf}$ ,  $F_{br}$ ), mostrada nas Equações 2.77 e 2.78, e a segunda proveniente das cargas estáticas que agem sobre os pneus ( $F_{Nsf}$ ,  $F_{Nsr}$ ), dadas nas Equações 2.79 e 2.80, levando às cargas devido à frenagem estática, como tratado em [13],

$$F_{bf} = (m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} \quad (2.77)$$

$$F_{br} = -(m_{uf} h_f + m_s h_{cg} + m_{ur} h_r) \frac{a_x}{a + b} = -F_{bf} \quad (2.78)$$

$$F_{Nsf} = \frac{b m_{tot} g}{a + b} \quad (2.79)$$

$$F_{Nsr} = \frac{a m_{tot} g}{a + b} \quad (2.80)$$

Finalmente escrevem-se as equações das forças normais em cada pneu, baseado em suas componentes determinadas anteriormente, levando a

$$F_{NDD} = F_{rf} + F_{hf} + F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} \quad (2.81)$$

$$F_{NDE} = -F_{rf} - F_{hf} - F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} \quad (2.82)$$

$$F_{NTD} = F_{rr} + F_{hr} + F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} \quad (2.83)$$

$$F_{NTE} = -F_{rr} - F_{hr} - F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} \quad (2.84)$$

Para avaliar este modelo, consideram-se os dados da Tabela 1, para os parâmetros geométricos e físicos de um veículo de passeio, realizam-se duas simulações:

Inicialmente, considerou-se a aceleração longitudinal nula ( $a_x = 0$ ) e a aceleração lateral  $a_y$  variável segundo uma senoide de amplitude 0,5 ( $m/s^2$ ), como mostrado na Figura 2.26, que, quando é positiva, faz o veículo se movimentar para esquerda, e conseqüentemente rolar para a direita, fazendo com que as forças sejam maiores nesse lado. Na Figura 2.27 se encontram os resultados obtidos em *Simulink/Matlab*. Nota-se o comportamento esperado: quando o veículo se movimenta para a esquerda, se inclina pela direita, e as forças normais nas rodas que estão na direita aumentam, e as das rodas esquerdas diminuem, o ocorrendo o contrário para o sentido inverso.

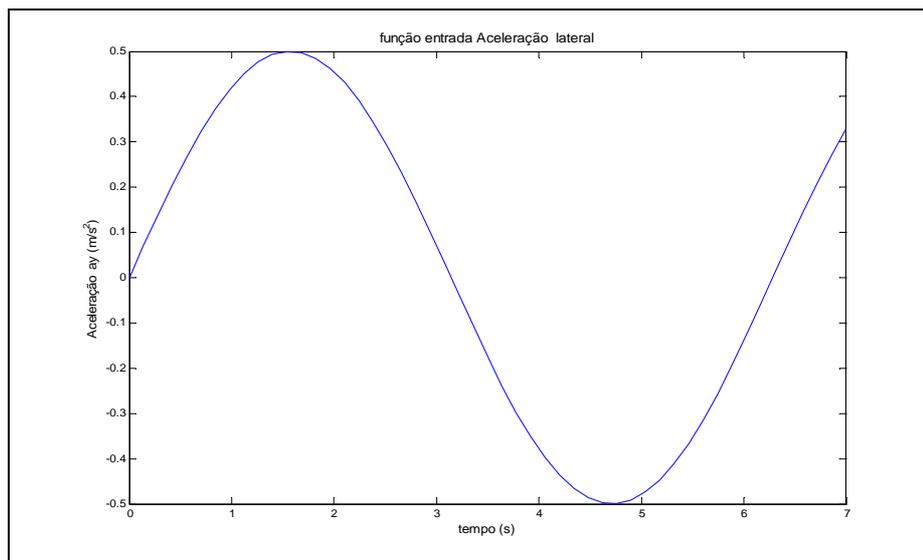


Figura 2.26. Função da aceleração lateral variável.

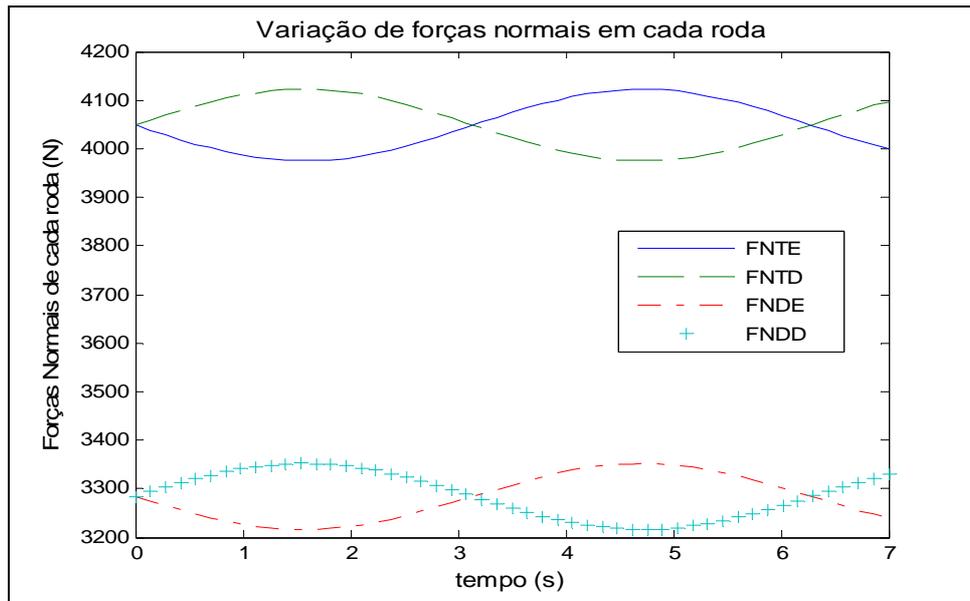


Figura 2.27. Forças normais em cada pneumático, com aceleração lateral variável.

Um outro teste é feito com aceleração lateral nula ( $a_y = 0$ ) e aceleração longitudinal variável, segundo uma função senoidal de amplitude  $0,5 \text{ (m/s}^2\text{)}$ , como mostrado na Figura 2.28. Neste caso, o veículo inicialmente acelera, fazendo o peso se deslocar para as rodas traseiras, ocorrendo o oposto em seguida, como mostrado na Figura 2.29.

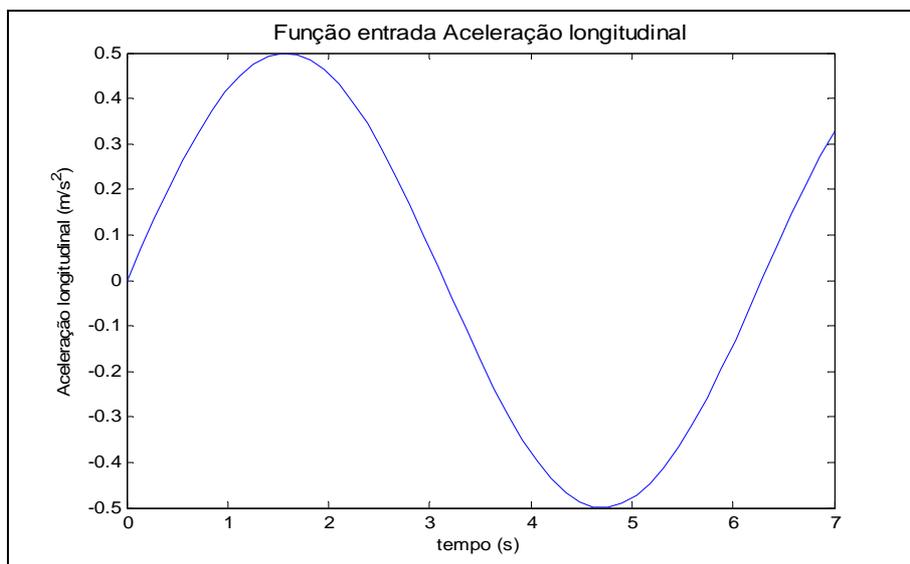


Figura 2.28. Função da aceleração longitudinal variável.

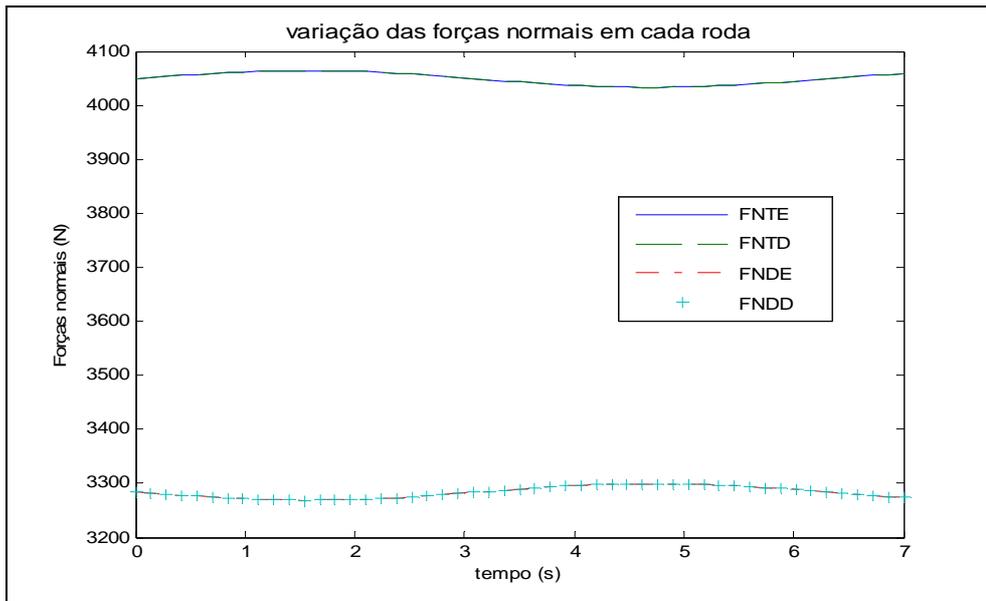


Figura 2.29. Forças normais em cada pneumático, com aceleração longitudinal variável.

## 2.2.6

### Forças aerodinâmicas

Este tipo de força é muito importante nos veículos de competição, pois devido a elas manobras com maiores acelerações podem ser realizadas. Apresenta-se a seguir um modelo aerodinâmico, de modo a definir as equações matemáticas que descrevem como este fenômeno influencia o comportamento do veículo.

Inicialmente considera-se a força frontal ou força de arrasto, que se opõe ao movimento, e depende da geometria do veículo, das condições atmosféricas no local, e da velocidade, de acordo com

$$F_{AD} = C_{AD} \cdot A \cdot \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot v^2 \quad (2.85)$$

na qual  $C_{AD}$  é o coeficiente de arrasto frontal,  $A$  é a projeção da área frontal do veículo,  $\rho_{ar}$  é massa específica do ar,  $v$  é a velocidade relativa frontal do veículo em relação ao ar. Considerando que o ar tem velocidade nula, então  $v$  é a velocidade longitudinal do veículo.

O coeficiente de arrasto é normalmente medido experimentalmente. Para o modelo em questão emprega-se um valor médio encontrado em publicações [18], e aplicado aos veículos de competição, tipo Formula 1, tal que  $C_{AD} = 0,25$ . A área frontal projetada para um veículo de Formula 1, é aproximadamente  $A = 1,2$

m<sup>2</sup>. A massa específica do ar nas condições atmosféricas padrão (15° de temperatura e 101,325 kPa de pressão) é  $\rho_{ar} = 1,226$  (kg/m<sup>3</sup>). Deste modo tem-se

$$F_{AD} = 0,1839 \cdot v^2 \quad (2.86)$$

No caso da força vertical, o cálculo é bastante semelhante. Esta força, que nos veículos de competição é gerada intencionalmente pelos perfis aerodinâmicos, de modo que eles fiquem mais “grudados” na pista, levando a maiores forças nos pneus e conseqüentemente maior estabilidade, é dada por,

$$F_{AC} = C_{AC} \cdot A_L \cdot \frac{\rho_{ar}}{2} \cdot v^2 \quad (2.87)$$

onde  $C_{AC}$  é o coeficiente de sustentação negativa, para veículos de competição,  $A_L$  representa a projeção da área lateral superior do veículo, com um valor médio para veículos tipo Fórmula 1, de  $A_L = 4,1$  m<sup>2</sup>.

A obtenção de coeficiente  $C_{AC}$  se realiza mediante testes experimentais. Na Figura 2.30 se mostra uma curva característica para um veículo de competição, na qual tem-se a dependência dos valores do coeficiente  $C_{AC}$  em função da altura da abertura do rodapé do chassi. O seu valor médio está entre 1 e 1,4, segundo a documentação especializada sobre o tema [17]. Emprega-se aqui uma média, então  $C_{AC} = 1,2$ .

Deve-se lembrar que no sistema de referência local, o eixo  $z$  positivo tem direção vertical para cima, então o valor da força aerodinâmica sempre é negativo, dado por

$$F_{AC} = -3,016 \cdot v^2 \quad (2.88)$$

Estas forças serão acrescentadas à força normal em cada pneu em igual proporção. Na realidade ela atua no centro de pressão do veículo, que se localiza, geralmente, a alguns milímetros atrás do centro de massa, mas que varia durante o funcionamento do sistema. Neste caso será apenas considerado que a força é igualmente distribuída em cada pneu.

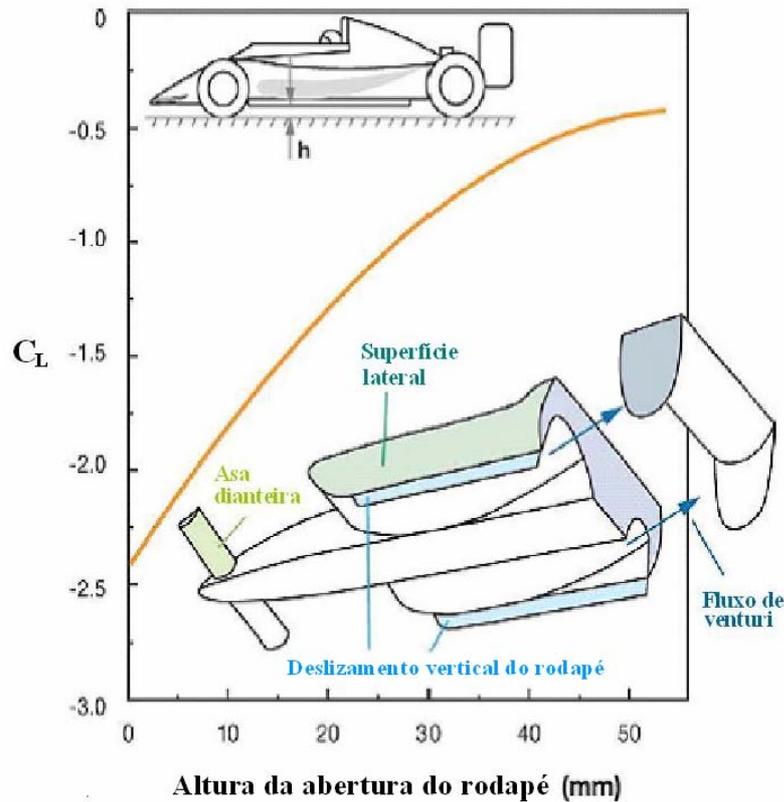


Figura 2.30. Valor médio do coeficiente de sustentação negativa. [17]

### 2.2.7 Transformação de Coordenadas

Todas as equações anteriores representam o modelo do veículo em um referencial local móvel, situado no próprio veículo, com origem no seu centro de massa, que a cada instante de tempo acompanha o veículo. Para determinar a trajetória é necessário transformar as coordenadas do modelo para um referencial global, fixo no espaço. A Figura 2.31 mostra os referenciais e variáveis envolvidos para obtenção da trajetória do veículo. A transformação de coordenadas é feita tomando as velocidades longitudinal e lateral do referencial local, e determinando as correspondentes velocidades no referencial global, dadas por

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{Y} = \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \end{cases} \quad (2.89)$$

onde  $\theta$  é obtido pela integração da velocidade de yaw. A partir das velocidades no referencial global é trivial obter a posição instantânea do centro de massa, por

integração destas variáveis. Os ângulos de *roll*, *pitch*, e *yaw* são os mesmos nos dois referenciais.

