

4

Modelo de Black-Derman-Toy

O modelo de estrutura a termo desenvolvido em 1990 por Fischer Black, Emanuel Derman e William Toy é um modelo de não-arbitragem unifatorial, isto é, os preços dos títulos são dependentes de apenas um fator, a taxa de juro instantânea.

A estrutura a termo atual de taxa de juro de longo prazo é utilizada para construir uma árvore binomial de possíveis valores futuros para as taxas spot. Esta árvore pode ser usada para precificar derivativos de taxas de juros. As características do modelo são:

- A taxa spot ou de custo é input do modelo, cuja mudança afeta todos os preços dos títulos;
- O comportamento do ativo objeto apresenta reversão à média, ou seja, a evolução das taxas de juros spot tem de considerar que o PU no vencimento de qualquer contrato futuro de DI é igual a 100.000;
- A estrutura do modelo é binomial e o comportamento da taxa de juros de curto prazo é log-normal;

O modelo é construído a partir do pressuposto de em relação à probabilidade de subida ou descida da taxa de juros e construído a partir de uma estrutura a termo da taxa de juros previamente definida.

O modelo foi originalmente desenvolvido de forma algorítmica, descrevendo a evolução da estrutura a termo em uma árvore binomial com tempo discreto, muito embora diversos autores demonstraram posteriormente que o modelo implícito quando se toma o limite do intervalo de tempo igual a zero, é dado pelo seguinte processo de difusão:

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln(r(t))] dt + \sigma(t) dz$$

A equação permite a compreensão de algumas hipóteses implícitas ao modelo. O modelo de Black-Derman-Toy é um modelo lognormal com reversão à média, em que a reversão à média é endógena ao modelo, ou seja, é determinada a partir dos parâmetros de entrada, o que resulta na vantagem de que as taxas de juro não podem tornar-se negativas.

O modelo também incorpora duas funções dependentes do tempo, $\theta(t)$ e $\sigma(t)$, escolhidas de forma que o modelo reproduza a estrutura a termo de taxas de juro spot e a estrutura a termo de volatilidade das taxas de juros spot.

O modelo alterna uma variedade de médias de diferentes vértices e vencimentos para a taxa spot futura com o objetivo de igualar os inputs. À medida que a volatilidade futura muda, a reversão à média futura também muda.

Quando se utiliza um modelo com volatilidade constante ao longo do tempo o processo estocástico passa a ter a seguinte equação:

$$d\ln(r(t)) = \theta(t) dt + \sigma(t) dz$$

Portanto, a variável-chave a ser modelada é a taxa de crescimento da taxa de juro, ou seja, o retorno ou taxa instantânea (drift) de juros. A estrutura do modelo é binomial e recombinante (por construção), o que o torna computacionalmente simples.

4.1

Árvores Binomiais

Desde que Cox, Ross e Rubinstein publicaram, em 1979, seu trabalho sobre o apreçamento de opções utilizando método lattice, extensões e generalizações de tal modelo foram desenvolvidas e em especial aquelas destinadas à avaliação de derivativos multidimensionais. Dentre essas extensões, estão os trabalhos de Boyle (1988), Boyle, Evnine e Gibbs (1989), Kamrad e Ritchken (1991) e Rubinstein (1991). Em resumo, o principal resultado do modelo é o de mostrar que o valor de uma opção pode ser interpretado como a expectativa de seu valor futuro descontado num mundo neutro ao risco.

De acordo com Hull (1997), um modelo binomial mais realista é aquele que assume que os movimentos de preço do ativo objeto sejam compostos por um

grande número de pequenos movimentos binomiais. Dessa forma, a aproximação discreta para a construção de uma árvore binomial, procura aproximar a equação diferencial estocástica do ativo-objeto.

Inicialmente será feita uma breve descrição da construção da árvore binomial nos seus primeiros passos e a memória de cálculo para determinação dos parâmetros do modelo binomial Black-Derman-Toy (BDT). No capítulo 7 será detalhado o algoritmo implementado para o apereçamento de opções europeias sobre futuro de DI.

Considere a avaliação de uma opção sobre um ativo sem dividendo que no vencimento assumirá valor 100. Este ativo tem o perfil de preço de um zero coupon bond. A cada intervalo de tempo, o preço do ativo sai do seu valor inicial S para algum destes dois valores S_u e S_d . A mudança de S para S_u é um movimento ascendente e para S_d é descendente.

