3
Definições

3.1
Processos Estocásticos e Processo de Wiener

Um processo estocástico corresponde a uma variável que evolui no decorrer do tempo de forma incerta ou aleatória. O preço de uma ação negociada na bolsa de valores é um exemplo de processo estocástico que flutua aleatoriamente, mas que, ao longo do tempo, apresenta uma taxa de retorno esperada positiva, que visa compensar os acionistas que investem nessa ação.

Os processos estocásticos podem ser contínuos ou discretos, dependendo da variável tempo ser contínua ou discreta, respectivamente.

Um movimento browniano, ou processo de Wiener,é um processo aleatório contínuo que apresenta três importantes propriedades:

1. é um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo depende somente do seu valor atual, não sendo afetado pelos valores passados do processo, ou por qualquer outra informação;
2. possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidades da variação do processo em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo (que não sobreponha o primeiro);
3. as variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

Dado $z(t)$, um processo de Wiener, Δz uma variação de $z(t)$, e Δt um intervalo de tempo qualquer, tem-se:

- $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, onde ε é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, com média zero e desvio padrão unitário(um);

- A variável aleatória t e não é correlacionada serialmente, ou seja, $E(\varepsilon_t\, \varepsilon_s) = 0$ para $t \neq s$.

Quando o intervalo de tempo Δt torna-se infinitesimalmente pequeno, pode-se representar a variação de um processo de Wiener, dz, em tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$$

Um movimento browniano com tendência é uma extensão do processo acima, sendo representado pela seguinte equação estocástica:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

onde α é o parâmetro de tendência (ou crescimento), σ é o parâmetro de variância, x é um processo estocástico, como, por exemplo, o preço de uma ação. Para qualquer intervalo de tempo dt, a variação em x , possui distribuição normal, com esperança $E(\Delta x) = \alpha\, \Delta t$. e variância Var D = $\sigma^2\, \Delta t$.

3.2
Lema de Ito

Um processo estocástico contínuo x(t), é chamado processo de Itô, quando é representado pela equação:

$$dx = a(x,t)\, dt + b(x,t) dz$$

onde $a(x,t)$ é a função não-aleatória de tendência, $b(x,t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener, e t é o tempo.

Dada uma função F(x,t) , diferenciável no mínimo duas vezes em x , e uma vez em t , o lema de Itô mostra que a mesma segue o seguinte processo:

$$dF = [\, \partial F/\partial t + a(x,t)\, \partial F/\partial x + ½ b^2 (x,t)\, \partial^2 F/\partial x^2]\, dt + b(x,t)\, \partial F/\partial x\, dz$$

Este lema é a base de fórmulas e métodos de precificação de derivativos, pois F(x,t) pode ser o preço de um contrato de futuro de índice BOVESPA, ou o preço de uma opção de compra da ação da Petrobrás.

Enquanto parece razoável que o preço de uma ação siga um processo de Markov, e tenha incrementos independentes, não é razoável assumir que as variações do preço sigam uma distribuição normal, afinal o preço de uma ação não pode ser inferior a zero. Assim, pode-se assumir que os preços de uma ação sigam uma distribuição lognormal, ou seja, as variações no logaritmo do preço seguem uma distribuição normal.

3.3
Movimento Geométrico Browniano

Percebe-se que o movimento geométrico browniano é um caso especial do processo de Itô, onde $a(x,t)= \alpha x$ e $b(x,t)= \sigma x$.

Dessa forma, sendo S o processo geométrico browniano que descreve o preço da ação, e $F(S) = \log (S)$, tem-se, pelo lema de Itô:

$$dS=\alpha Sdt+ \sigma Sdz$$

$$\partial F/\partial t =0, \qquad \partial F/\partial S=1/S, \qquad \partial^2 F/\partial t^2= -1/S^2$$

$$dF= [\, 0 + \alpha S\, 1/S + ½(\sigma S)^2\, 1/S^2]\, dt + \sigma S\, 1/S\, dz = (\alpha-\sigma^2)dt+ \sigma dz$$

Assim, baseado nos resultados obtidos acima e na análise do movimento browniano, tem-se que dentro do intervalo de tempo T, a variação em log S segue uma distribuição normal com média T. A versão discreta da equação estocástica acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$Log(S_{t+1}/S_t) = (\alpha-\sigma^2/2)\Delta t+ \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t$$

$$S_{t+1} = S_t\, e^{\,[(\alpha-\sigma 2/2)\Delta t+ \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon t]}$$

Pois Δz é um processo de Wiener $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t})$, ε_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, a data $t+1$ é igual a $t+\Delta t$, $\Delta F=(logS_{t+1} - logS_t)$, e ΔF, Δt , e Δz, são as versões discretas de dF, dt, e dz respectivamente.