A avaliação deste modelo é bastante simples. As Figuras 2.32 a 2.34 apresentam os resultados encontrados no teste realizado no *Simulink/Matlab* empregando velocidades longitudinal, lateral e angular constantes.

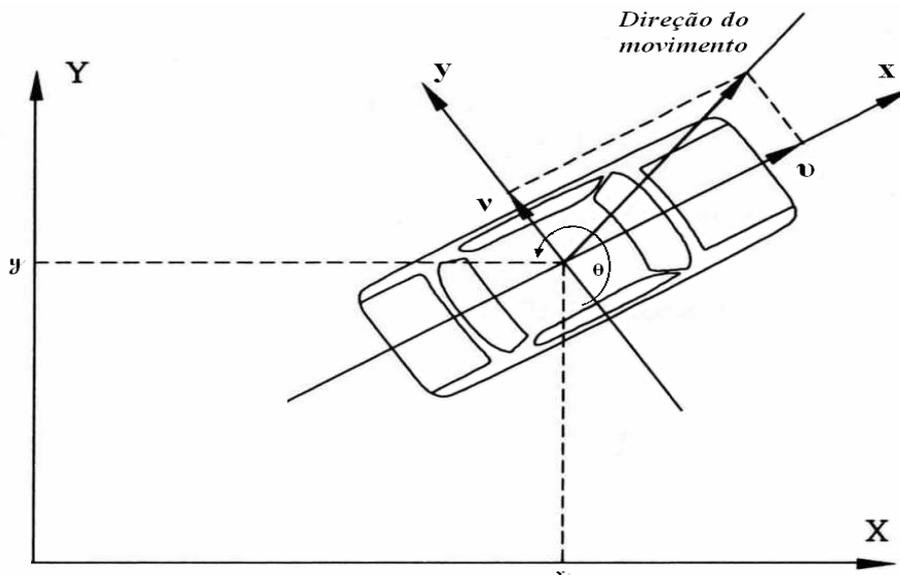


Figura 2.31. Sistemas de coordenadas local e global.

Se tanto a velocidade angular quanto a velocidade lateral são constantes, então o raio de curvatura também é constante, pelo qual se espera que a trajetória no sistema global seja uma circunferência.

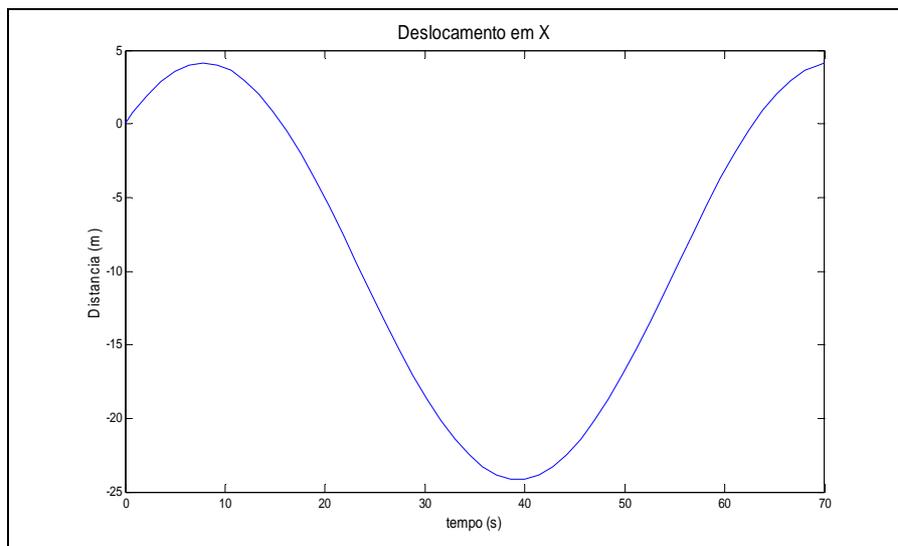


Figura 2.32. Deslocamento em *x*, teste da transformação de coordenadas.

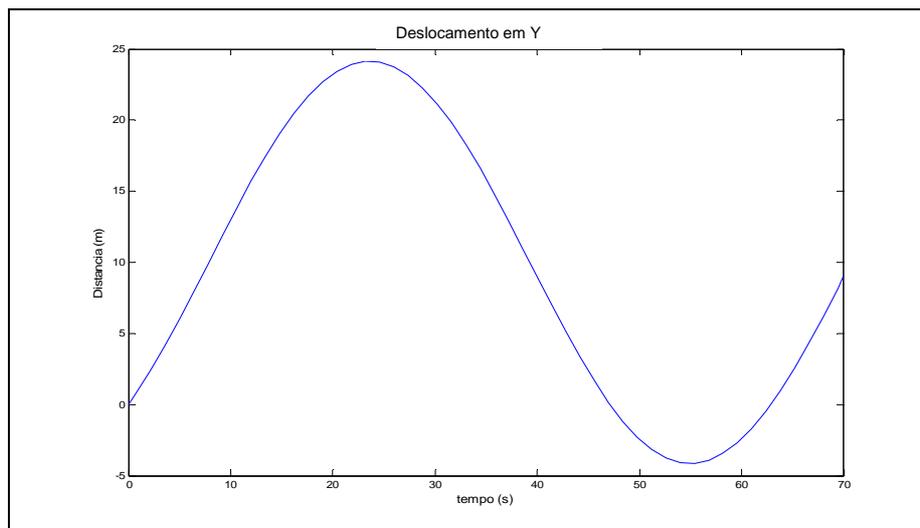


Figura 2.33. Deslocamento em y, teste da transformação de coordenadas.

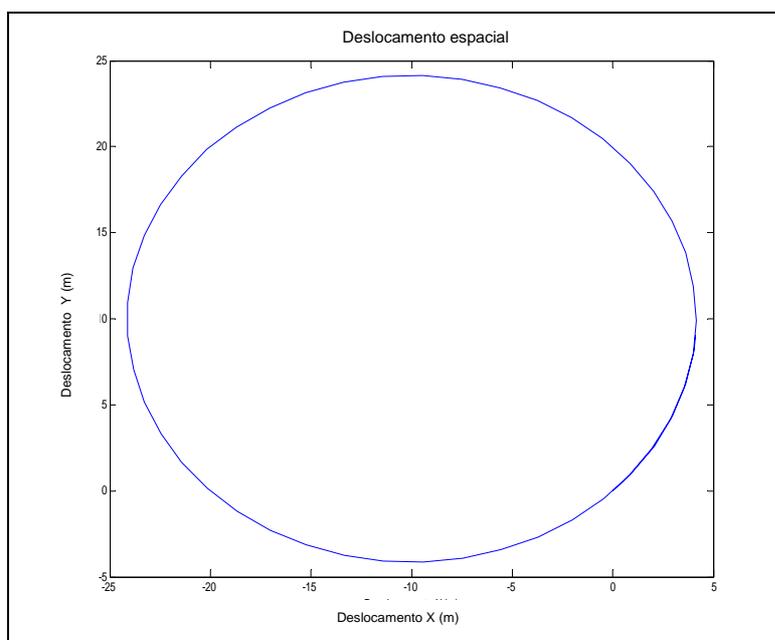


Figura 2.34. Deslocamento espacial, teste da transformação de coordenadas.

## 2.3

### Considerações sobre o modelo

Neste item discute-se a respeito dos limites do modelo desenvolvido e sobre as considerações que foram feitas para a simplificação do problema. Inicialmente pretendeu-se estabelecer um modelo que descrevesse o comportamento dinâmico do veículo de forma mais real possível, mas este é um problema muito complexo, no qual encontram-se envolvidas muitas equações de difícil estabelecimento e

resolução, envolvendo a interação de diversos subsistemas. Estas relações são normalmente não lineares, como é próprio da dinâmica veicular. Porém, em função da necessidade de aplicação do modelo se fez algumas considerações para diminuir a complexidade do tratamento matemático, resultando na representação apresentada anteriormente, e sobre a qual discute-se a seguir.

### 2.3.1 Equações de movimento

No caso aqui tratado, o modelo considera apenas a dinâmica longitudinal e a dinâmica lateral do veículo, negligenciando-se a dinâmica vertical. Esta representação é suficiente para simular um veículo de competição, percorrendo pistas planas, sem buracos ou desníveis, onde o movimento vertical é apenas afetado pela sua interação com as dinâmicas lateral e longitudinal, que é muito pequena, se comparada com os efeitos de outras fontes, tais como excitação de base, inexistentes por hipótese. Isto é, devido às dinâmicas lateral e longitudinal, quando o veículo freia ou acelera, ou faz manobras para variar a direção de seu movimento, gera-se uma aceleração vertical que é compensada pela reação dos amortecedores e molas, que são incluídos no modelo desenvolvido de forma global, mas não se tem uma representação detalhada da suspensão. Assume-se que o efeito de tais esforços no veículo é quase nulo, e portanto não é considerada no modelo a aceleração vertical do centro de gravidade, nem o movimento vertical é um grau de liberdade do sistema. Deve-se esclarecer que não está se supondo que  $\ddot{z} = 0$  e  $\dot{z} = 0$ . Sabe-se que essas variáveis não são nulas, mas assume-se que seus efeitos no movimento vertical são compensados pelos elementos da suspensão do veículo, e para os movimentos longitudinal e lateral tais efeitos são incluídos de forma global, por serem de ordem inferior aos demais.

Para a matriz de inércia do veículo se considera que esse é simétrico no plano  $xz$ , e portanto são eliminados dois produtos de inércia. Além disso, aquele em relação à  $xz$  ( $J_{xz}$ ) é muito pequeno, se comparado aos momentos de inércia. Fazendo um cálculo geométrico, pode-se chegar a um valor de 10% do menor momento de inércia do veículo, o que levaria a também desprezar este parâmetro em determinadas condições, tornando o modelo desacoplado em relação às variáveis de atitude, simplificando bastante o problema.

Os movimentos relacionados aos ângulos de *roll* e *pitch* estão descritos por um comportamento global do sistema mola-amortecedor das suspensões, empregando coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes. Por exemplo, para o movimento de *roll* tem-se os coeficientes equivalentes  $\beta_{roll}$  e  $\kappa_{roll}$ , em função dos coeficientes de rigidez e amortecimento das quatro suspensões e da geometria do veículo, representada pela bitola dianteira. O mesmo tratamento é dado para o movimento de *pitch*.

### 2.3.2 Geometria de Ackermann

Nesta parte de modelo se estabeleceu uma relação entre o ângulo do volante e os ângulos de esterçamentos dianteiros das rodas. Alguns veículos têm ângulos de esterçamento traseiro, mas estes são casos especiais. Os veículos de competição não empregam sistemas de esterçamento traseiros, utilizando apenas mecanismos que controlam os movimentos das rodas dianteiras, e portanto os ângulos de esterçamento traseiros, para o modelo veicular aqui empregado serão sempre são nulos. O projeto, e a própria construção dos sistemas de direção dos veículos em geral, normalmente se baseiam na geometria de Ackermann, e por isso a representação matemática desenvolvida adotou o mesmo princípio.

Para tratar matematicamente a geometria de Ackermann empregam-se duas funções, uma para manobras com ângulos do volante positivos e outra para negativos. Estas funções são definidas na referência [11]. Para aproximar ao máximo possível o modelo matemático da realidade, para ângulos do volante próximos a zero, existe uma folga do sistema de direção, na qual os ângulos de esterçamento das rodas são nulos, representada por um espaço morto, e também se considera nestas funções que existe um valor máximo para esses ângulos.

### 2.3.3 Ângulos de deriva

Neste modelo não se têm simplificações em particular, apenas lembra-se que a velocidade longitudinal não pode ser nula, porque caso ocorra tal condição, tem-se um denominador nulo na expressão que descreve estas variáveis, e haveria um problema na sua solução. Entretanto, também não faz qualquer sentido

analisar o comportamento direcional de um veículo para velocidades longitudinais nulas, mesmo que se esteja querendo verificar como ele acelera desde a imobilidade ou freia até parar.

#### 2.3.4

##### **Forças no plano horizontal $xy$**

As forças totais nos eixos locais  $x$  e  $y$ , respectivamente, longitudinal e lateral do veículo, são obtidas a partir da decomposição das forças laterais nos eixos longitudinal e lateral do veículo segundo os ângulos de esterçamento. O mesmo se faz com as forças de frenagem ou tração em cada pneu. A soma de todas as forças nos pneus, assim como momento total em relação ao sistema de eixos que passa pelo centro de gravidade do veículo, geram os esforços que serão aplicados, e que irão caracterizar o carregamento e conseqüentemente a dinâmica deste sistema no plano horizontal.

Deve-se entretanto levar em conta que a força máxima lateral total não pode fazer o veículo atingir uma aceleração lateral maior que  $5g$ , já que esta é a aceleração máxima que atingem os veículos de competição, do tipo Fórmula 1. Igualmente, para a força de frenagem tem-se como máximo uma desaceleração de  $5g$ , e para as forças de tração, uma aceleração máxima de cerca de  $1,5g$ . Além de estarem limitadas a estes valores, as acelerações estão vinculadas pelas características físicas dos pneumáticos e dos próprios veículos [13], [16] e [10]. As informações de aceleração lateral e longitudinal máximas são resultados de testes experimentais obtidos, por exemplo, através da telemetria, a partir da qual se mede a velocidade e aceleração do veículo em cada instante de tempo.

A vinculação entre as acelerações longitudinais e laterais é descrita de forma compacta e completa pelo Círculo de Aderência, diagrama em acelerações máximas longitudinal e lateral, positiva e negativa, na escala  $g$  (aceleração da gravidade). Para representar o comportamento das acelerações durante o percurso de um traçado utiliza-se o Diagrama GG, também na escala  $g$ , cujo limite é o Círculo de Aderência do veículo, que depende daquele de cada pneu e da sua geometria. Tais figuras, muito empregadas na dinâmica veicular, são descritas adiante.

