

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

**Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta  
Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas  
de Otimização**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro, Setembro de 2006



**Danny Hernán Zambrano Carrera**

**Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta  
Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas  
de Otimização**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Francisco José da Cunha Soeiro**

Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ

**Prof. Fernando Ribeiro da Silva**

Departamento de Engenharia Mecânica - IME

**Prof. Carlos Alberto Almeida**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de Setembro de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Danny Hernán Zambrano Carrera**

Graduou-se em Engenharia Mecânica na Universidad Nacional de Ingeniería - UNI (Lima, Perú) em 2001.

#### Ficha Catalográfica

Carrera, Danny Hernán Zambrano

Determinação da trajetória de veículos terrestres a alta velocidade em pistas pré-definidas através de Técnicas de otimização / Danny Hernán Zambrano Carrera; orientador: Mauro Speranza Neto. – Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Mecânica, 2006.

179 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Dinâmica de veículos. 3. Modelos de veículos terrestres. 4. Otimização. 5. Trajetória ótima. 6. Circulo de aderência. 7. Veículos de competição. 8. Simulação virtual. I. Speranza Neto, Mauro. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Dedicado a minha mãe e meu pai.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que tornaram possível a elaboração deste trabalho, em especial:

Aos meus pais, meus irmãos e toda a minha família por terem me incentivado a realizar este curso de Mestrado.

Ao professor Mauro Speranza Neto pela orientação e constante incentivo.

Aos Professores membros da banca, pelos comentários e sugestões feitas.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelos momentos compartilhados e conselhos a nível acadêmico.

Aos meus amigos e colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelos momentos gratos.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Zambrano Carrera, D. Hernán; Mauro. **Determinação da Trajetória de Veículos Terrestres a Alta Velocidade em Pistas Pré-Definidas Através de Técnicas de Otimização.** Rio de Janeiro, 2006. 179p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em veículos de competição com velocidades elevadas, o principal objetivo é chegar em primeiro lugar, o que significa percorrer um determinado número de voltas em uma trajetória fechada fazendo algumas manobras para cumprir o circuito no menor tempo possível, dentro das limitações impostas pelas características dinâmicas e de condução destes veículos. A otimização é uma metodologia que pode ser usada para reproduzir trajetórias e técnicas de condução usadas pelos pilotos de corrida, e também para investigar os efeitos de vários parâmetros nas condições limites da estabilidade veicular. Neste trabalho, inicialmente é apresentado o desenvolvimento de um modelo dinâmico do veículo considerando as características suficientes para análise da trajetória, influenciada por parâmetros geométricos e físicos pertinentes. Em seguida é definido o problema de obtenção da trajetória empregando procedimentos de otimização, de modo a determinar como um veículo irá percorrer um traçado, considerando como função objetivo o tempo de percurso, que deverá ser mínimo, e tendo como restrições as condições dinâmicas do veículo e geométricas da pista, implementando rotinas que são usadas em conjunto com os algoritmos existentes na Optimization Toolbox do Matlab. Finalmente apresenta-se o comportamento do veículo, representado pelo modelo desenvolvido anteriormente em uma malha de controle de trajetória, de modo a comparar o comportamento assim obtido com aquele previsto pelo procedimento de otimização.

## Palavras-chave

Dinâmica Veicular. Modelos de Veículos Terrestres. Otimização. Trajetória Ótima. Circulo de Aderência. Veículos de Competição. Simulação Virtual.

## Abstract

Zambrano Carrera, D. Hernán; Mauro. **Determination of the Trajectory of High Speed Ground Vehicles in Predefined Tracks Through Optimization Techniques.** Rio de Janeiro, 2006. 179p. Thesis of Master - Department of Mechanics Engineering, Pontifical University Catholic of Rio De Janeiro.

High speed competition vehicles are required to cover a determined number of laps in a closed trajectory circuit in a time that is the least possible, in the limits of the governing dynamic and driving characteristics of these vehicles. Optimization is a methodology that can be used in order to simulate trajectories and driving techniques of used by the competition pilots and to investigate the effects of several parameters in limit conditions of car stability. In this work it is first presented the development of the vehicle model considering the sufficient characteristics for trajectory analysis, influenced by pertinent geometric and physical parameters. In continuation, the problem of the optimal trajectory is defined using optimization procedures, in order to determine how a vehicle will follow the path, considering as an objective function the time to follow it, that must be the minimum, and having as constraints the vehicle dynamic conditions and the path geometry, implementing routines that are used with the Matlab's Optimization Toolbox. Finally the behavior of the vehicle is presented, represented by the model developed previously in a trajectory control loop, in such a way to compare the resulting behavior with the one predicted by the optimization procedure.

