

# 1

## Introdução

A avaliação de contratos de opções é um assunto que tem despertado o interesse de pessoas nos meio acadêmico e financeiro. Os acadêmicos se preocuparam com o desenvolvimento de uma teoria que explicasse a lógica dos preços das opções e com a construção de uma fórmula que resultasse em um preço de equilíbrio. Neste sentido, os trabalhos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) foram tão importantes para que se pudesse compreender a complexidade por trás deste assunto que, em 97, Scholes e Merton receberam o Prêmio Nobel de Economia. Os profissionais do setor financeiro, por outro lado, estiveram mais interessados no desenvolvimento de novas operações de opções e na possibilidade de se obter ganhos de arbitragem. Estas também tiveram sua relevância ao cumprir o papel de disseminação das operações envolvendo opções.

Apesar do sucesso e da importância obtidos no mundo acadêmico e financeiro pelos derivativos, poucos autores procuraram explorar de forma didática os resultados matemáticos referentes à avaliação de opções.

Devido à complexidade das equações para precificação de opções, é comum a sua utilização sem o devido entendimento. O modelo de Black e Scholes, por exemplo, pode ser inserido em uma planilha eletrônica ou calculadora financeira, e qualquer pessoa conseguirá obter o resultado final desde que conheça as variáveis da equação.

A compreensão do raciocínio e das passagens matemáticas que levaram à formação da equação de Black e Scholes proporciona uma vantagem: a de abstrair elementos importantes para a construção de modelos para avaliação de opções. No trabalho da dissertação serão analisados os modelos de Vasicek(1977) e Black-Derman-Toy(1990) para apreçamento da opção européia sobre contrato futuro. Para o modelo de Vasicek, que apresenta um elemento de reversão à média, será utilizado o método de simulação de Monte Carlo para simular o processo estocástico da taxa de juros (ativo objeto) e calcular o prêmio das opções. O

modelo de Black-Derman-Toy será implementado numericamente através de árvores binomiais.

O desenvolvimento tecnológico acelerou a criação de estudos avançados para modelagem de cenários e cálculos estocásticos e permitiu o uso de produtos financeiros mais complexos para a diversificação e proteção de investimentos.

O modelo Simulação de Monte Carlo é um exemplo desta tecnologia que utiliza ferramentas estatísticas para simular o comportamento de variáveis estocásticas. O método é um instrumento poderoso e de fácil implementação para calcular preços de opções em que não existem soluções analíticas.

O capítulo 2 apresentará características do Mercado Futuro, teorias da formação da curva de juros e derivativos.

No capítulo 3 encontram-se definições relacionadas a processos estocásticos, Wiener, simulação de Monte Carlo e gerador de números aleatórios.

O capítulo 4 apresenta o modelo teórico de Black Derman Toy e a estrutura das árvores binomiais necessário para construção da árvore de juros.

O capítulo 5 apresenta o modelo teórico de Vasicek que tem como principal característica o processo estocástico de reversão à média.

No capítulo 6 são apresentadas as especificações definidas pela BM&F para negociação de contratos futuro de DI e Opção sobre DI Futuro.

No capítulo 7 são apresentados os cálculos de parâmetros dos modelos como volatilidade, estrutura a termo de juros e índice de reversão e a precificação da opção pelos modelos de Vasicek e BDT. Neste momento será apresentado um exemplo prático para o entendimento dos modelos.

No capítulo 8 são gerados resultados das opções para diferentes séries, vencimentos e exercícios. Para comparar os modelos serão realizadas análises de sensibilidade para volatilidade e strike da opção.

No último capítulo são apresentadas considerações finais e sugestões para o próximo trabalho.

## 1.1

### Revisão Bibliográfica

Os primeiros modelos de taxa instantânea de juro propostos na literatura eram contínuos no tempo e supunham que a dinâmica da taxa instantânea

dependia apenas de coeficientes constantes. O sucesso de modelos como Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) foi devido principalmente à possibilidade do apereçamento analítico de títulos e seus derivativos.

Duas diferentes estratégias têm sido as mais utilizadas pela literatura para modelar a dinâmica da taxa de juros de curto prazo: modelos de equilíbrio e os modelos de não arbitragem. Os modelos de equilíbrio partem de hipóteses sobre o comportamento econômico das variáveis e obtêm a dinâmica da taxa de juros livre de risco como resultado. Os modelos de não arbitragem utilizam a estrutura a termo da taxa de juros como informação inicial para precificar derivativos de taxa de juros como títulos.