### 2.3.5

#### Forças laterais nos pneus

A equação que representa as forças laterais nos pneus é muito complexa, dependendo de diversos fatores, tanto estáticos quanto dinâmicos. Mas seu comportamento pode ser simplificado para ângulos de deriva pequenos, sendo considerado como linear até cerca de  $8^\circ$  ou  $15^\circ$  no máximo. Entretanto os ângulos de deriva variam segundo as manobras específicas do motorista. Para os veículos de competição, tais comandos normalmente geram ângulos de deriva pequenos, devido também às suas altas velocidades, e ao fato de sempre, a princípio, haver o controle do carro por parte do piloto. Caso o veículo deslize lateralmente, gerando elevados ângulos de deriva, se configura uma condição de perda de controle ou instabilidade, que invalida o modelo aqui desenvolvido. Tal condição será o limite das análises de interesse.

No modelo em questão as análises válidas serão realizadas para ângulos de deriva menores de  $15^\circ$ , faixa na qual se considera uma relação linear entre os ângulos de deriva e a força lateral, dada pelo coeficiente de rigidez lateral  $C_\alpha$  obtido de dados experimentais publicados por empresas que realizam pesquisa nesta área da engenharia ou pelos fabricantes de pneumáticos.

### 2.3.6

#### Forças normais nos pneus e força aerodinâmica

A determinação das forças normais em cada pneu pode ser dividida em três partes: 1) força estática influenciada pela distribuição do peso do veículo segundo as distancias do centro de gravidade a cada roda; 2) a força devida à transferência de carga pelos movimentos de *roll* e *pitch*, resultado, respectivamente, das manobras de variação da trajetória, e da aceleração ou frenagem do veículo; 3) a força vertical resultado da sustentação aerodinâmica negativa (ou positiva). Para obtenção da força aerodinâmica foram empregados os dados encontrados na literatura para os veículos de competição, tipo Formula 1, que indicam uma aceleração vertical de  $5g$ , com igual distribuição em cada roda, suposta para simplificar o modelo matemático. Na realidade existe um centro de pressão, onde por hipótese se concentra a força aerodinâmica vertical sobre o veículo. Esse se localiza um pouco atrás do centro de gravidade, em relação à dianteira do veículo.

Mas considerando que ambos os pontos não são fixos, variando em função de diversas condições, utilizou-se a hipótese mais adequada possível, dentro dos objetivos da análise que se desejava realizar, ou seja a força aerodinâmica vertical se distribui de igual forma para cada roda. Observa-se que essa força depende de uma área característica do veículo e do coeficiente médio de sustentação, obtidos a partir de dados publicados na literatura [17]. Novamente lembra-se que aqui também o modelo foi calibrado para que se atinja um valor máximo de aceleração vertical de 5g, definindo valores apropriados para os parâmetros.

### 2.3.7

#### **Círculo de Aderência e Diagrama GG**

Deve-se inicialmente chamar a atenção de que o Círculo de Aderência e o Diagrama GG são dois gráficos que possibilitam avaliar o comportamento dinâmico de um veículo, que se complementam, porém são conceitualmente diferentes. O Círculo de Aderência caracteriza o limite de aderência do veículo, ou dos pneus, em determinadas condições (carga vertical ...). O Diagrama GG é uma representação das acelerações longitudinal e lateral durante o percurso de um determinado traçado em uma ou diversas voltas por um certo condutor. O limite do Diagrama GG é o Círculo de Aderência do veículo como um todo.

O Círculo de Aderência, mostrado na Figura 2.35 define o limite do desempenho de um veículo em qualquer condição de operação, fazendo manobras ou se deslocando em linha reta, no percurso de uma determinada trajetória. Geralmente se trata inicialmente do círculo de aderência dos pneus, ou de um pneu. Dada a geometria do veículo, considerando a posição dos pneus em relação ao centro de massa, todos os fatores que influenciam as forças normais sobre os pneus, a potência que chega à eles, obtém-se o gráfico correspondente para o veículo como um todo. A idéia por trás desta figura é expressar a capacidade máxima das combinações de manobras tanto para mudança da direção do veículo quanto para movimento de aceleração e frenagem. Note que o círculo de aderência na verdade não é exatamente circular. Devido à potência limitada do motor, a aceleração longitudinal positiva é, normalmente, menor que as acelerações laterais e longitudinal negativa, principalmente para veículos de competição.

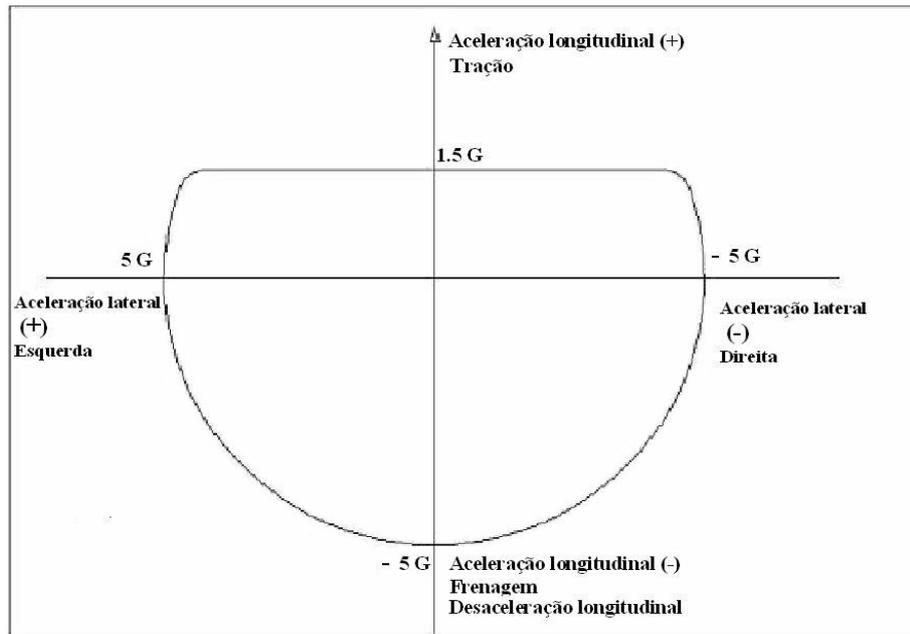


Figura 2.35. Círculo de aderência de um veículo de competição, tipo Formula 1.

Como se pode ver, tem-se neste gráfico as acelerações longitudinal e lateral máximas, determinadas basicamente pelo coeficiente de aderência na interface pneu-pista, que possui características não lineares, e depende de diversos parâmetros. Também há a influência da capacidade de transmissão de potência do motor, que por sua vez está associada a diferentes parâmetros, assim como a interferência da aerodinâmica sobre o veículo. Alguns fatores que determinam o círculo de aderência do veículo são:

- *Limite de tração*: todos os veículos têm motores de potência limitada, ou velocidade máxima de operação, o que implica na produção de forças longitudinais positivas menores que a capacidade máxima dos pneus;
- *Efeitos da transferência de carga*, ao fazer manobras de variação de direção (movimento lateral) ou de velocidade (movimento longitudinal) existem transferências de carga consideráveis, então, as forças que atuam em cada pneu se alteram, modificando as características de aderência dos pneus;
- *Efeitos da suspensão*: devido à geometria das suspensões e à vibração destes componentes, junto a outros efeitos mecânicos, por exemplo a deformação dos pneus, as direções das forças nos pneus são alteradas, e isto modifica a distribuição das cargas em cada roda;
- *Cargas Aerodinâmicas*: as forças de sustentação e arrasto têm uma significativa parcela de influência nos carregamentos vertical e longitudinal

sobre o veículo, estando associadas às acelerações que por sua vez afetam a sua capacidade máxima de variar a velocidade e direção de movimento.

Entretanto existe um limite superior, ou uma curva envoltória para todos os círculos de aderência possíveis de serem criados, em função dos diferentes fatores, que caracteriza a capacidade máxima do veículo em qualquer situação de operação. Este é o gráfico empregado e de interesse para as análises. No Diagrama GG ficam mais evidentes, como mostrado adiante, as características particulares, relativas a diferentes ajustes do veículo, ou condições específicas de uso.

Os estudos do Círculo de Aderência e do Diagrama GG tiveram início na década dos anos 50. Desde essa época se via a necessidade de relacionar, de forma concreta, as ações do condutor e a capacidade de operação do veículo, incluindo os efeitos das condições da superfície da pista sobre o sistema veicular. Tais estudos foram incrementados rapidamente até os anos 70, época na qual já se conhecia profundamente a utilização das informações contidas nestas figuras. Hoje em dia seu emprego é fundamental, principalmente para os veículos de competição, com os quais se está sempre procurando atingir o limite da sua capacidade.

A principal informação contida no Círculo de Aderência do veículo é aquela referente às limitações de estabilidade e controle direcional durante sua operação. Esta é uma importante forma de quantificar a capacidade do veículo de realizar manobras, o que deve ser bem entendido e utilizado pelo seu condutor [20]. Pode-se, deste modo, considerar algumas aplicações fundamentais: estabelecer a possibilidade de realizar uma trajetória específica, ou determinar as possíveis manobras utilizadas pelo condutor para alcançar uma trajetória considerando os limites de estabilidade, ou ainda identificar formas de melhor ajustar um veículo. Estas informações são muito usadas em veículos de competição. Lembra-se que existe uma íntima relação entre o *limite de estabilidade e o equilíbrio entre frenagem, aceleração e curvas*: durante as manobras de frenagem e aceleração limita-se o uso das forças dos pneus nas direções lateral e longitudinal simultaneamente; para a estabilidade do veículo é preciso entender e bem empregar as condições de operação das quatro rodas para obter o melhor rendimento, e conseqüentemente realizar uma manobra utilizando a capacidade máxima do veículo, sem atingir a instabilidade ou perda de controle.

O Diagrama GG por sua vez é obtido a partir dos dados experimentais (ou de resultados de simulação) de aceleração lateral e longitudinal do veículo ao percorrer uma determinada trajetória, durante uma ou mais voltas em um traçado ou pista. A Figura 2.36 mostra este gráfico, no qual se têm representadas, basicamente, as características de emprego de um veículo por um determinado piloto em uma certa condição específica de uso. Nota-se que o Diagrama GG depende muito do ser humano que comanda o veículo, e o seu limite é o Círculo de Aderência, devendo estar sendo dentro da região estabelecida pelas características limítrofes da capacidade do veículo. Na Figura 2.36 o condutor em questão ultrapassou algumas vezes este limite, o que certamente levou o veículo a uma condição de deslizamento, pelo menos momentânea, que poderia implicar em perda de estabilidade e conseqüentemente controle direcional, caso ele não reduzisse a velocidade nestes instantes ou realizasse alguma manobra adequada, fazendo o veículo retornar à região admissível. O emprego das informações contidas no Diagrama GG possibilita melhorar as condições de uso do veículo, comparar diferentes condutores e formas de condução, entre outras.

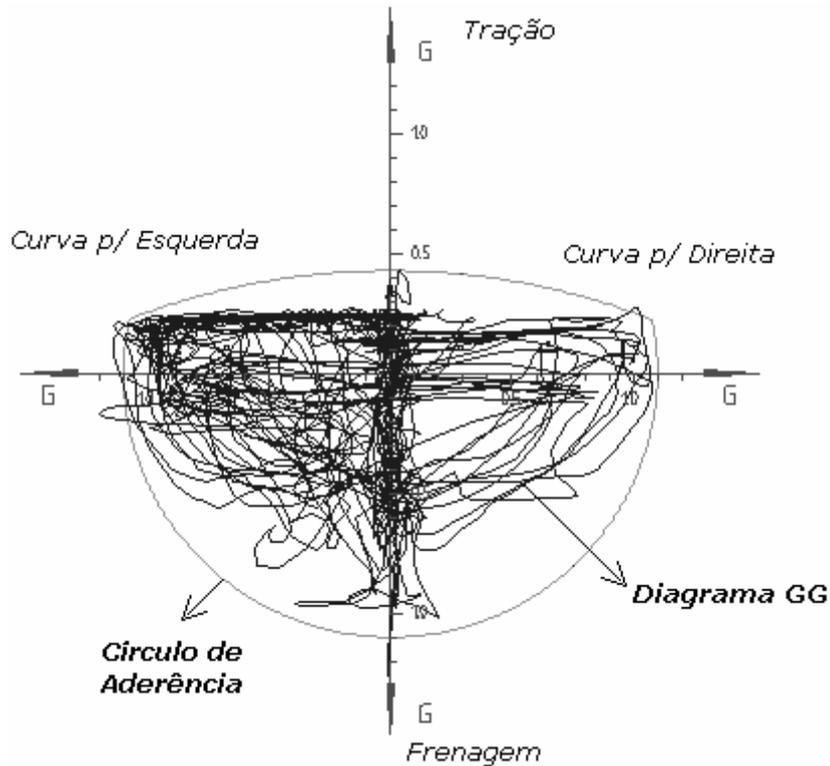


Figura 2.36. Diagrama GG de um veículo percorrendo uma trajetória.

## 2.4

### Modelo completo e implementação em *Simulink/Matlab*

Reapresentam-se a seguir todas as expressões desenvolvidas para o modelo do veículo, e a organização dada em termos dos blocos representativos de cada componente e as conexões entre eles, como inicialmente mostrado na Figura 2.5, incluindo a implementação em *Simulink/Matlab*.

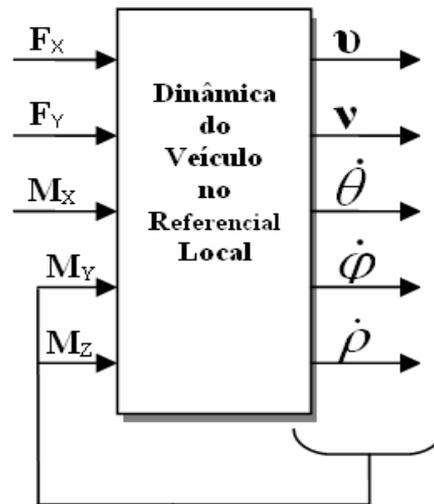


Figura 2.37. Relação entrada-saída para a dinâmica do veículo no referencial local.

A dinâmica do veículo, representada pela relação entrada-saída da Figura 2.37, é descrita pelas equações de movimento, dadas pelas Equações 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.32, 2.36 e 2.40,

$$\sum F_x = m_{tot} \ddot{x} - m_{tot} \dot{y} \dot{\theta} - m_s h_{sp} \ddot{\rho}$$

$$\sum F_y = m_{tot} \ddot{y} - m_s h_{sr} \ddot{\phi} + m_{tot} \dot{x} \dot{\theta}$$

$$a_x = \ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}$$

$$a_y = \ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}$$

$$\sum M_z = I_{yaw} \ddot{\theta} + I_{xz} (\ddot{\phi} - \dot{\rho} \dot{\theta}) - I_{roll} \dot{\rho} \dot{\phi} + I_{pitch} \dot{\phi} \dot{\rho}$$

$$I_{roll} \ddot{\phi} + I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\phi}) - I_{pitch} \dot{\theta} \dot{\rho} + I_{yaw} \dot{\rho} \dot{\theta} + \beta_{roll} \dot{\phi} + \kappa_{roll} \phi = m_s g h_{sr} \text{sen} \phi + m_s (\ddot{y} + \dot{x} \dot{\theta}) h_{sr} \cos \phi$$

$$I_{pitch} \ddot{\rho} + I_{xz} (\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2) - I_{yaw} \dot{\theta} \dot{\phi} + I_{roll} \dot{\phi} \dot{\theta} + \beta_{pitch} \dot{\rho} + \kappa_{pitch} \rho = m_s g h_{sp} \text{sen} \rho - m_s (\ddot{x} - \dot{y} \dot{\theta}) h_{sp} \cos \rho$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao

esquema da Figura 2.38.