3.4
Simulação de MonteCarlo

Os métodos de simulação fundamentam-se na amostragem de possíveis caminhos percorridos pelo preço dos ativos-objeto até a data de vencimento do contrato. No vencimento, para cada possível caminho percorrido, calcula-se o preço do derivativo correspondente, trazendo-o a valor presente. Se um número suficientemente grande de caminhos é amostrado, então se avalia o preço do derivativo através de uma média aritmética dos valores presentes de todos os resultados obtidos segundo a amostragem realizada.

Pela sua característica genérica, o método de simulação pode ser utilizado para diversas precificações de derivativos, principalmente aquelas que possuem modelos estocásticos mais complexos.

Além disso, o método utiliza intensamente recursos tecnológicos por exigir uma grande amostra de caminhos para determinação de uma estimativa média com um erro aceitável. Problemas de velocidade de convergência podem também tornar o método de simulação extremamente demorado.

Em derivativo, utiliza-se o método de simulação de Monte Carlo onde é realizada uma amostra de caminhos aleatórios hipotéticos que seriam percorridos pelos preços dos ativos, respeitando-se a hipótese de ausência de oportunidades de arbitragem. Para cada caminho hipotético calcula-se o preço do derivativo relacionado ao ativo-objeto de acordo com as características do contrato. Para cada caminho, calcula-se o valor presente do preço do ativo objeto. Se este valor for estimado segundo inúmeros caminhos aleatórios, obtém-se uma distribuição de probabilidade dos possíveis valores dos derivativos. O preço do derivativo é estimado através da média da distribuição.

Tecnicamente, pode-se utilizar a simulação de Monte Carlo sem restrições significantes que são impostas pela teoria financeira, representando uma vantagem sobre os métodos analíticos e de árvores de decisão.

3.5
Gerador de Números Aleatórios

Normalmente refere-se a "numero aleatório", um número pertencente a uma seqüência aleatória gerada uniformemente distribuída no intervalo [0,1]. Porém alguns conhecidos tipos de geradores utilizam o registro do termo anterior na geração do novo elemento. É definida como seqüência de números aleatórios (independentes) se cada um deles foi obtido casualmente e o conhecimento de um deles não permitir obter qualquer informação sobre os outros que constituem a seqüência. Normalmente quando se fala de seqüências de números aleatórios que se trata de numero com distribuição uniforme (cada um tem a mesma probabilidade de ser gerado que qualquer outro).

Seqüências Quasi-Aleatórias

Uma seqüência quase-aleatória (ou sub-aleatória) é uma seqüência de amostras representativas de uma distribuição de probabilidades. Essas amostras são determinísticas, e não aleatórias, e são retiradas de modo que os “espaços” deixados entre as amostras sejam preenchidos, reduzindo o desvio-padrão da simulação de Monte Carlo e aumentando a velocidade de convergência.

Suponha que se deseja calcular a integral de uma função f(x), através do método de Monte Carlo, dentro de um intervalo [0,1], usando N pontos ou observações. Ao invés de se tomar os pontos de uma seqüência aleatória (ou pseudo-aleatória), pega-se os pontos de uma seqüência determinística, onde eles são, de certa forma, distribuídos igualmente. Dessa forma, a precisão da estimativa da integral será superior àquela obtida com a seqüência aleatória.

Números pseudo-aleatórios

Com o advento dos computadores, as deficiências mencionadas, anteriormente, acerca dos métodos de geração de números aleatórios', levaram ao aparecimento de métodos mais eficientes para utilização em computador, fazendo deste.

Deve-se a John V. Neumann o primeiro destes métodos que se utiliza operações aritméticas: o "Mid-square”, em que cada número da seqüência é obtido a partir do anterior, elevado este ao quadrado e aproveitando, depois, os dígitos do meio do resultado encontrado.

Por exemplo, consideremos, como primeiro numero

$$x_1=81 \quad x_1^2= 6561 \quad x_2=56$$

Se continuarmos, obtemos a seguinte seqüência 81, 56, 13, 16, 25, 62, 84, 5, 25, 62,....

Esta série de valores ilustra um dos problemas comuns a todos os métodos de geração de números pseudo-aleatórios. Ela possui um limite, há um valor de sequência que se repete e o ciclo se repete indefinidamente.

Outra objeção que se pode por a estes métodos é até que ponto uma sequência de números, gerados por um processo puramente determinístico, pode ser considerada aleatória? Uma justificação pragmática consiste em reconhecer que não se trata de números aleatórios, mas acrescentar que eles se comportam como tal (especialmente dos pontos de vista da equiprobabilidade e independência). Portanto, embora não o sejam, esses números parecem ser realmente aleatórios: daí o seu nome: pseudoaleatórios.