Os modelos de equilíbrio se dividem em classes. As duas mais importantes são: modelos de um fator e dois fatores. A classe dos modelos de equilíbrio de um fator foi largamente utilizada pela literatura em trabalhos empíricos. Estes modelos assumem que o processo estocástico da taxa de juros possui um fator comum de incerteza. A principal característica dos modelos de um fator é que as taxas para diferentes vencimentos movem-se na mesma direção em qualquer intervalo de tempo mas não mudam com a mesma magnitude. Isso não implica que a estrutura a termo possua o mesmo formato. Por sua vez, nos modelos de um fator, a estrutura a termo inicial da taxa de juros é resultado do modelo.

O modelo de Vasicek (1977) foi historicamente uma das primeiras tentativas de modelagem da estrutura a termo e, devido à hipótese de distribuição normal para a taxa instantânea de juro, permite resultados analíticos tanto para o preço de títulos quanto de opções européias.

Nos modelos de não arbitragem, o processo estocástico e os parâmetros respectivos passam a ser dependente do tempo. Assim, a estrutura a termo da taxa de juros pode ser ajustada à estrutura a termo inicial. Nestes modelos, tal estrutura é um “input”. Entretanto, como a dependência temporal adotada é geralmente arbitrária, estes modelos podem prever comportamentos inadequados para taxas de juros futuras. Outra desvantagem é que é necessário estimá-los periodicamente de forma a ajustar a estrutura a termo atual.

O modelo de Black-Derman-Toy (1990) foi um dos primeiros modelos a assumir log-normalidade na distribuição das taxas instantâneas de juro, evitando a maior desvantagem do modelo de Vasicek que permitia taxas negativas. No entanto, essa vantagem fez com que o modelo fosse desenvolvido de forma

algorítmica, devendo ser implementado numericamente através de uma árvore binomial.

O problema no ajuste à estrutura a termo de taxas de juro resultante dos modelos de equilíbrio foi analisado por Hull White em seu artigo de 1990 e subsequentes. Ho e Lee (1986) foram os primeiros a propor uma estrutura a termo exógena, porém o modelo estava baseado na hipótese de uma árvore binomial comandar a evolução da estrutura inteira de taxas e, mesmo em tempo contínuo, o modelo não era uma extensão apropriada do modelo de Vasicek, uma vez que não apresentava reversão à média na dinâmica de taxas de juro.

A necessidade de um ajuste exato à estrutura a termo observada no mercado levou Hull e White (1990) à introdução de um parâmetro variável com o tempo no modelo de Vasicek e, considerando esse parâmetro, o modelo proposto é também capaz de ajustar-se à estrutura a termo de volatilidades.

Heath, Jarrow e Morton (1992) desenvolveram um novo modelo em que procuraram tratar toda a estrutura de taxas de juro e não apenas a taxa instantânea. O modelo apresentou em tempo contínuo, o que Ho e Lee (1986) trataram em uma estrutura binomial.

## 1.2

### **Posicionamento da Dissertação no Contexto Científico**

Atualmente os produtos transacionados no mercado financeiro vêm apresentando uma constante sofisticação. Particularmente, o crescimento da importância dos derivativos aumentou, consideravelmente, a complexidade das carteiras ampliando o número de fontes de risco às quais elas estão sujeitas. Neste contexto, torna-se fundamental o desenvolvimento de técnicas que permitam o hedge, isto é, proteger investimentos ou garantir um determinado fluxo de caixa contra potencial perda devido à volatilidade dos ativos financeiros.

O contrato futuro de taxa de juros padrão dos EUA e da Europa possui como ativo objeto um título de renda fixa que vencerá em determinado número de meses depois do vencimento do futuro. Por razões ligadas à possibilidade de hedge e combinação de posições, a opção sobre taxa de juros padrão destas regiões espelha a forma do contrato futuro, isto é, o ativo objeto da mesma opção

também costuma ser um título de renda fixa vencendo meses depois de seu término.

Devido ao caráter de permanente instabilidade macroeconômica e financeira interna, o mercado brasileiro negocia títulos com prazos muito mais curtos que os norte-americanos e europeus. Em decorrência disso, o contrato futuro de taxa de juros criado no Brasil, o futuro de DI, é substancialmente distinto do contrato padrão dos demais mercados.

Ao invés de ser um contrato futuro de taxa de juros, propriamente dito, o futuro de DI se comporta exatamente como um título de renda fixa no mercado à vista, porém sujeito a marcações a mercado diárias (ajustes diários).