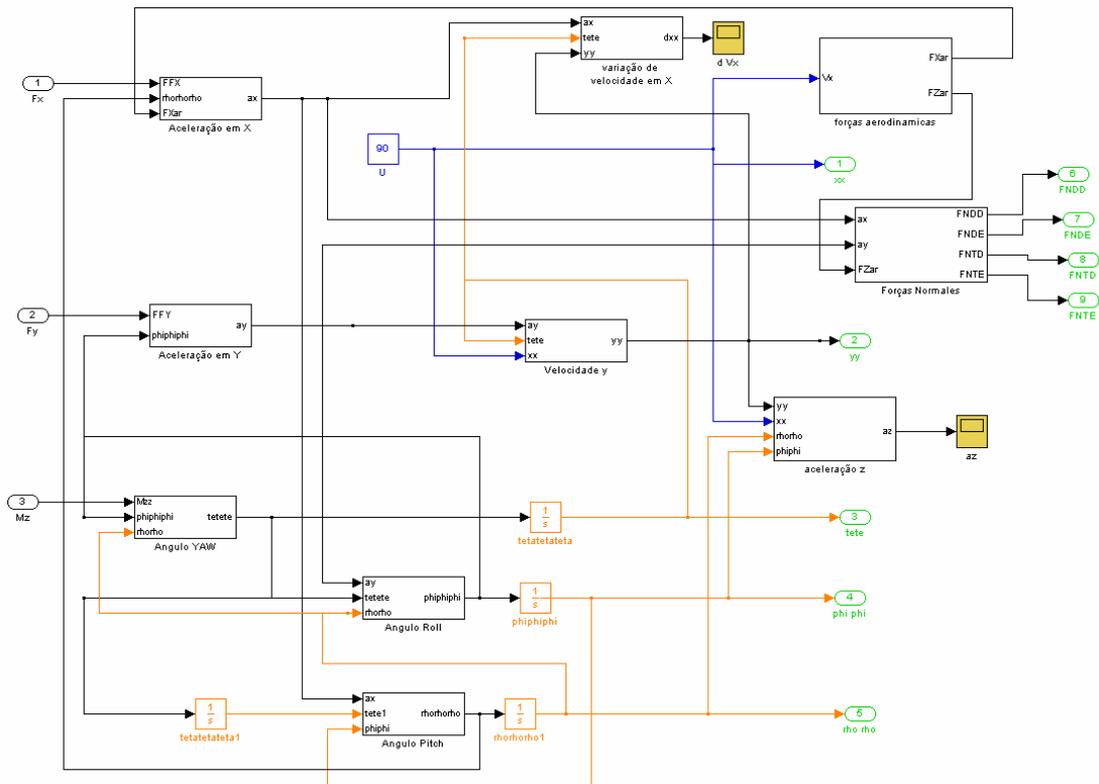


Figura 2.38. Dinâmica do veículo representada em *Simulink/Matlab*.

A caixa de direção e a geometria de Ackermann, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.39, é descrita pela Equação 2.41,

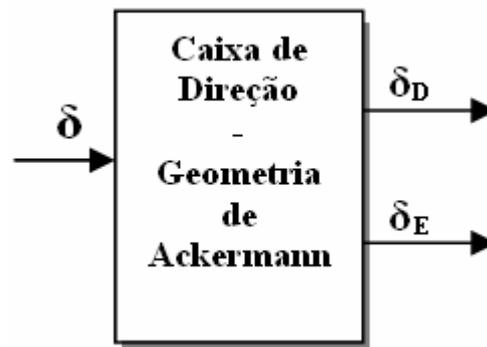


Figura 2.39. Relação entrada-saída para a caixa de direção e geometria de Ackermann.

$$\text{Para } \delta < -f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_D = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_D)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_E = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right.$$

$$\text{Para } \delta > f_d \left\{ \begin{array}{l} \delta_E = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\text{tg}(\delta_E)} + \frac{b_d}{2} \\ \delta_D = \text{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R + b_d/2}\right) \end{array} \right.$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.40.

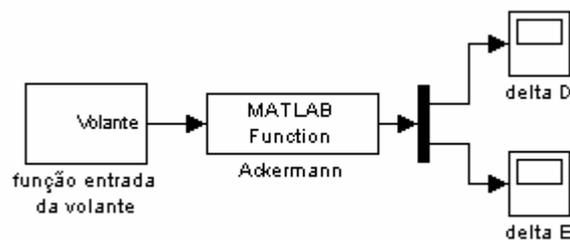


Figura 2.40. Caixa de direção e geometria de Ackermann representadas em *Simulink/Matlab*.

Os ângulos de deriva, representados pela relação entrada-saída da Figura 2.41, são definidos para cada roda pelas Equações 2.42, 2.43, 2.44 e 2.45,

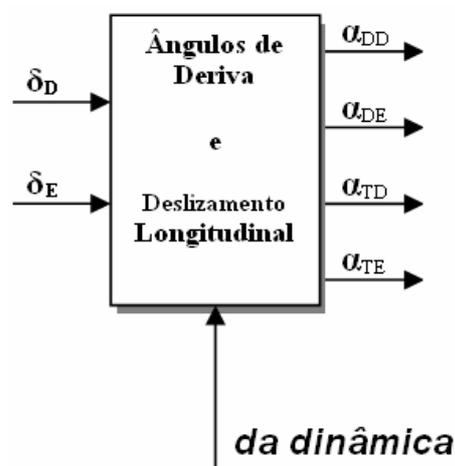


Figura 2.41. Relação entrada-saída para os ângulos de deriva.

$$\alpha_{DD} = \delta_D - tg^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{DE} = \delta_E - tg^{-1} \left( \frac{\dot{y} + a\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_f}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{TD} = tg^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} + \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right)$$

$$\alpha_{TE} = tg^{-1} \left( \frac{-\dot{y} + b\dot{\theta}}{\dot{x} - \frac{t_r}{2}\dot{\theta}} \right)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.42.

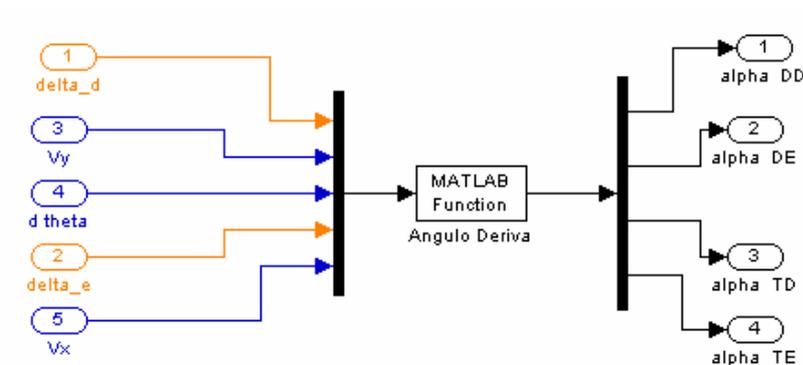


Figura 2.42: Ângulos de deriva representados em *Simulink/Matlab*.

As forças laterais nos pneus, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.43, na forma linearizada para ângulos de deriva até  $8^\circ$ , são dadas pelas Equações 2.49, 2.50, 2.51 e 2.52,

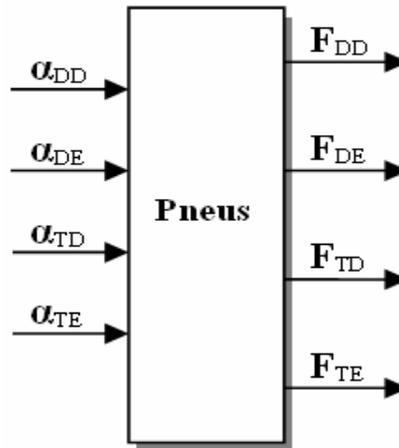


Figura 2.43: Relação entrada-saída para as forças laterais.

$$L_{DD} = C_{DD} \cdot \alpha_{DD}$$

$$L_{DE} = C_{DE} \cdot \alpha_{DE}$$

$$L_{TD} = C_{TD} \cdot \alpha_{TD}$$

$$L_{TE} = C_{TE} \cdot \alpha_{TE}$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.44.

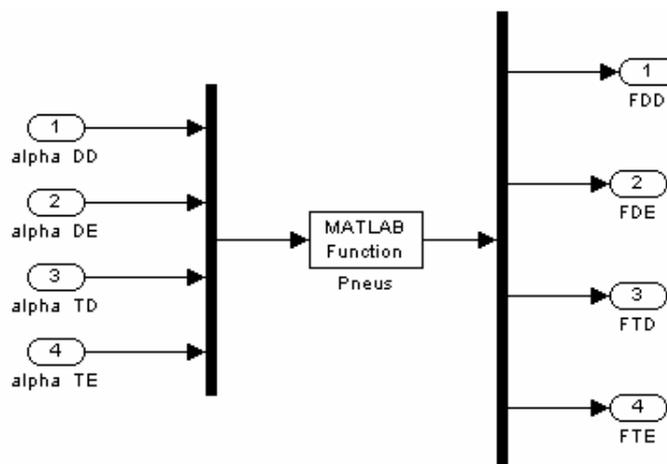


Figura 2.44. Forças laterais representadas em *Simulink/Matlab*.

Os esforços externos aplicados ao veículo em função da sua geometria, a partir dos pneumáticos, representados pela relação entrada-saída da Figura 2.45, não considerando as forças longitudinais – tração e frenagem, ou seja para

velocidade constante, são descritos pelas Equações 2.90, 2.91, 2.92, 2.93, 2.94, 2.95 e 2.96,

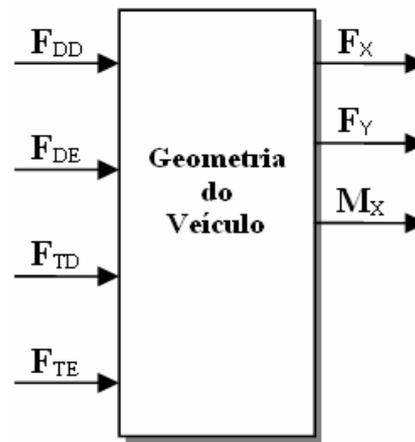


Figura 2.45. Relação entrada-saída para as forças e momentos aplicados ao veículo.

$$F_x = -(L_{DE} \text{sen} \delta_{jE} + L_{DD} \text{sen} \delta_{jD}) \quad (2.90)$$

$$F_y = L_{DE} \cos \delta_{jE} + L_{DD} \cos \delta_{jD} + L_{TE} + L_{TD} \quad (2.91)$$

$$M_{DD} = +aL_{DD} \cos \delta_{jD} - \frac{t_f}{2} L_{DD} \text{sen} \delta_{jD} \quad (2.92)$$

$$M_{DE} = +aL_{DE} \cos \delta_{jE} + \frac{t_f}{2} L_{DE} \text{sen} \delta_{jE} \quad (2.93)$$

$$M_{TE} = -bL_{TE} \quad (2.94)$$

$$M_{TD} = -bL_{TD} \quad (2.95)$$

$$M_z = M_{DE} + M_{DD} + M_{TE} + M_{TD} \quad (2.96)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.46.

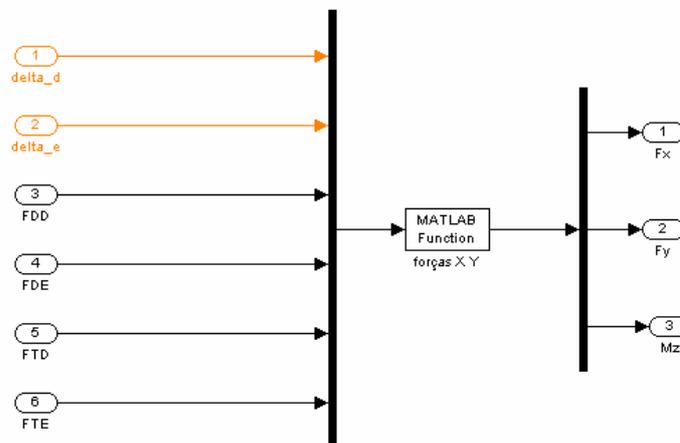


Figura 2.46. Esforços aplicados ao veículo representados em *Simulink/Matlab*.

As forças normais, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.47, já considerando as forças de sustentação aerodinâmica acrescidas às Equações 2.97, 2.98, 2.99 e 2.100, são dadas por



Figura 2.47. Relação entrada-saída para as forças normais.

$$F_{NDD} = F_{rf} + F_{hf} + F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.97)$$

$$F_{NDE} = -F_{rf} - F_{hf} - F_{uf} - \frac{1}{2}F_{bf} + \frac{1}{2}F_{Nsf} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.98)$$

$$F_{NTD} = F_{rr} + F_{hr} + F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.99)$$

$$F_{NTE} = -F_{rr} - F_{hr} - F_{ur} - \frac{1}{2}F_{br} + \frac{1}{2}F_{Nsr} + \frac{1}{4}F_{AC} \quad (2.100)$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.48.

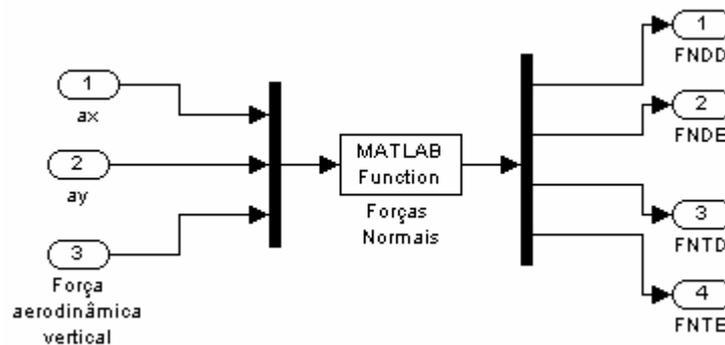


Figura 2.48. Forças normais aplicadas aos pneus representadas em *Simulink/Matlab*.

A transformação de coordenadas do referencial local para o global, representadas pela relação entrada-saída da Figura 2.49, é descrita pela Equação 2.89,

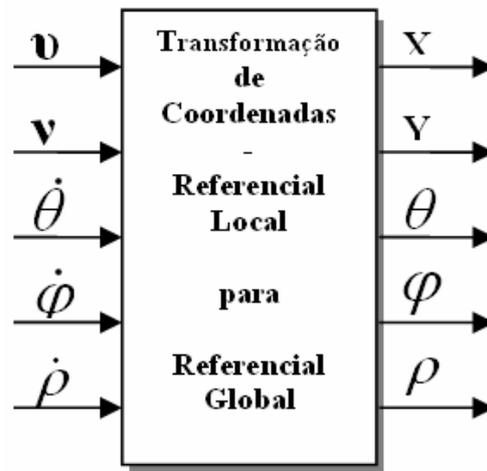


Figura 2.49. Relação entrada-saída para a transformação de coordenadas.