Assume-se, por exemplo, um derivativo com vencimento em $T = 3$, onde $i = 1, \dots, T$ e j representando os estados possíveis na árvore.

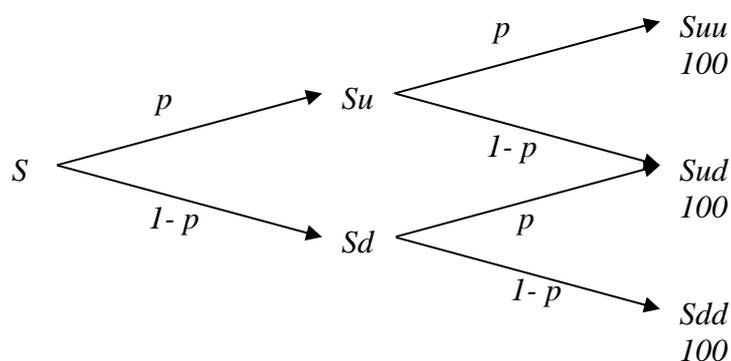


Gráfico 7: Árvore binomial de 3 passos

O ativo base pode ser avaliado pelo princípio da avaliação neutra em relação ao risco, isto é, o retorno esperado de todos os títulos negociados é a taxa de juro livre e os fluxos de caixa futuros podem contabilizados mediante o desconto da taxa de juros.

O preço esperado de S um ano a partir de agora é $pS_u + (1-p)S_d$. Como o modelo assume a mesma probabilidade de subir e descer, o retorno esperado é $\frac{1}{2}(S_u + S_d) / S$. Como se assumiu que todos os retornos esperados são iguais, e porque se pode emprestar dinheiro à taxa r , deduz-se que:

$$S = 1/2 (S_u + S_d) / 1 + r$$

Através deste modelo pode-se avaliar um título prefixado de qualquer maturidade, desde que se construa uma árvore de taxas spot futuro longa o suficiente. O processo começa com o valor de face (na maturidade) da obrigação e, a partir daí, vai-se obtendo o preço a cada vértice anterior, descontando os preços futuros usando a fórmula anterior e a taxa spot daquele nó. Indo para trás, até a raiz da árvore, chega-se ao preço hoje.

A estrutura binomial e a hipótese de lognormalidade para as taxas de juros implicam que os valores de r_u e r_d têm de satisfazer às seguintes equações:

$$r_u = r_o e^{\mu + \sigma}$$

$$r_d = r_o e^{\mu - \sigma}$$

Quando dividimos uma pela outra, temos:

$$r_u = r_d e^{2\sigma}$$

A árvore anterior pode ser modificada com a inclusão de uma notação adequada ao BDT. Cada vértice representa um período de tempo igual com início no vértice à esquerda.

