

## 2

# Modelagem Cinemática para Calibração de Manipuladores

### 2.1.

#### Introdução

A modelagem cinemática é o primeiro passo para o processo de calibragem do manipulador. O modelo cinemático do manipulador permite determinar, a partir dos ângulos de cada junta, as posições e orientações das juntas e da extremidade do manipulador. O processo de calibração inclui a mudança dos parâmetros do modelo cinemático para compensar erros.

Uma forma matematicamente conveniente para descrever posições e orientações dos diversos eixos do sistema é a utilização de transformações homogêneas. Inicialmente, estabelecem-se sistemas de coordenadas de referência para os diversos subsistemas, como visto na Figura 2, obtida do manual técnico do manipulador. A seguir, adicionam-se sistemas de coordenadas locais para cada parte móvel. No caso de um manipulador robótico, um sistema de coordenadas local é adicionado a cada eixo do robô, tendo sua base como o sistema de coordenadas inicial. Um conjunto de matrizes de transformação 4x4 relaciona cada sistema de coordenadas local com a de seu vizinho.

Além da cinemática direta, pode-se também fazer uma modelagem da cinemática inversa, na qual se obtêm os ângulos de cada junta a partir do conhecimento da posição e da orientação da extremidade do manipulador. Esta modelagem normalmente é mais complexa e nem sempre possui solução. Para tal modelagem, faz-se necessário inicialmente obter, pela cinemática direta, as matrizes de transformação homogênea.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a seção 2.2 apresenta conceitos básicos de cinemática, necessários para a modelagem cinemática do TA-40 (incluindo as equações de Rodrigues, transformações homogêneas e matrizes de rotação gerais). A seção 2.3 inclui a convenção de modelagem de

Denavit-Hartenberg (D-H). A seção 2.4 demonstra a metodologia de calibração do TA-40. A seção 2.5 finaliza o capítulo com a cinemática inversa do manipulador.

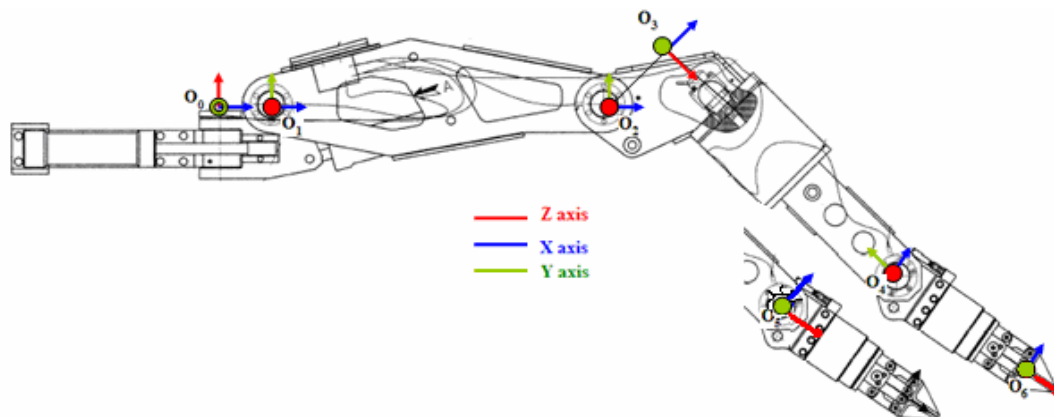


Figura 2: Coordenadas de referência dos diversos subsistemas (elos)

## 2.2.

### Conceitos Básicos de Cinemática

A movimentação de um corpo rígido no espaço pode ser convertida em uma translação e uma rotação em relação a um eixo. Se este eixo for caracterizado como um vetor chamado  $k$ , o movimento de um corpo rígido define-se por uma rotação de um ângulo  $\theta$  ao redor deste eixo e uma translação de distância  $d$  paralela a  $k$ . Os parâmetros  $(d, \theta)$  definem a movimentação em relação ao eixo  $k$ .