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{Y} = \dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta \end{cases}$$

que organizadas em termos do diagrama de blocos *Simulink/Matlab* levam ao esquema da Figura 2.50.

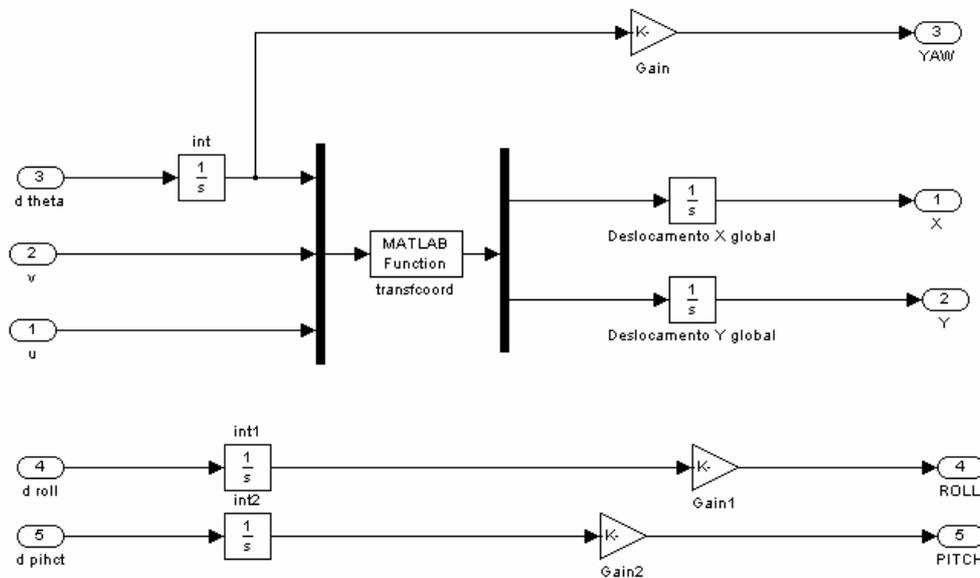


Figura 2.50. Transformação de coordenadas representada em *Simulink/Matlab*

A Figura 2.51 mostra o modelo completo do veículo para análise da dinâmica longitudinal e lateral no ambiente *Simulink/Matlab*, definido pelos blocos anteriormente descritos, segundo os diversos componentes ou elementos fundamentais.

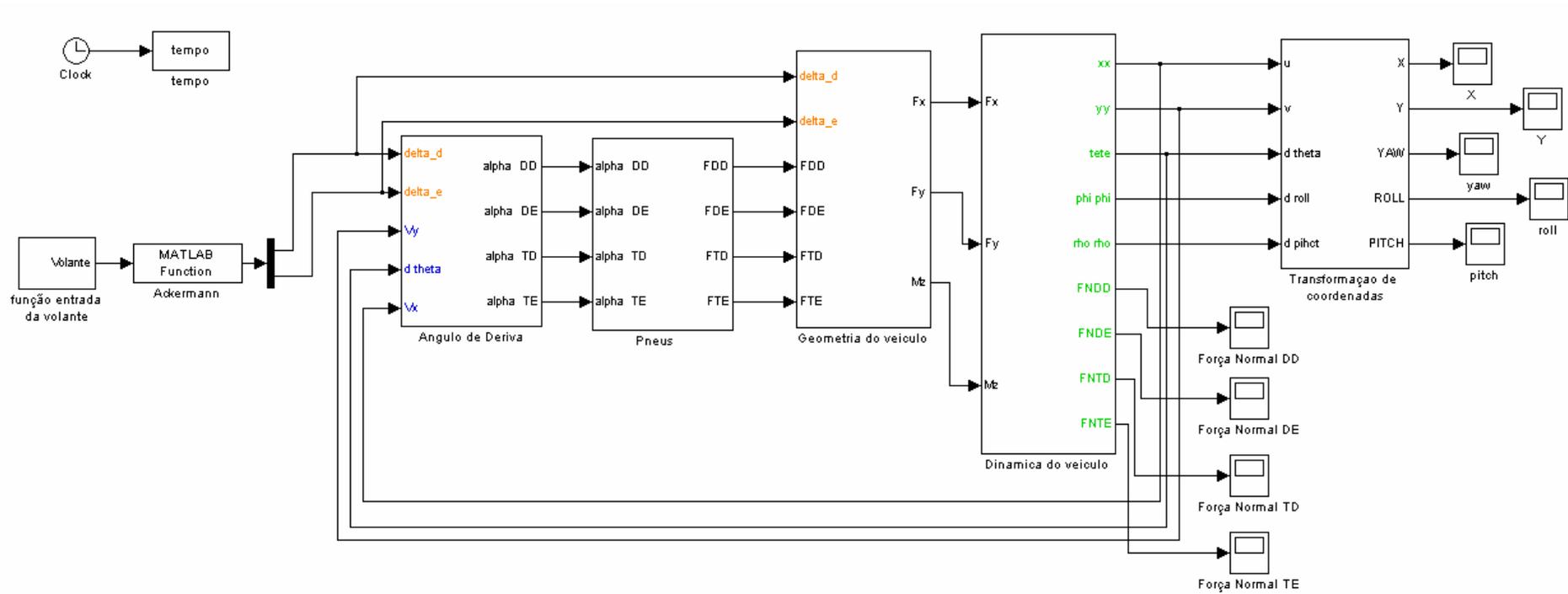


Figura 2.51. Diagrama de blocos feito no *Simulink/Matlab*.

O primeiro bloco na Figura 2.51 fornece a função de entrada, o ângulo da volante do veículo, no tempo. As duas variáveis de entrada do modelo são o ângulo do volante e a velocidade longitudinal do veículo, apenas suposta constante. Para alterar a velocidade basta mudar uma constante chamada como  $u$ , que se encontra dentro do bloco da aceleração. As saídas do modelo são os três ângulos de rotação *yaw*, *roll* e *pitch*, e as duas posições  $x$  e  $y$  no tempo.

## 2.5 Simulação e avaliação do modelo completo

Para a avaliação do modelo foram realizadas três simulações ou manobras do veículo, uma das quais já utilizada em [13], que servirá para comparação de resultados; outra para analisar o desempenho do veículo em uma situação mais realista; e uma terceira para verificar as suas características de comportamento em condições menos severas.

Realizando uma pesquisa na literatura técnica e científica da área veicular foi possível obter os principais parâmetros geométricos e físicos genéricos de um carro de competição, tipo Fórmula 1, que são apresentados na Tabela 3 [14], [15], [16]. Todas as simulações de aqui em diante serão feitas tomando em conta os parâmetros da tabela 3, é dizer, para um carro de corridas.

A comparação do comportamento do modelo veicular será apenas para manobras iguais do motorista, então, para funções do volante do veículo iguais nos modelos: modelo linear em [13] e o modelo não linear desenvolvido nesta dissertação, desde que os parâmetros geométricos e físicos sejam diferentes.

Em [13] foi utilizado um modelo linear para o veículo, com velocidade constante, e uma entrada que é a soma de funções degrau unitário, um tanto drástica e não muito real, mas suficiente para avaliação do modelo. A outra entrada será um movimento mais suave do volante, utilizando uma função *seno* para representar o comando dado. De modo a poder comparar os resultados emprega-se a mesma velocidade de 18,3 m/s (66 km/h) adotada em [13]. A Figura 2.52 mostra os ângulos do volante e de esterçamento das rodas para o teste comparativo. Note a pequena diferença que existe entre essas variáveis para os lados: direito e esquerdo.

Tabela 3. Parâmetros construtivos de um veículo de Fórmula 1.

Parâmetro	Símbolo Unidade	Valor
Distancia entre eixos	$l$ [m]	3,10
Distancia do eixo dianteiro ao CG	$l_d$ [m]	1,64
Distancia do eixo traseiro ao CG	$l_t$ [m]	1,46
Bitola dianteira	$t_f, b_d$ [m]	1,4
Bitola traseira	$t_r, b_t$ [m]	1,4
Massa total	$m_{tot}$ [kg]	605
Massa suspensa	$m_s$ [kg]	520
Massa não suspensa dianteira	$m_{uf}$ [kg]	40
Massa não suspensa traseira	$m_{ur}$ [kg]	45
Momento de inércia <i>YAW</i>	$I_{yaw}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	558
Momento de inércia <i>PITCH</i>	$I_{pitch}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	333
Momento de inércia <i>ROLL</i>	$I_{roll}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	47
Produto de inércia <i>xz</i>	$I_{xz}$ [kg-m <sup>2</sup> ]	4
Altura entre o CG e o centro de rolagem	$h_{sr}$ [m]	0.22
Altura entre o CG e o centro mov. pitch	$h_{sp}$ [m]	0.22
Coeficiente de rigidez das 4 suspensões	$K_f, K_r$ [KN/m]	225
Coef. de amortecimento 4 suspensões	$B_f, B_r$ [N/m/s]	7300

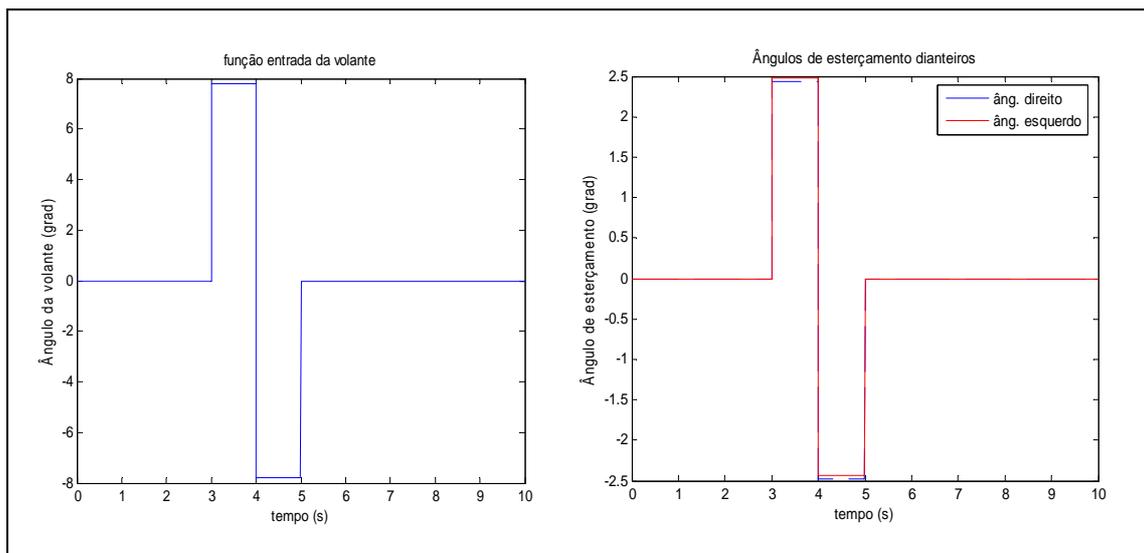


Figura 2.52. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

Das diversas variáveis associadas ao modelo empregado, escolheu-se apenas algumas de maior relevância para a análise comparativa com os resultados encontrados em [13]. As Figuras 2.52 a 2.56 apresentam estas variáveis. Os ângulos de deriva (Figura 2.53) se mantêm na faixa linear, suposta até  $8^\circ$ , o que comparativamente, em relação a [13], mostra a validade da hipótese assumida naquele trabalho, uma vez que o modelo linear foi adotado.

A velocidade lateral do veículo (Figura 2.54) apresenta a mesma tendência daquela mostrada em [13], mas os valores máximos são muito diferentes. Para o modelo não linear aqui desenvolvido o valor máximo é 0,2 m/s, com uma função que quase reproduz o comportamento da entrada, com patamares constante, e em [13] esse valor é de 1 m/s, com uma função crescente e decrescente, tipo rampa, com elevado coeficiente angular. Esta diferença pode ser atribuída ao modelo aqui adotado para representar a dinâmica do veículo, mais detalhado e realista em comparação ao modelo mais simples e limitado.

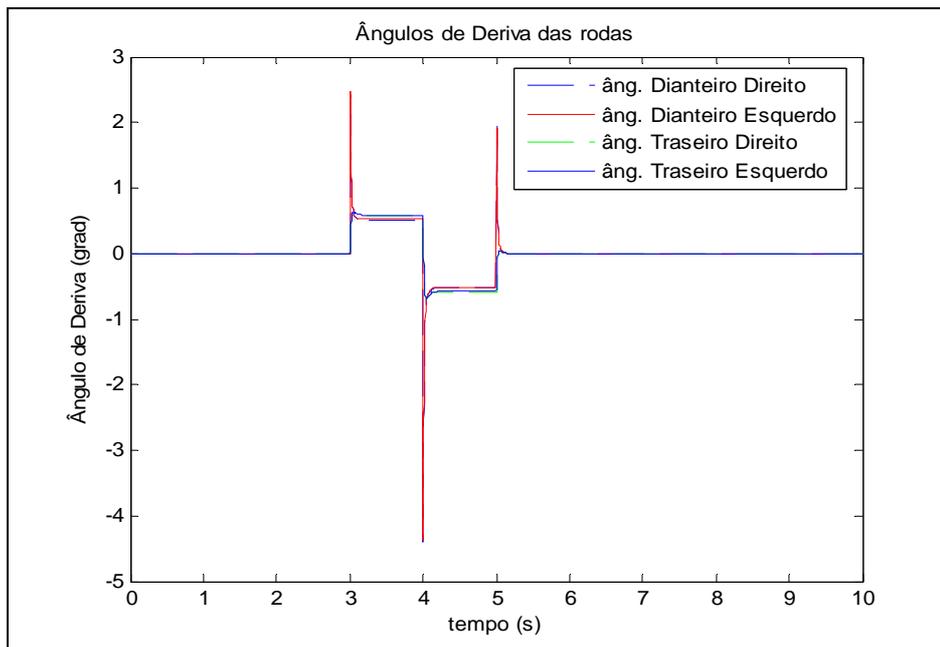


Figura 2.53. Ângulos de deriva no tempo.

O comportamento do ângulo *yaw* (Figura 2.55) é muito similar ao obtido em [13], com valor máximo, tanto para o modelo aqui descrito quanto para o empregado no trabalho anterior e o mesmo de 0,24 rad. Os comportamentos dos ângulos de *roll* e *pitch* (Figura 2.55) são aqueles esperados: quando o veículo gira para a esquerda, se inclina para a direita, levando inicialmente a um ângulo de *roll*

positivo, e depois vice-versa; e como o veículo está com velocidade constante, o ângulo de *pitch* é quase constante, mas devido aos acoplamentos típicos da dinâmica no referencial local, há uma pequena alteração nesta variável. Não se comparam estes resultados com aqueles obtidos em [13], pois o modelo então empregado não incluía tais variáveis. Elas estão aqui mostradas visando ilustrar a consistência da representação desenvolvida.