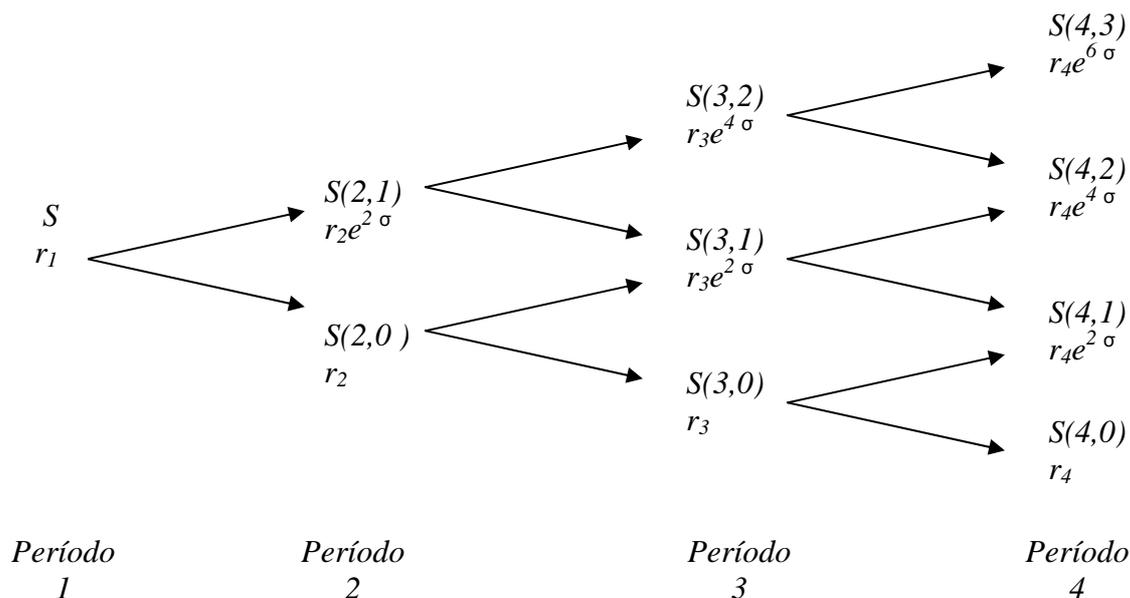


Gráfico 8: Árvore binomial de 4 períodos para o modelo BDT

A estrutura a termo das taxas de juros é cotada em rendimentos e não em preços. O rendimento anual x , hoje, de um contrato com N períodos, em termos de seu preço S , é dado pelo x que satisfaça a equação abaixo:

$$S = 100/(1+x)^N$$

Similarmente, os rendimentos x_u e x_d um ano a partir de hoje, correspondentes aos preços S_u e S_d , são dados por:

$$S_{u,d} = 100/(1+x_{u,d})^{N-1}$$

Para obter a taxa *spot* a partir de uma estrutura a termo é necessário igualar o rendimento de um período N quando a taxa *spot* coincide com o valor da taxa de retorno até o vencimento (yield). A seguir, calculam-se as duas taxas *spot* 1-ano igualando o rendimento e a volatilidade 2-anos. E assim o processo continua, procurando-se sempre obter as taxas *spot* para daqui a dois anos, três anos, etc, até o final da maturidade do título.

No modelo binomial a ser desenvolvido no capítulo 7 é adotada volatilidade constante em todos os vértices, supondo que em cada período os

contratos tendem a ter a mesma grandeza de variação. Contudo o modelo assume que a taxa *spot* tem uma distribuição log-normal, com a volatilidade dependente somente do tempo. Um ano no futuro, quando a taxa *spot* valer r_u , a volatilidade é igual a $\frac{1}{2}\ln(r_{uu}/r_{ud})$; quando a taxa for r_d , a volatilidade será igual a $\frac{1}{2}\ln(r_{ud}/r_{dd})$. Como estas volatilidades devem ser as mesmas (é a do vértice), tem de ocorrer que $r_{uu}/r_{ud} = r_{ud}/r_{dd}$, ou seja, $r_{ud}^2 = r_{uu}r_{dd}$.

Neste cenário não é preciso fazer suposições para a independência para as taxas. A intermediária, r_{ud} , pode ser obtida a partir das outras duas. Isto significa dizer que, no modelo, basta igualar duas taxas *spot* com duas quantidades de um título prefixado de três períodos. E esta situação, tipicamente, tem solução única. Mas para calculá-la é necessário utilizar método iterativo, pois a equação para calcular a taxa não apresenta solução direta.

Este modelo permite gerar solução para diferente período de tempo independente do vencimento do contrato futuro. A seguir será apresentado um exemplo do sistema de equação para uma árvore de três períodos.

Período 2

$$\text{Vértice } S(2,2) = 100/(1 + r_2 e^{4\sigma})$$

$$\text{Vértice } S(2,1) = 100/(1 + r_2 e^{2\sigma})$$

$$\text{Vértice } S(2,0) = 100/(1 + r_2)$$

Período 1

$$\text{Vértice } S(1,1) = \frac{1}{2} (\text{Vértice } S(2,2) + \text{Vértice } S(2,0)) / (1 + r_1 e^{2\sigma})$$

$$\text{Vértice } S(1,0) = \frac{1}{2} (\text{Vértice } S(2,0) + \text{Vértice } S(2,-2)) / (1 + r_1)$$

Período 0

$$\text{Vértice } S = \frac{1}{2} (\text{Vértice } S(1,1) + \text{Vértice } S(1,-1)) / (1 + r_0)$$

Lembrando a equação anterior apresentada:

$$S = 100/(1+x)^N$$

A taxa x é o input que é calculado a partir da estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ) original para o terceiro vértice.

O modelo Black Derman Toy para construção da árvore binomial de taxa de juros tem como input a curva a termo de juros e a volatilidade. Com o auxílio de um método numérico, tais como a interpolação de Newton-Raphson ou o método da bisseção encontra-se a taxa r_2 . A partir dela obtém-se as outras taxas do período 3 através da equação que originou a árvore binomial de juros.