Considera-se  $P$  um ponto arbitrário do corpo rígido e  $S$  um ponto arbitrário no eixo  $k$ . Considera-se também  $r_s$  a posição de  $S$  em relação a um eixo de coordenadas de referência, e  $r_p^{(i)}$  a posição do ponto  $P$  em relação ao mesmo eixo de referência no momento  $i$ . Pela equação de Rodrigues (Murray, R. M.; 1994), é possível relacionar os pontos  $r_p^{(i)}$  e  $r_p^{(i+1)}$  através dos parâmetros de  $r_s, k, d$  e  $\theta$ :

$$r_p^{(i+1)} = (r_p^{(i)} - r_s) \cos \phi + k \times (r_p^{(i)} - r_s) \sin \phi + [(r_p^{(i)} - r_s) \cdot k] k (1 - \cos \phi) + r_s + dk \quad \text{Eq. 2.2.1}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r_{p,x}^{(i+1)} \\ r_{p,y}^{(i+1)} \\ r_{p,z}^{(i+1)} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} r_{p,x}^{(i)} \\ r_{p,y}^{(i)} \\ r_{p,z}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \text{Eq. 2.2.2}$$

Onde a matriz  $R$  de rotação 3x3 é definida por:

$$R \equiv \begin{bmatrix} n_x & p_x & b_x \\ n_y & p_y & b_y \\ n_z & p_z & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^2 v\phi + c\phi & k_x k_y v\phi + k_z s\phi & k_x k_z v\phi - k_y s\phi \\ k_x k_y v\phi + k_z s\phi & k_y^2 v\phi + c\phi & k_y k_z v\phi - k_x s\phi \\ k_x k_z v\phi - k_y s\phi & k_y k_z v\phi - k_x s\phi & k_z^2 v\phi + c\phi \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.2.3}$$

Onde  $v\phi = (1 - \cos \phi)$ ,  $s\phi = \sin \phi$  e  $c\phi = \cos \phi$ .

A matriz  $R$  é a matriz geral de rotação de um ângulo  $\phi$  em torno de um eixo  $k$ . Essa matriz pode ser denotada por  $Rot(k, \phi)$ . Os três vetores unitários  $n$ ,  $p$  e  $b$  são conhecidos respectivamente como normal, orientação e proximidade, respectivamente.

A Equação (2.2.2) pode ser escrita de forma mais compacta através da matriz de transformação homogênea  $T$ .

$$\begin{bmatrix} r^{(i+1)} \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.2.4}$$

Onde:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.2.5}$$

Pode-se, assim, obter matrizes de transformação homogêneas para algumas movimentações básicas de um corpo rígido. Considerando  $d=0$  e uma rotação de  $\theta$  em relação ao eixo  $x$ , ou seja  $k=(1,0,0)^T$ :

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente, pode-se encontrar a rotação de um ângulo  $\Psi$  ao redor do eixo  $y$ :

$$Rot(y, \Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & 0 & \sin \Psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Psi & 0 & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E a rotação de um ângulo  $\varphi$  ao redor do eixo  $z$ :

$$Rot(z, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de translação sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , por distâncias  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, pode ser obtida pela combinação das três translações básicas:

$$Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sequência de dois movimentos  $T_1$  e  $T_2$  é obtida pela multiplicação de ambas as matrizes  $T_1 T_2$ . Esta transformação é vista fisicamente como a transformação do eixo em uma localização  $P_1$  para um eixo em  $P_2$ .

### 2.3.

#### Convenção de Modelagem de Denavit-Hartenberg

Um manipulador é usualmente constituído por um grupo de corpos rígidos, ou elos, conectados por juntas. No caso do TA-40, como em muitos manipuladores industriais, cada elo se conecta a dois outros membros. Logo, cada

elo tem dois eixos. A modelagem de elos de Denavit-Hartenberg (DH) caracteriza a estrutura cinemática do manipulador em termos de parâmetros físicos de cada elo.

A convenção de DH permite encontrar uma transformação da base do manipulador até sua extremidade, fazendo-se necessário definir as coordenadas dos elos e utilizar uma técnica sistemática que permita descrever a cinemática do robô de  $n$  graus de liberdade de forma única.