## Key Words

Vehicular Dynamics. Models of Terrestrial Vehicles. Optimization. Optimal Path. Circulate of Tack. Vehicles of Competition. Virtual simulation.

## Sumário

1	Introdução	20
1.1	Motivação para o estudo	20
1.2	Revisão sobre o estado da arte	21
1.2.1	Dinâmica veicular	21
1.2.2	Modelos do veículo	23
1.2.3	Métodos de otimização	25
1.2.3.1	Problema do tempo mínimo	27
1.2.4	Estratégias de controle	27
1.3	Objetivo da dissertação	28
1.4	Descrição da dissertação	29
2	Modelos do Veículo	30
2.1	Equações de movimento	31
2.2	Modelo dos componentes do veículo	39
2.2.1	Geometria de Ackermann	41
2.2.2	Ângulos de deriva	47
2.2.3	Forças laterais nos pneus	50
2.2.4	Geometria do veículo	52
2.2.5	Forças normais nos pneus	56
2.2.6	Forças aerodinâmicas	60
2.2.7	Transformação de coordenadas	62
2.3	Considerações sobre o modelo	64
2.3.1	Equações de movimento	65
2.3.2	Geometria de Ackermann	66
2.3.3	Ângulos de deriva	66
2.3.4	Forças no plano horizontal xy	67
2.3.5	Forças laterais nos pneus	68
2.3.6	Forças normais nos pneus e força aerodinâmica	68
2.3.7	Círculo de aderência e diagrama GG	69
2.4	Modelo completo e implementação em <i>Simulink/Matlab</i>	73
2.5	Simulação e avaliação do modelo completo	82

2.6 Proposta de modelagem da força de tração	91
2.6.1 Forças de aceleração e frenagem	92
3 Determinação da Trajetória Ótima	97
3.1 Definição da otimização aplicada aos veículos	97
3.2 Modelo massa pontual	99
3.3 Algoritmos de otimização	102
3.4 Definição das variáveis e restrições	104
3.4.1 Variáveis de entrada	104
3.4.2 Variáveis de saída	109
3.4.3 Restrições de otimização	109
3.4.4 Função objetivo	111
3.5 Apresentação da função objetivo	113
3.5.1 Movimento longitudinal acelerado	113
3.5.2 Movimento longitudinal desacelerado	115
3.6 Movimento em curvas	118
3.6.1 Movimento na entrada na curva	118
3.6.2 Movimento na saída da curva	121
3.7 Procedimento de otimização	122
4 Simulação da Trajetória Ótima	126
4.1 Casos de simulação	126
4.2 Caso 1: Aceleração em linha reta	127
4.3 Caso 2: Aceleração e velocidade constante em linha reta	130
4.4 Caso 3: Desaceleração e entrada de uma curva	132
4.5 Caso 4: Aceleração e saída de uma curva	137
4.6 Caso 5: Velocidade constante em curvas	144
4.7 Caso 6: Movimento geral	154
4.8 Caso 7: Movimento em duas curvas consecutivas	159
5 Conclusões	167
5.1 Recomendações	169
6 Referências Bibliográficas	171
7 Apêndice	173
7.1 Apêndice A: Tratamento no programa <i>Matlab/Simulink</i>	174
7.2 Apêndice B: Trajetória ótima no <i>Toolbox de Matlab</i>	174