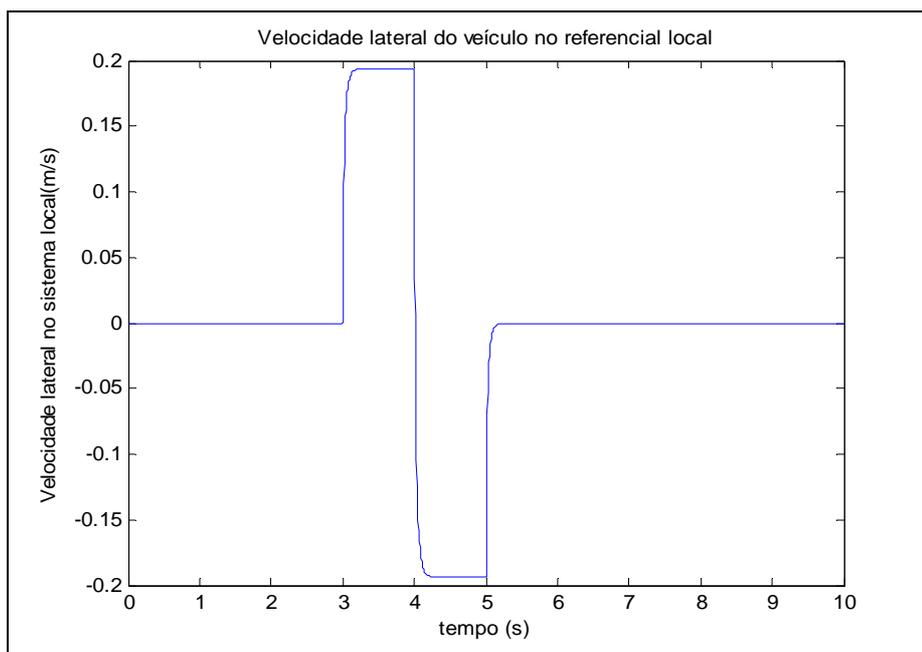


Figura 2.54. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

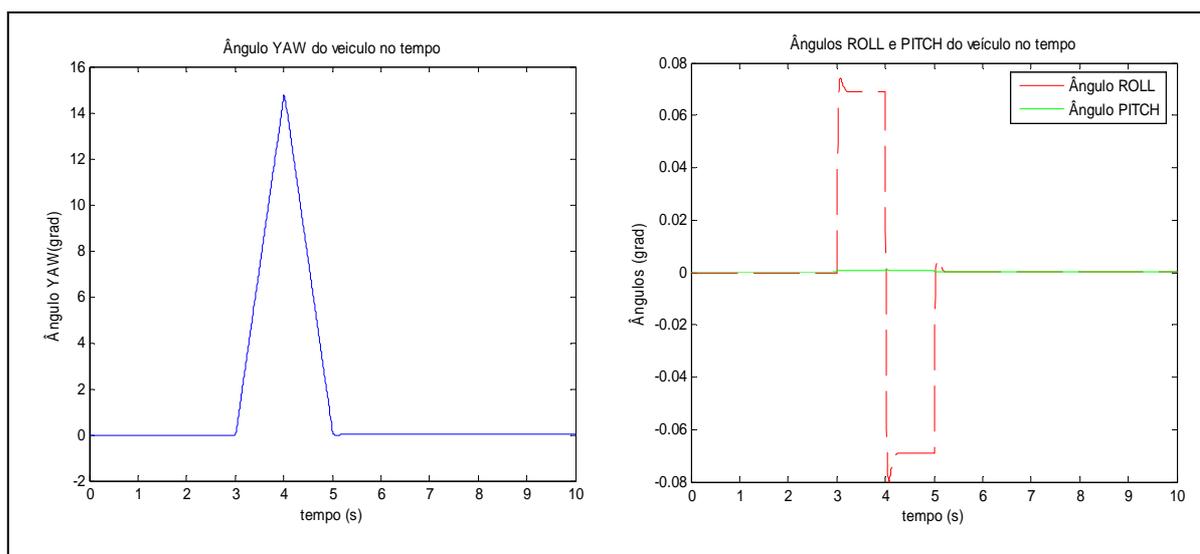


Figura 2.55. Ângulo yaw e ângulos roll e pitch no tempo.

O deslocamento lateral do veículo (Figura 2.56) é muito similar (5,8 m) ao obtido em [13], com uma diferença de um metro aproximadamente. Novamente credita-se essa diferença ao modelo dinâmico aqui desenvolvido que possui muitas características que no modelo linear são desprezadas, quando são assumidas hipóteses simplificadoras. Entretanto, em termos gerais, tem-se o mesmo comportamento que o apresentado em [13], considerando portanto que os resultados encontrados são satisfatórios e que o modelo desenvolvido é confiável e está correto.

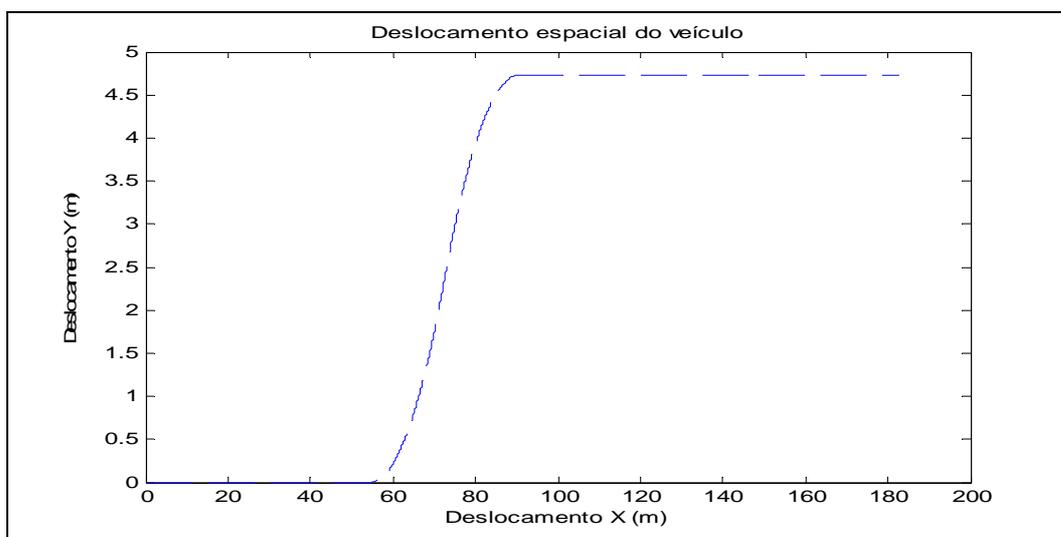


Figura 2.56. Deslocamento do veículo.

Agora realiza-se basicamente a mesma manobra, mas com uma função mais suave, utilizando um seno para descrever o comando no volante, com o dobro do tempo para o movimento, como apresentado na Figura 2.57, juntamente com os ângulos de esterçamento das rodas. Note, novamente, a pequena diferença entre essas variáveis para o lado esquerdo e direito.

Na Figura 2.59 tem-se a velocidade lateral do veículo, a qual possui uma tendência próxima a mostrada em [13], mais ainda com diferença na velocidade máxima. De mesmo modo tem-se um comportamento de forma e amplitudes semelhantes para os ângulos de atitude de veículo (Figura 2.60), diferindo apenas no tempo, uma vez que a manobra agora é feita mais lentamente. O deslocamento do veículo (trajetória do centro de massa) no plano  $XY$  (Figura 2.61) é similar àquele encontrado anteriormente.

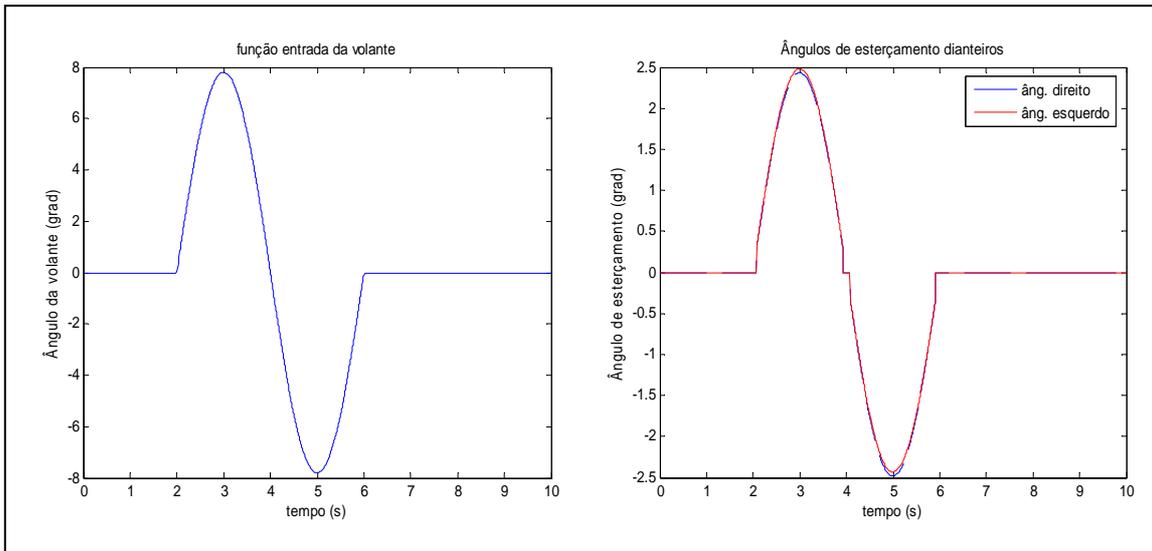


Figura 2.57. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

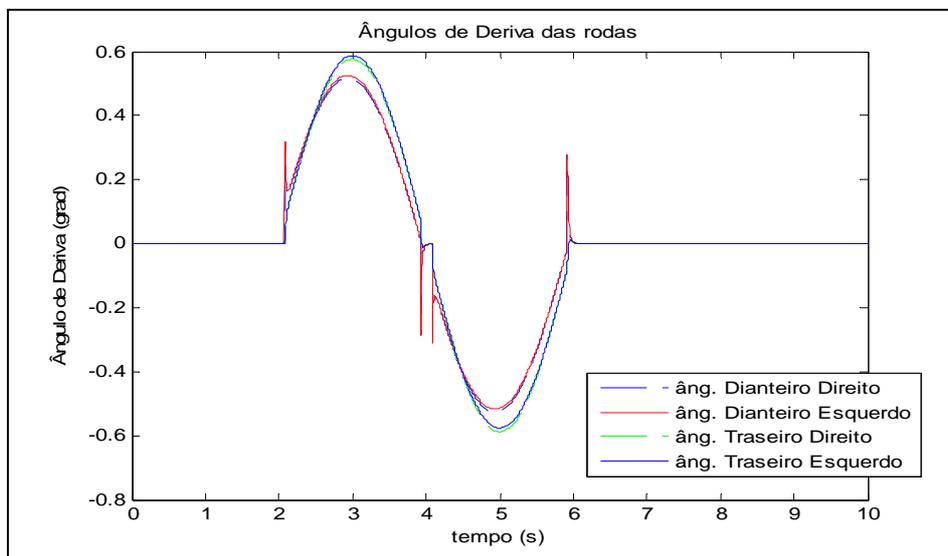


Figura 2.58. Ângulos de deriva no tempo.

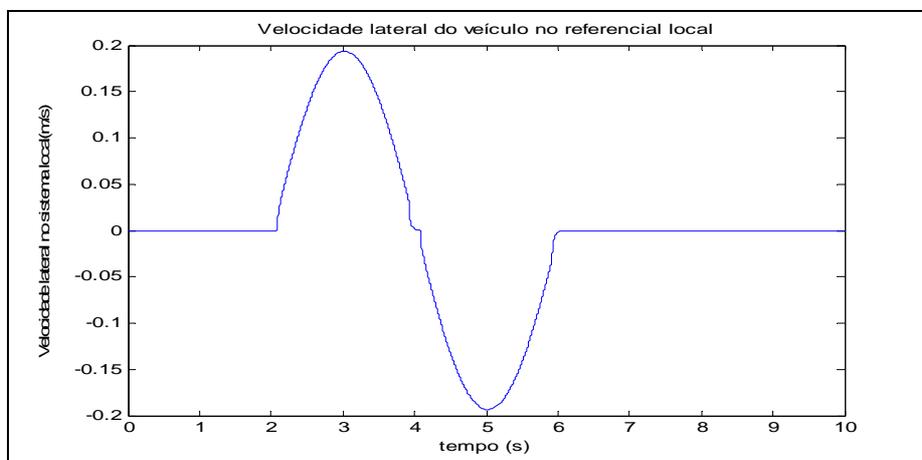


Figura 2.59. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

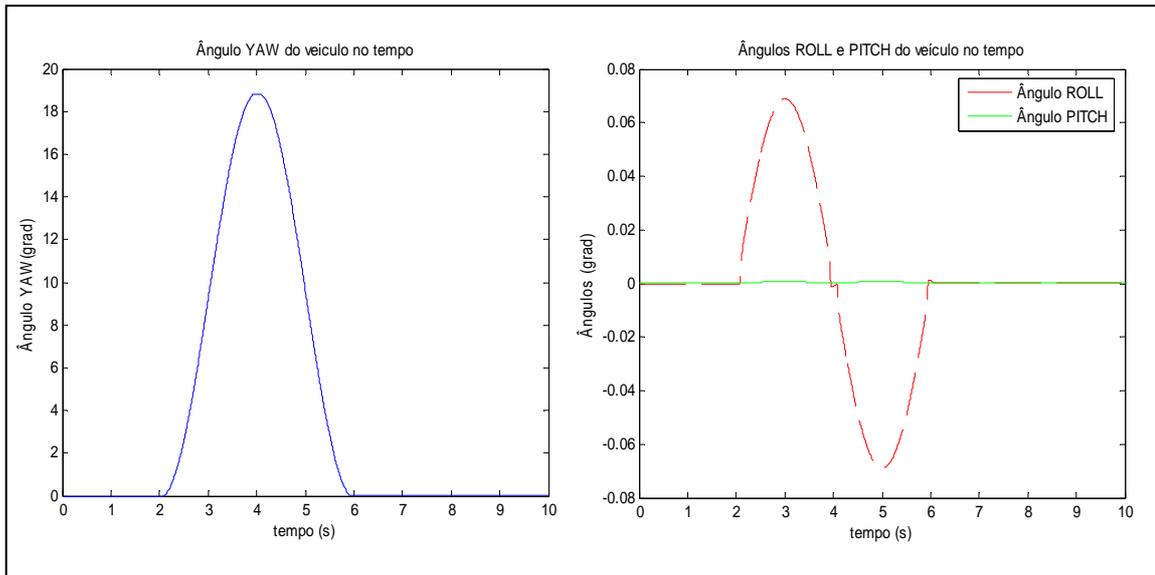


Figura 2.60. Ângulo yaw e ângulos roll e pitch no tempo.