A Figura 3 mostra um par de elos adjacente, elo  $i-1$  e elo  $i$ , e suas juntas associadas, juntas  $i+1$  e  $i$ . A linha  $\overline{H_i O_i}$  na figura é chamada de **normal comum** entre os eixos  $i$  e  $i+1$ . A relação entre dois elos pode ser descrita pela posição e orientação relativa entre os dois sistemas de coordenadas ligados aos dois elos. Na notação DH, a origem do  $i$ -ésimo sistema de coordenadas está localizado na interseção entre os eixos  $i+1$  e a normal comum entre os eixos das juntas  $i$  e  $i+1$ , como mostrado na Figura 3. Nota-se que o sistema de coordenadas do elo  $i$  está na junta  $i+1$  e não na junta  $i$ . O eixo  $x_i$  tem sua direção na extensão da linha formada pela normal comum, enquanto que o eixo  $z_i$  está na direção do eixo da junta  $i+1$ . Finalmente, o eixo  $y_i$  é escolhido como eixo resultante.

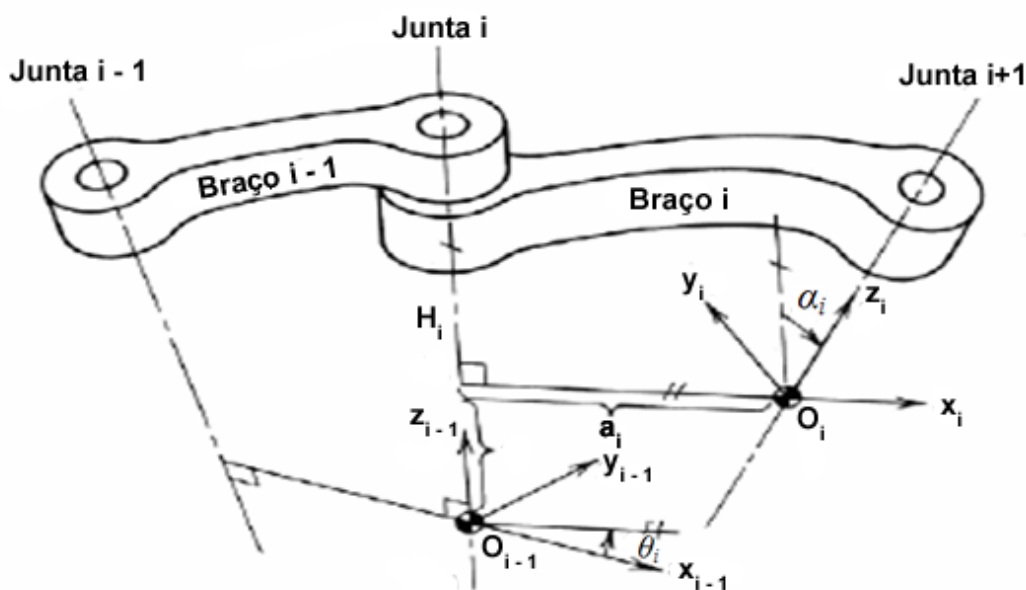


Figura 3: Parâmetros de Denavit-Hartenberg

A posição relativa entre os dois sistemas de coordenadas pode ser completamente deduzida a partir dos seguintes parâmetros:

$a_i$  – tamanho da normal comum

$d_i$  – distancia entre o ponto  $O_{i-1}$  e  $H_i$

$\alpha_i$  – ângulo entre as juntas  $i$  e o eixo  $z_i$  no sentido da mão direita

$\theta_i$  – ângulo entre o eixo  $x_i$  e a normal comum medida sobre o eixo  $z_i$  usando o sentido da mão direita.

Os dois primeiros parâmetros são constantes e determinados pela geometria do elo, enquanto que os dois últimos variam de acordo com o tipo de movimento da junta. No caso de juntas revolutas, o valor de  $\theta_i$  indica o movimento angular da junta, enquanto que o parâmetro  $d_i$  se manterá constante. Por outro lado, em juntas prismáticas, o contrário ocorre, sendo  $d_i$  um parâmetro variável.

A convenção de modelagem DH inicialmente associa um eixo de coordenadas  $\{x_i, y_i, z_i\}$ ,  $i=0, \dots, n$  para cada elo. A base, a extremidade do robô, e o ambiente são denotados respectivamente como eixos de coordenadas dos elos 0,  $n$  e  $n+1$ . Para um manipulador serial, o número de graus de liberdade é exatamente  $n$ . Para uma junta de revolução, a origem do sistema de coordenadas  $i-1$  está na junta  $i$ . Para uma junta prismática, por outro lado, a origem pode ser decidida arbitrariamente. A direção positiva do eixo  $i$  define o vetor unitário  $z_{i-1}$ .