## Lista de Figuras

Figura 1.1 Diagrama de blocos representativo de um veículo terrestre ...	22
Figura 2.1 Sistemas de referência e variáveis no plano .....	30
Figura 2.2 Determinando as acelerações em x e y .....	32
Figura 2.3 Diagrama de corpo livre em relação ao eixo z .....	34
Figura 2.4 Diagrama de aceleração de rolagem .....	37
Figura 2.5 Esquema do modelo do veículo .....	40
Figura 2.6 Ângulo de esterçamento, geometria de Ackermann.....	41
Figura 2.7 Função entrada da volante, ângulos estacionários .....	44
Figura 2.8 Ângulo de esterçamento estacionário, roda direita .....	44
Figura 2.9 Ângulo de esterçamento estacionário, roda esquerda .....	44
Figura 2.10 Função de entrada para o ângulo da volante.....	45
Figura 2.11 Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita.....	45
Figura 2.12 Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda.....	46
Figura 2.13 Ângulos de esterçamento em função ao ângulo da volante..	46
Figura 2.14 Comparação entre os ângulos de esterçamento das rodas ..	46
Figura 2.15 Identificação dos ângulos de deriva .....	47
Figura 2.16 Comportamento do ângulo de deriva .....	47
Figura 2.17 Função entrada da velocidade lateral, ângulos de deriva .....	49
Figura 2.18 Função entrada da velocidade do yaw, ângulos de deriva....	49
Figura 2.19 Ângulo de deriva de cada pneumático, entrada conhecida...	49
Figura 2.20 Curva característica dos ângulos de deriva .....	51
Figura 2.21 Força lateral em função ao ângulo de deriva .....	51
Figura 2.22 Orientação dos componentes das forças nos pneus.....	52
Figura 2.23 Força no eixo x, teste de modelo das forças no plano xy .....	55
Figura 2.24 Força no eixo y, teste de modelo das forças no plano xy .....	56
Figura 2.25 Momento no eixo z, teste de modelo das forças, plano xy....	56
Figura 2.26 Função da aceleração lateral variável.....	58
Figura 2.27 Forças normais em cada pneumático, aceleração lateral .....	59
Figura 2.28 Função da aceleração longitudinal variável .....	59
Figura 2.29 Forças normais em cada pneumático, aceleração long. ....	60
Figura 2.30 Valor médio do coeficiente de sustentação negativa .....	62

Figura 2.31	Sistemas de coordenadas local e global .....	63
Figura 2.32	Deslocamento em $x$ , teste da transf. de coordenadas .....	63
Figura 2.33	Deslocamento em $y$ , teste da transf. de coordenadas .....	64
Figura 2.34	Deslocamento espacial, teste da transf. de coordenadas .....	64
Figura 2.35	Círculo de aderência de um veículo de competição, F1.....	70
Figura 2.36	Diagrama GG de um veículo percorrendo uma trajetória.....	72
Figura 2.37	Relação entrada-saida, dinâmica do veículo.....	73
Figura 2.38	Dinâmica do veículo representada em <i>Simulink/Matlab</i> .....	74
Figura 2.39	Relação entrada-saida, direção, geometria e Ackermann.....	74
Figura 2.40	Direção e geometria de Ackermann <i>Simulink/Matlab</i> .....	75
Figura 2.41	Relação entrada-saida para os ângulos de deriva .....	75
Figura 2.42	Ângulos de deriva representados em <i>Simulink/Matlab</i> .....	76
Figura 2.43	Relação entrada-saida para as forças laterais .....	77
Figura 2.44	Forças laterais representadas em <i>Simulink/Matlab</i> .....	77
Figura 2.45	Relação entrada-saida, forças e momentos .....	78
Figura 2.46	Esforços aplicados ao veículo em <i>Simulink/Matlab</i> .....	78
Figura 2.47	Relação entrada-saida para as forças normais .....	79
Figura 2.48	Forças normais aplicadas aos pneus em <i>Simulink/Matlab</i> ....	79
Figura 2.49	Relação entrada-saida para a transf. de coordenadas.....	80
Figura 2.50	Transf. de coordenadas em <i>Simulink/ Matlab</i> .....	80
Figura 2.51	Diagrama de blocos feito no <i>Simulink/Matlab</i> . .....	81
Figura 2.52	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	83
Figura 2.53	Ângulos de deriva no tempo.....	84
Figura 2.54	Velocidade lateral no referencial local no tempo .....	85
Figura 2.55	Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	85
Figura 2.56	Deslocamento do veículo .....	86
Figura 2.57	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	87
Figura 2.58	Ângulos de deriva no tempo.....	87
Figura 2.59	Velocidade lateral no referencial local no tempo.....	87
Figura 2.60	Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	88
Figura 2.61	Deslocamento do veículo. ....	88
Figura 2.62	Função entrada da volante e ângulos de esterçamento.....	89
Figura 2.63	Ângulos de deriva no tempo.....	89
Figura 2.64	Velocidade lateral no referencial local no tempo.....	90