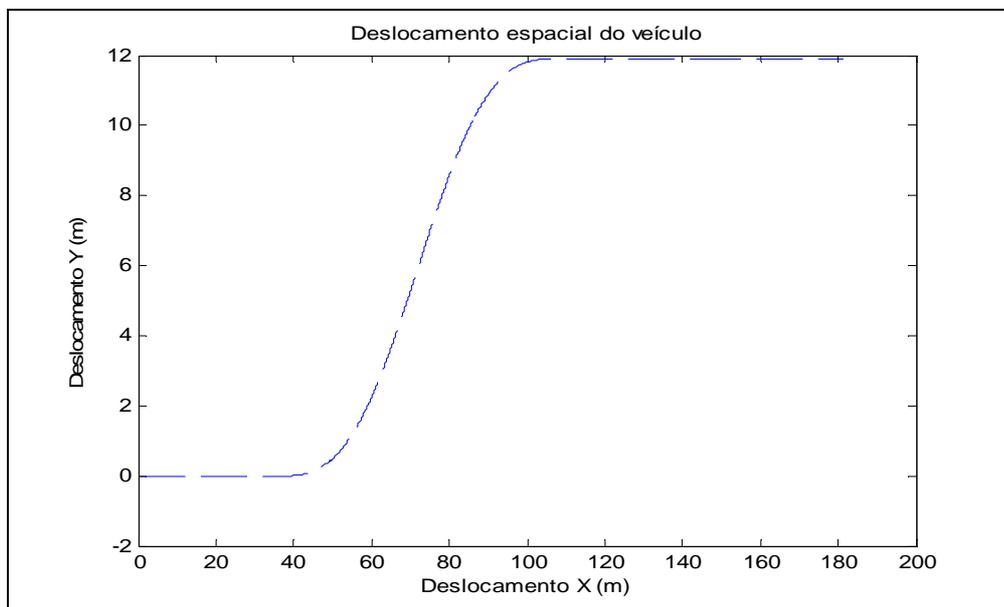


Figura 2.61. Deslocamento do veículo.

Agora realiza-se uma simulação para avaliar o modelo do veículo em uma condição menos severa, a velocidade de 90 km/h, com uma manobra lenta de transição, com duração de 4 segundos, para passar de um ângulo do volante de  $0^\circ$  a outro final de  $15,6^\circ$  que é mantido constante, levando o veículo a percorrer uma trajetória circular fechada em regime permanente. A Figura 2.62 mostra o sinal de entrada no volante e os ângulos de esterçamento das rodas. O movimento é para a esquerda, então o ângulo de esterçamento dianteiro esquerdo é maior. À medida

que o ângulo do volante aumenta, a diferença dos ângulos de esterçamento se torna maior.

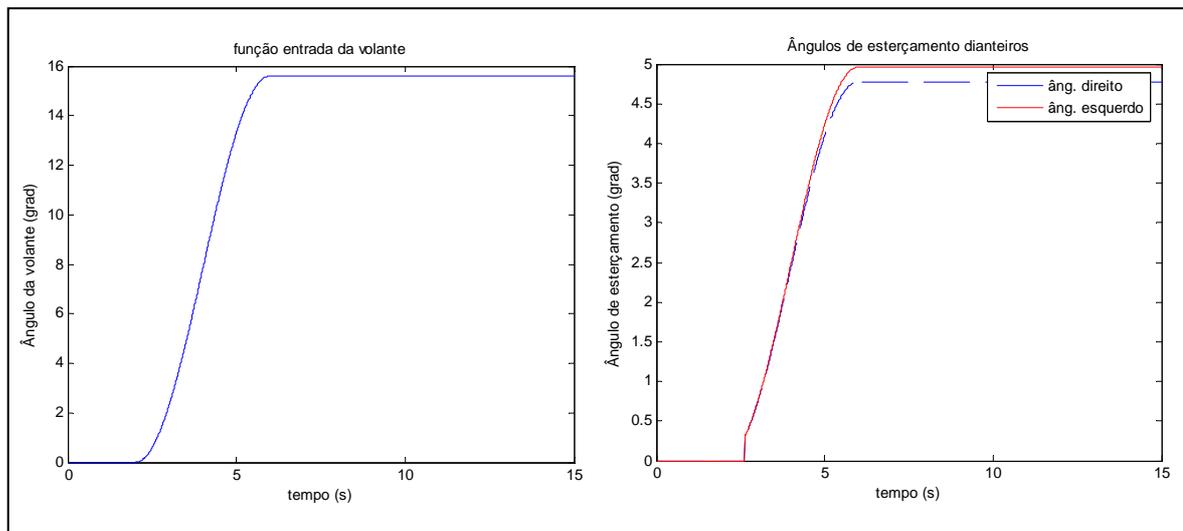


Figura 2.62. Função entrada da volante e os valores dos ângulos de esterçamento.

Na Figura 2.63 são mostrados os ângulos de deriva dos quatro pneus. Pode se ver que os ângulos traseiros são maiores que os dianteiros, indicando uma característica SUB OU SOBRE-esterçante [16], [20]. Isso pode variar de acordo com parâmetros estabelecidos, como velocidade por exemplo. O fato de haver diferença entre os ângulos de deriva de cada pneu, o que está relacionado também a diferentes forças laterais, e conseqüentemente com diferenças entres os momentos por elas produzidos, pelo menos durante o transiente do sistema, está associado à estabilidade do veículo.

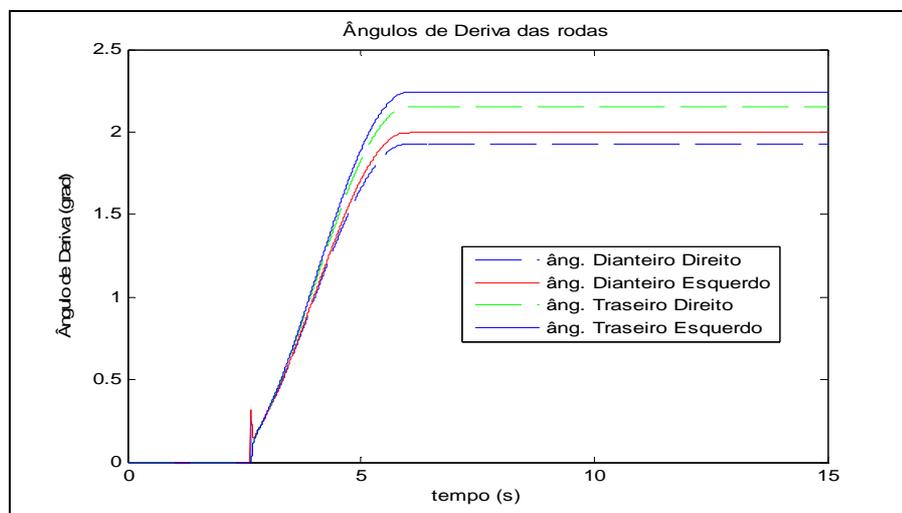


Figura 2.63. Ângulos de deriva no tempo.

A velocidade lateral no referencial local (Figura 2.64) é positiva já que o veículo faz uma manobra para a esquerda - eixo  $y$  positivo. Os três ângulos de atitude do veículo nestas condições são apresentados na Figura 2.65. O resultado foi o esperado: o ângulo *yaw* sempre tende a crescer, uma vez que o veículo passa a se deslocar em uma circunferência. O ângulo de *roll* é positivo, já que o veículo se inclina para a direita, pela força lateral aplicada aos pneus. E o ângulo de *pitch* tende a crescer um pouco, indicando que o veículo tem alguma inclinação para frente.

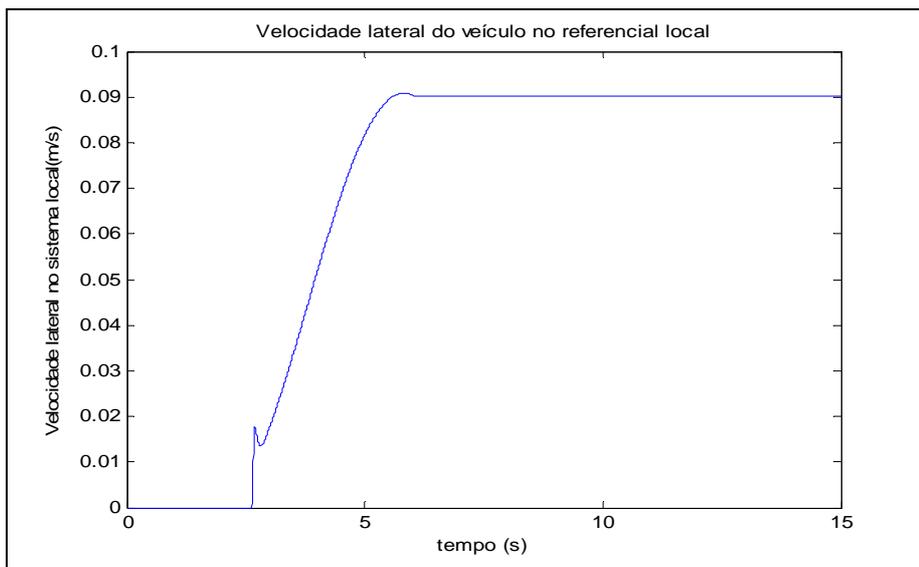


Figura 2.64. Velocidade lateral no referencial local no tempo.

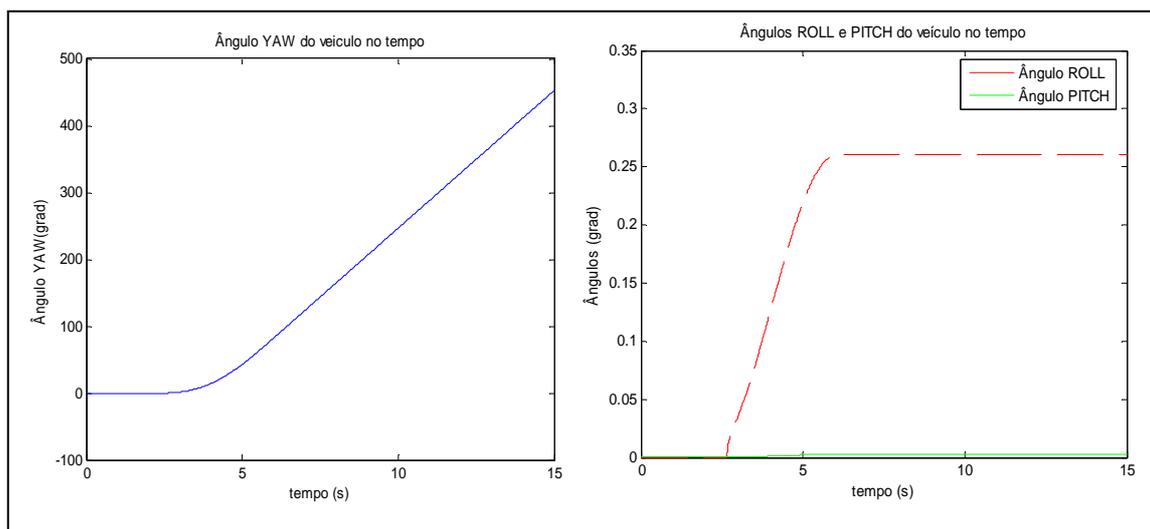


Figura 2.65. Ângulo *yaw* e ângulos *roll* e *pitch* no tempo.

Na Figura 2.66 tem-se o deslocamento do veículo, que apresenta um comportamento completamente lógico: ao se manter o ângulo do volante

constante, a trajetória é uma circunferência de raio constante, que irá variar para velocidades diferentes. Com este resultado considerou-se o modelo para velocidades constantes validado.

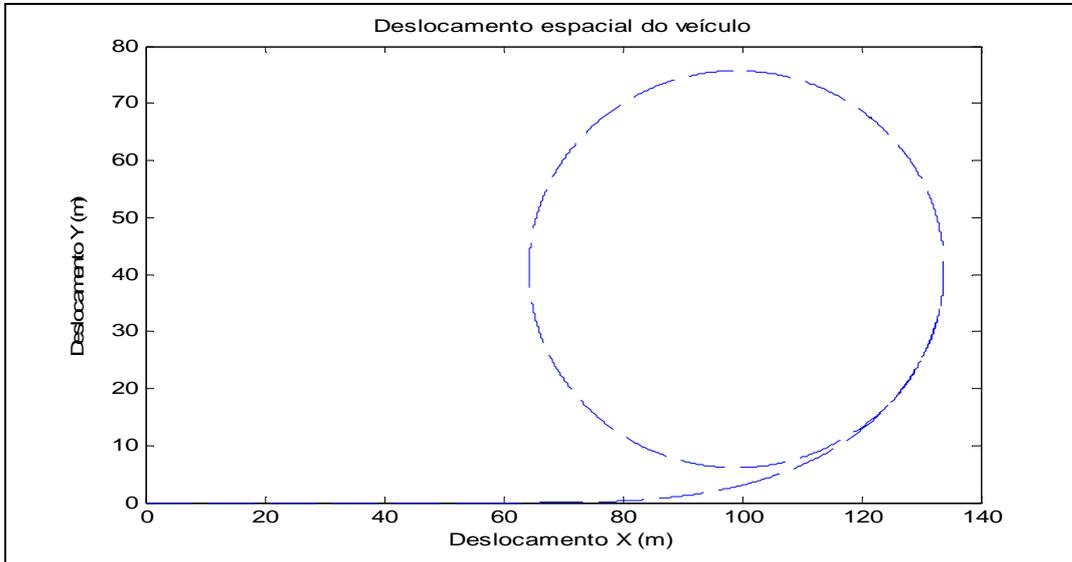


Figura 2.66. Deslocamento do veículo.

## 2.6 Proposta de modelagem da força de tração

Neste último item mostra-se uma proposta do tratamento da modelagem dos veículos de competição, isto é apenas um guia para futuros trabalhos que pretendam seguir estudando a dinâmica dos veículos de competição; aqui se faz uma caracterização da dinâmica longitudinal desde tipo de veículo, e também suas componentes, como o motor.

A força de tração sempre está na direção longitudinal do veículo, e é resultado do torque gerado pelo motor e transferido pelo sistema de transmissão às rodas. O torque do motor por sua vez é função do ângulo do pedal do acelerador. Nos futuros modelos desenvolvidos, pode-se considerar que a força de tração é aplicada diretamente no centro de massa do veículo, para simplificar a representação matemática da transmissão. Deste modo a força de tração não modifica a força lateral, nem o momento de *yaw*, apenas interfere no movimento longitudinal do veículo. Deve-se ter em conta, entretanto, que a força de tração, juntamente com a força de resistência aerodinâmica, pode gerar como máximo

uma aceleração longitudinal de aproximadamente de 1,5g em um veículo de competição do tipo Fórmula 1.

### 2.6.1

#### Forças de aceleração e frenagem.

As forças responsáveis pelo movimento longitudinal do veículo são aquelas de frenagem, devido ao torque aplicado nas rodas pelo sistema de freios; e a força de tração, gerada nas rodas motrizes, pelo torque do motor transferido através dos diversos elementos do sistema de transmissão.