Figura 2.65 Ângulo <i>yaw</i> e ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo. ....	90
Figura 2.66 Deslocamento do veículo. ....	91
Figura 2.67 Curva característica de velocidade, torque do motor. ....	93
Figura 2.68 Curva característica de velocidade, potência do motor.....	93
Figura 2.69 Curva característica de força de tração vs velocidade .....	95
Figura 2.70 Curva característica, força de tração vs velocidade (50%) ...	96
Figura 2.71 Força de frenagem do veículo.....	96
Figura 3.1 Duas trajetórias possíveis em uma curva.....	99
Figura 3.2 Variáveis do modelo massa pontual.....	100
Figura 3.3 Diagrama do algoritmo de otimização. ....	103
Figura 3.4 Exemplo dos dados obtidos da telemetria.....	105
Figura 3.5 Função para a aceleração longitudinal do veículo. ....	106
Figura 3.6 Função para aceleração e desaceleração long. do veículo ..	107
Figura 3.7 Função para aceleração lateral do veículo.....	108
Figura 3.8 Restrição da pista.....	111
Figura 3.9 Trechos de uma pista com diferentes acelerações. ....	113
Figura 3.10 Fluxograma do procedimento de otimização.....	125
Figura 4.1 Deslocamento espacial. Caso 1.....	128
Figura 4.2 Aceleração para o caso 1.....	128
Figura 4.3 Velocidade para o caso 1.....	128
Figura 4.4 Deslocamento espacial, caso 1 modificado. ....	129
Figura 4.5 Aceleração para o caso 1 modificado. ....	129
Figura 4.6 Velocidade para o caso 1 modificado.....	130
Figura 4.7 Deslocamento espacial, caso 2.....	131
Figura 4.8 Aceleração para o caso 2.....	131
Figura 4.9 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 2. ....	132
Figura 4.10 Deslocamento espacial, caso 3.....	133
Figura 4.11 Aceleração para o caso 3.....	133
Figura 4.12 Aceleração lateral para o caso 3. ....	133
Figura 4.13 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 3. ....	134
Figura 4.14 Diagrama G-G do veículo, caso 3. ....	134
Figura 4.15 Deslocamento espacial, caso 3 modificado. ....	135
Figura 4.16 Aceleração lateral para o caso 3 modificado.....	135
Figura 4.17 Desaceleração para o caso 3 modificado. ....	135

Figura 4.18 Diagrama G-G do veículo, caso 3 modificado.....	136
Figura 4.19 Velocidade em função da distancia, caso 3 modificado. ....	136
Figura 4.20 Raio de curvatura vs distancia, caso 3 modificado.....	137
Figura 4.21 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso 3 modificado....	137
Figura 4.22 Deslocamento espacial, caso 4.....	138
Figura 4.23 Aceleração lateral para o caso 4.....	139
Figura 4.24 Aceleração para o caso 4.....	139
Figura 4.25 Diagrama G-G do veículo, caso 4. ....	140
Figura 4.26 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 4. ....	140
Figura 4.27 Raio de curvatura instant. em função à distancia, caso 4 ...	141
Figura 4.28 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) em função à distancia, caso 4.....	141
Figura 4.29 Deslocamento espacial, caso 4 modificado. ....	142
Figura 4.30 Aceleração lateral para o caso 4 modificado.....	142
Figura 4.31 Aceleração para o caso 4 modificado. ....	143
Figura 4.32 Diagrama G-G do veículo, caso 4 modificado.....	143
Figura 4.33 Velocidade em função da distancia, caso 4 modificado. ....	143
Figura 4.34 Raio de curvatura vs distancia, caso 4 modificado.....	144
Figura 4.35 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso 4 modificado....	144
Figura 4.36 Deslocamento espacial, caso 5.....	145
Figura 4.37 Aceleração para o caso 5.....	146
Figura 4.38 Aceleração lateral para o caso 5.....	146
Figura 4.39 Diagrama G-G do veículo, caso 5. ....	146
Figura 4.40 Velocidade em função da distancia percorrida, caso 5. ....	147
Figura 4.41 Raio de curvatura instant. em função à distancia, caso 5... ..	147
Figura 4.42 Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) em função à distancia, caso 5.....	148
Figura 4.43 Trajetória percorrida pelo modelo dinâmico (azul). ....	149
Figura 4.44 Volante do veículo no tempo, modelo dinâmico. ....	150
Figura 4.45 Ângulos de esterçamento dianteiros, modelo dinâmico. ....	150
Figura 4.46 Ângulos de deriva no tempo, modelo dinâmico.....	150
Figura 4.47 Forças laterais no tempo, modelo dinâmico.....	151
Figura 4.48 Forças totais nos eixos <b>x</b> e <b>y</b> , modelo dinâmico.....	151
Figura 4.49 Momento no eixo <b>z</b> , modelo dinâmico. ....	152
Figura 4.50 Forças normais em cada pneumático, modelo dinâmico. ...	152
Figura 4.51 Aceleração do veículo, modelo dinâmico. ....	152

Figura 4.52	Aceleração angular do veículo, modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.53	Velocidade do <i>yaw</i> , modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.54	Velocidades angulares do <i>roll</i> e <i>pitch</i> , modelo dinâmico. ....	153
Figura 4.55	O ângulo <i>yaw</i> no tempo, modelo dinâmico. ....	154
Figura 4.56	Os ângulos <i>roll</i> e <i>pitch</i> no tempo, modelo dinâmico. ....	154
Figura 4.57	Deslocamento espacial, caso geral. ....	156
Figura 4.58	Aceleração lateral para o caso geral. ....	156
Figura 4.59	Aceleração longitudinal, caso geral. ....	157
Figura 4.60	Diagrama G-G do veículo, caso geral. ....	157
Figura 4.61	Velocidade em função da distancia, caso geral. ....	157
Figura 4.62	Raio de curvatura em função à distancia, caso geral. ....	158
Figura 4.63	Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso geral. ....	158
Figura 4.64	Comparação das trajetórias ótimas, caso geral. ....	159
Figura 4.65	Deslocamento espacial, caso final. ....	160
Figura 4.66	Aceleração lateral, caso final. ....	162
Figura 4.67	Aceleração longitudinal, caso geral. ....	162
Figura 4.68	Velocidade em função da distancia, caso geral. ....	162
Figura 4.69	Raio de curvatura em função à distancia, caso geral. ....	163
Figura 4.70	Atitude do veículo ( <i>yaw</i> ) vs distancia, caso final. ....	164
Figura 4.71	Diagrama G-G do veículo, caso final. ....	164

## Lista de Tabelas

Tabela 1 Parâmetros arbitrários construtivos de um veículo de passeio .....	43
Tabela 2 Ângulos de esterçamento e raio de curvatura, volante constante .....	43
Tabela 3 Parâmetros construtivos de um veículo de fórmula 1.....	83
Tabela 4 Relação de transmissão total de um veículo de fórmula 1.....	94
Tabela 5 Trocas de marcha de um veículo de fórmula 1.....	95
Tabela A.1. Comandos do programa Matlab, modelo dinâmico não linear.....	174

## Lista de Símbolos

### Símbolos Romanos

$t$	Tempo de percurso
$v$ $u$	Velocidade do veículo
$x$	Distancia percorrida pelo veículo
$m_{uf}$	Massa não suspensa dianteira
$m_{ur}$	Massa não suspensa traseira
$m_s$	Massa suspensa
$m_{tot}$	Massa total
$F_x$	Força longitudinal total
$F_y$	Força lateral total
$F_z$	Força vertical total
$F_{xi}$	Força em cada pneu no eixo “x” do sistema referencial
$F_{yi}$	Força em cada pneu no eixo “y” do sistema referencial
$a_x$	Aceleração longitudinal do veículo
$a_y$	Aceleração lateral do veículo
$h_{sp}$	Altura do centro de massa ao centro de giro do mov. <i>pitch</i>
$h_{sr}$	Altura do centro de massa ao centro de giro do mov. <i>roll</i>
$\ddot{x}$	Aceleração do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$\ddot{y}$	Aceleração do veículo no eixo “y” do sistema referencial
$v_x$ $V_x$	Velocidade do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$\dot{y}$ $V_y$	Velocidade do veículo no eixo “y” do sistema referencial
$\dot{x}$	Velocidade do veículo no eixo “x” do sistema referencial
$P$	Quantidade de movimento linear
$H$	Quantidade de movimento angular
$J$	Matriz inércia do veículo
$M_x$	Momento de <i>roll</i>