Para representar matematicamente tais esforços, inicia-se com um modelo do motor a gasolina, descrito através das curvas características obtidas na literatura especializada tal como [19]; então apresenta-se uma equação empírica que foi criada com a intenção de gerar curvas características muito próximas às da literatura [19], as constantes desta equação podem ser calibradas para se ter uma velocidade angular máxima e também modificar a potência máxima que o motor pode gerar, é importante ressaltar que as curvas características para os motores Diesel e os motores a gasolina são distintos, já que nos motores a gasolina a curva do torque do motor está mais inclinada há um lado quando se acrescenta a carga do motor ( $\% \delta_{pa}$ ), com este fim faz-se intervir esta variável dentro do polinômio de segundo grau (além de ser um fator que multiplica ao polinômio); na Equação 105 mostra-se o torque fornecido é função da velocidade angular,

$$T_{motor} = [\% \delta_{pa}] \cdot \left( c_2 \cdot \left( \frac{\omega_{motor}}{2600} \right)^2 + c_1 \cdot (\% \delta_{pa})^{[\% \delta_{pa}]} \cdot \left( \frac{\omega_{motor}}{2600} \right) + c_0 \right) \quad (2.101)$$

na qual  $\% \delta_{pa}$  é o percentagem do pedal do acelerador, que pode variar de 5% até 105%, onde o valor 5% inicial é aquele que determina o torque para o motor em marcha lenta;  $\omega_{Motor}$  é a velocidade angular do motor, que pode atingir, para um carro de corrida tipo Fórmula 1, 19000 rpm, no qual a potência máxima é de 750 hp [14]; e os coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$ , e  $c_2$  são empregados para calibrar a curva em função do tipo de motor. Por exemplo, esta calibração para o motor típico da Fórmula 1 determina  $c_0=64$ ;  $c_1=110$ ;  $c_2=-11$ . A Figura 2.67 mostra as curvas de torque deste motor típico para diferentes valores do percentual do pedal do

acelerador, onde se pode notar que valor máximo ocorre a 13000 rpm, quando o motor se encontra a toda carga. Para calcular a potência fornecida pelo motor se utiliza a Equação 109,

$$P_{motor} = T_{motor} \cdot \omega_{motor} \quad (2.102)$$

e a Figura 2.68 ilustra a potência para um motor típico de carros de corrida Fórmula 1. Pode-se ver que a potência máxima ocorre a 18000 rpm. Os comportamentos vistos nas Figuras 2.67 e 2.68 estão próximos da realidade [19].

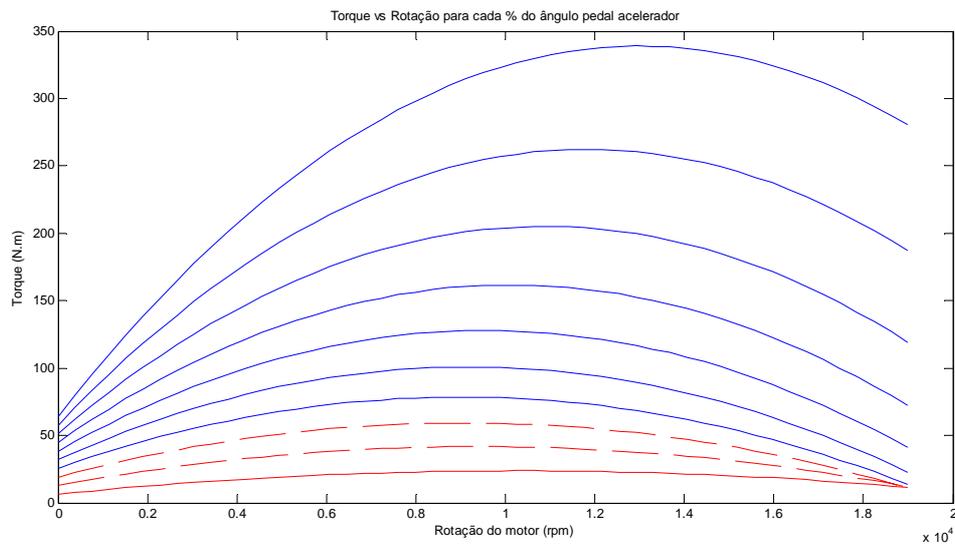


Figura 2.67. Curva característica do torque do motor versus a velocidade angular, para diversos percentuais do pedal do acelerador.

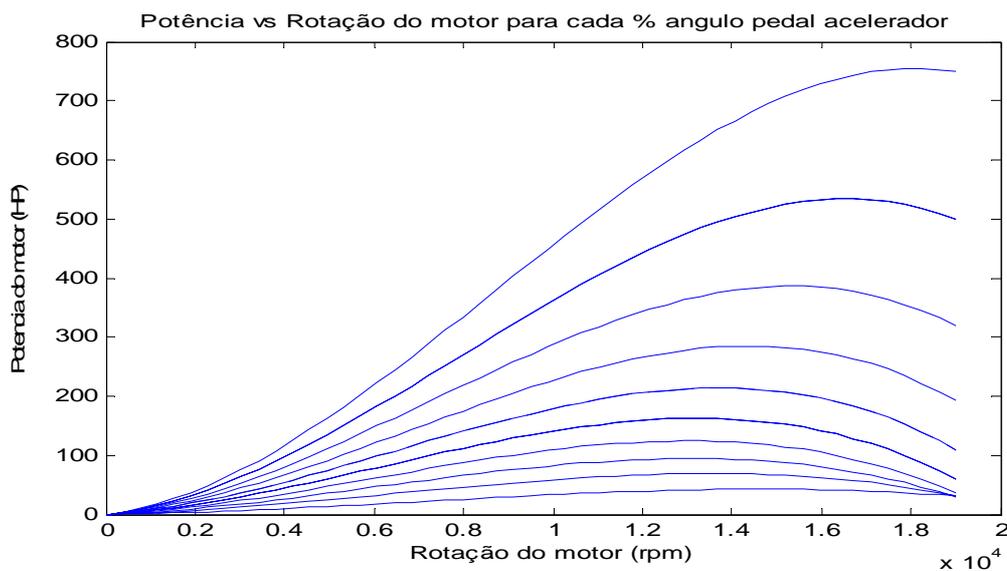


Figura 2.68. Curva característica da potência do motor versus a velocidade angular, para diversos percentuais do pedal do acelerador.

Assume-se que nestas curvas já foi considerada a perda de potência devida à dissipação interna do motor. De fato, para o tratamento do sistema de transmissão como um todo, considera-se que a potência entregue pelo motor às rodas já é a potência efetiva, adotando um coeficiente de rendimento global. Para determinar a velocidade angular do motor, emprega-se a relação dinâmica,

$$\dot{\omega}_{motor} = \frac{(T_{motor})}{J_{motor}} \quad (2.103)$$

no qual  $T_{motor}$  é o torque do motor,  $J_{motor}$  é o momento de inércia do motor, pode-se tomar como aproximadamente igual a 0,136 kg.m<sup>2</sup> [19].

O modelo da caixa de marchas juntamente com toda a transmissão pode chegar-se a reduzir de modo de fazer dela bastante simples. Não se considera qualquer tipo de perda localizada, a não ser a global acima mencionada, e também não há efeitos de flexibilidade nos eixos. Deste modo se supõe que a potência é constante em cada marcha, significando que se o torque transmitido aumenta a velocidade angular diminui e vice-versa, isto é o produto dessas variáveis, a potência, tem que ser constante. Então se a velocidade é multiplicada pela relação de transmissão, logo o torque é dividido pela mesma razão. A transmissão é modelada para 5 marchas distintas, cujas relações totais (da caixa de mudanças, do diferencial, etc) para cada marcha são apresentadas na Tabela 4. A troca de marchas será feita de forma automática em função da velocidade, de acordo com o apresentado na Tabela 5, na qual representa-se  $Wt$  como a rotação que sai da transmissão,  $We$  a rotação efetiva que sai do motor e entra na transmissão,  $Tt$  o torque que sai da transmissão e  $Te$  é o torque efetivo que sai do motor e entra na transmissão.

Tabela 4. Relação de transmissão total de um veículo de Fórmula 1.

Posição da marcha	Relação de transmissão
em primeira	0.021
em segunda	0.030
em terceira	0.050
em quarta	0.080
em quinta	0.150

Tabela 5. Trocas de marcha de um veículo de Fórmula 1.

Posição da marcha	Velocidade do veículo (km/h)	Rotação que sai da transmissão	Torque que sai da transmissão
em primeira	$u < 55$	$Wt = 0.021 We$	$Tt = Te / 0.021$
em segunda	$55 < u < 80$	$Wt = 0.030 We$	$Tt = Te / 0.030$
em terceira	$80 < u < 135$	$Wt = 0.050 We$	$Tt = Te / 0.050$
em quarta	$135 < u < 230$	$Wt = 0.080 We$	$Tt = Te / 0.080$
em quinta	$230 < u$	$Wt = 0.150 We$	$Tt = Te / 0.150$

Nas Figuras 2.69 e 2.70 pode-se ver como varia a força motriz, ou de tração, quando o pedal do acelerador encontra-se na posição máxima ou em uma intermediária, para as relações de transmissão consideradas na Tabelas 4 e 5, empregando a curva de torque versus velocidade angular da Equação 2.103 (Figura 2.67).

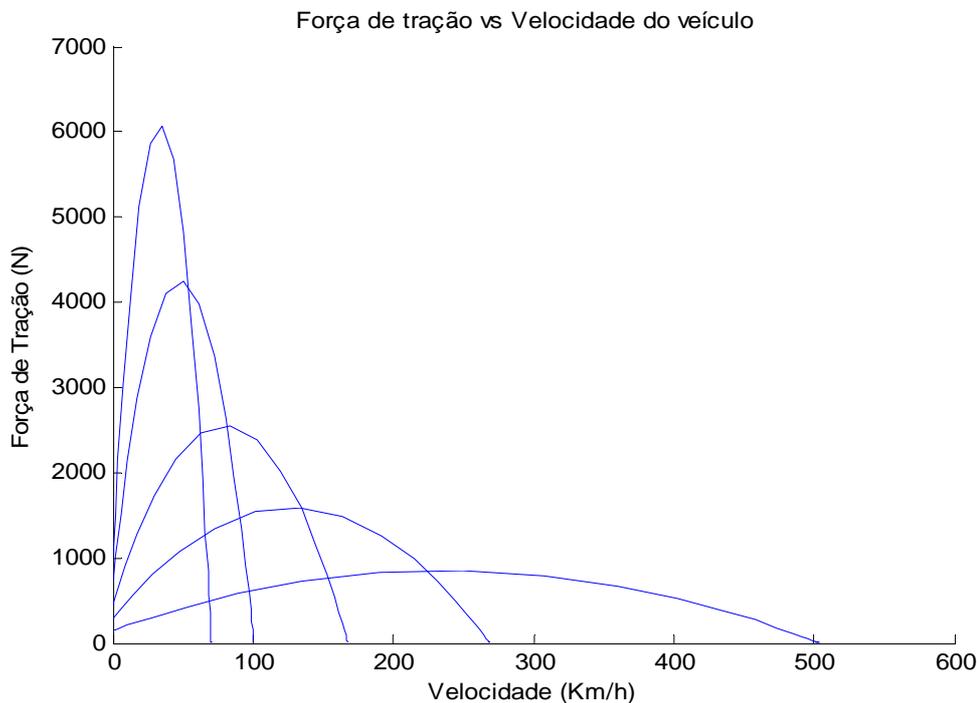


Figura 2.69. Curva característica de força de tração versus velocidade, para a potência máxima do motor.

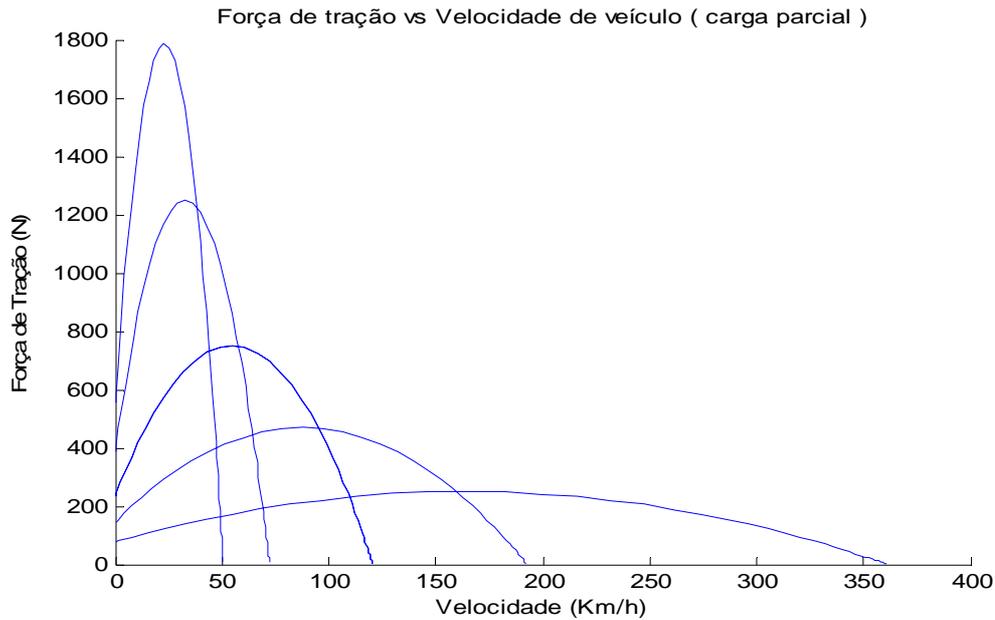


Figura 2.70. Curva característica de força de tração versus velocidade, para a potência parcial do motor (50% do ângulo máximo do pedal acelerador).

A força de frenagem pode ser simplificada por uma função linearmente variável em função do ângulo do pedal de freio, definido entre  $0^\circ$  até  $60^\circ$ . Sabe-se que para veículos de competição, tipo Fórmula 1, a desaceleração em frenagem é de aproximadamente  $5g$ . Uma vez conhecida a massa do veículo pode-se calcular a força máxima de frenagem, assumindo que ela será igual e constante nos 4 pneumáticos, como mostrado na Figura 2.71.

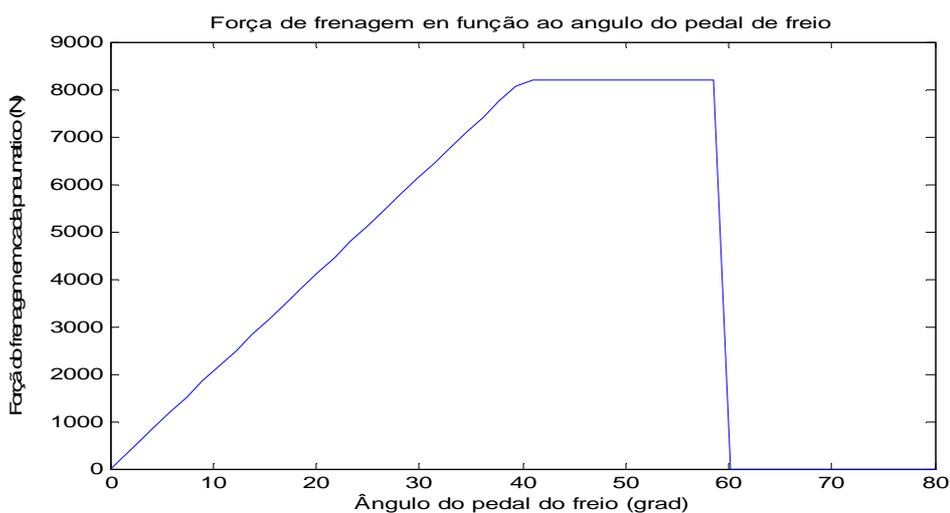


Figura 2.71. Força de frenagem do veículo suposta como a mesma para cada roda.