$M_y$	Momento de <i>pitch</i>
$M_z$	Momento de <i>yaw</i>
$a \quad l_d \quad b \quad l_t$	Distancia entre o CG e os eixos dianteiro e traseiro
$t_f \quad b_d$	A bitola do eixo dianteiro
$t_r \quad b_t$	A bitola do eixo traseiro
$I_{yaw}$	Momento de inércia do movimento <i>yaw</i>
$I_{roll}$	Momento de inércia de rolagem do veículo
$I_{pitch}$	Momento de inércia do movimento <i>pitch</i>
$B_f \quad B_r$	Coefficientes de amortecimento da suspensão dianteira e traseira
$K_f \quad K_r$	Coefficientes de rigidez da suspensão dianteira e traseira
$g$	A aceleração da gravidade
$R \quad \rho$	Raio de curvatura instantâneo
$k_d$	Relação de transmissão do sistema de direção
$f_d$	Relação de folga do sistema de direção
$l$	Distancia entre eixos das rodas
$l_d \quad l_t$	Distancias dos eixos das rodas dianteiras e traseiras ao CM
$L_{DD}$	Força lateral no pneu dianteiro direito
$F_{DE}$	Força lateral no pneu dianteiro esquerdo
$F_{TD}$	Força lateral no pneu traseiro direito
$F_{TE}$	Força lateral no traseiro esquerdo
$h_f$	Altura da massa suspensa dianteira
$h_r$	Altura da massa suspensa traseira
$h_{CG}$	Altura do centro de gravidade
$F_{Ni}$	Força normal do i-ésimo pneu
$C_{AD}$	Coefficiente de arrasto frontal
$A$	A projeção da área frontal do veículo
$F_{AD}$	Força aerodinâmica frontal
$F_{AC}$	Força aerodinâmica vertical
$C_{AC}$	Coefficiente de sustentação negativa

$A_L$	Projeção da área lateral superior do veículo
$u_x$	Velocidade (longitudinal) do veículo em função do tempo
$u_0$	Velocidade inicial do veículo
$dt$	Diferencial do tempo (variável de integração)
$U_x$	Velocidade na direção do eixo $x$ do referencial global
$V_x$	Velocidade na direção do eixo $y$ do referencial global
$X Y$	Posições no referencial global
$tx$	Distância que o veículo percorre no tempo $t$
$x_0$	Posição inicial do veículo
$x_f$	Posição final durante o processo de aceleração
$a_0$	Aceleração longitudinal inicial
$a_n$	Aceleração lateral (final)
$xt$	Posição no eixo $X$ do referencial global
$yt$	Posição no eixo $Y$ do referencial global
$y_{inf.}$	Limite inferior da pista
$y_{sup.}$	Limite superior da pista no eixo $Y$ do referencial global

## Símbolos Gregos

$\theta$	Medida angular do movimento <i>yaw</i> , ângulo <i>yaw</i> .
$\dot{\theta}$	Velocidade angular do ângulo <i>yaw</i>
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular do ângulo <i>yaw</i>
$\varphi$	Medida angular do movimento <i>roll</i> , ângulo <i>roll</i> .
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular do ângulo <i>roll</i>
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular do ângulo <i>roll</i>
$\rho$	Medida angular do movimento <i>pitch</i> , ângulo <i>pitch</i> .
$\dot{\rho}$	Velocidade angular do ângulo <i>pitch</i>
$\ddot{\rho}$	Aceleração angular do ângulo <i>pitch</i>
$\Delta i$	Variação da variável <i>i</i>
$\Omega$	Velocidade angular
$\beta_{roll}$	Amortecimento da rolagem
$\kappa_{roll}$	Rigidez da rolagem
$\beta_{pitch}$	Amortecimento associado ao movimento <i>pitch</i>
$\kappa_{pitch}$	Rigidez associada ao movimento <i>pitch</i>
$\delta$	Ângulo de esterçamento do volante
$\delta_D$	Ângulo de esterçamento da roda dianteira direita
$\delta_E$	Ângulo de esterçamento da roda dianteira esquerda
$\delta_r$	Ângulo de esterçamento dos pneus traseiros
$\delta_b$	Ângulo do pedal do freio
$\alpha_{DD}$	Ângulo de deriva do pneu dianteiro direito
$\alpha_{DE}$	Ângulo de deriva do pneu dianteiro esquerdo
$\alpha_{TD}$	Ângulo de deriva do pneu traseiro direito
$\alpha_{TE}$	Ângulo de deriva do traseiro esquerdo
$C_\alpha$ $C_f$ $C_r$	Rigidez lateral do pneumático
$\kappa_f$ $\kappa_r$	Parâmetros de rigidez de rolagem dianteira e traseira
$\rho_{ar}$	Massa específica do ar, densidade