A transformação do sistema de coordenadas do mundo para o da extremidade é:

$$T_n^0 = A_0 A_1 A_2 \dots A_i \dots A_{n-1} A_n \quad \text{Eq. 2.3.1}$$

Onde  $A_i$  é a matriz de transformação homogênea entre o sistema de coordenadas  $i$  com respeito ao sistema de coordenadas  $i-1$ . A transformação de elos  $A_i$  é representada, portanto, pelos seus quatro parâmetros  $(\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i)$ . A construção das matrizes  $A_i$  para elos internos  $i=1, 2, \dots, n-1$  é mostrada a seguir. Se a  $i$ -ésima junta é revoluta, as seguintes transformações são necessárias para passar do sistema de coordenadas  $i-1$  ao sistema  $i$ .

- Rotacionar o sistema de coordenadas  $i-1$  ao redor do eixo  $z_{i-1}$  em um ângulo  $\theta_i$ , de modo que o eixo  $x$  do sistema de coordenadas em movimento seja paralelo ao eixo  $x_i$ .
- Transladar o sistema de coordenadas pelo eixo  $z_{i-1}$  na distância  $d_i$ , para a origem do sistema em movimento alcançar o ponto de interseção entre o eixo da  $i$ -ésima junta e a normal comum.
- Transladar o sistema de coordenadas pelo eixo  $x_i$  na distância  $a_i$ , para a origem do sistema em movimento coincidir com a do sistema de coordenadas  $i$ .
- Rotacionar o sistema de coordenadas  $i-1$  ao redor do eixo  $x_{i-1}$  em um ângulo  $\alpha_i$ , de modo que o eixo em movimento esteja agora coincidente com o eixo de coordenadas  $i$ .

$$A_i = Rot(z, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(a_i, 0, 0) Rot(x, \alpha_i) \quad \text{Eq. 2.3.2}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & 0 & a_i \sin \theta_i \\ 0 & 0 & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.3.3}$$

Similarmente, se a  $i$ -ésima junta for prismática, por definição  $a_i=0$  e a variável passa a ser  $d_i$

$$A_i = Rot(z, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Rot(x, \alpha_i) \quad \text{Eq. 2.3.4}$$

No caso de juntas consecutivas com eixos paralelos, a convenção DH estipula que a normal comum que satisfaz  $d_i=0$  é selecionada.

O sistema de coordenadas do mundo e da extremidade são usualmente definidos pelo usuário. O sistema de coordenadas da base, por outro lado, é comumente definido pelo fabricante.

## 2.4.

### Método Clássico de Calibração de Manipuladores

Uma vez obtidas as matrizes homogêneas que modelam o manipulador a partir dos parâmetros de DH, seria possível determinar a posição através de uma simples multiplicação destas matrizes a partir das coordenadas da base. Porém, como já foi dito antes, o manipulador possui diversos erros, que apesar de serem pequenos em cada elo, provocam um efeito grande na extremidade.

Os erros podem ser classificados como “repetitivos” e “randômicos” (Slocum A., 1992). Erros repetitivos são aqueles nos quais os valores numéricos e sinais são constantes durante uma configuração do manipulador e peso carregado. Exemplos de erro repetitivo é um erro resultante das tolerâncias de fabricação dos componentes do manipulador e deflexões devido ao carregamento de cargas pesadas. Erros randômicos são erros cujo valor numérico e sinal mudam sem previsibilidade. Um exemplo de um erro randômico ocorre no escorregar dos dentes de uma engrenagem do atuador. A calibração que será feita sobre o TA-40 corrigirá apenas os erros repetitivos.

Como visto na seção anterior, a cinemática do manipulador é modelada por um conjunto de matrizes homogêneas que transformam o sistema de coordenadas de um elo para outro. A posição e orientação do sistema de coordenadas de referência  $F_i$ , com respeito ao anterior  $F_{i-1}$ , é definido por uma matriz 4x4  $A_i$ , que possui a forma geral:

$$A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{T}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.4.1}$$

O termo  $\mathbf{R}_i$  é uma matriz 3x3 de rotação, entre o sistema de coordenadas  $F_i$  e o sistema  $F_{i-1}$ , e  $\mathbf{T}_i$  é um vetor 3x1 que translada o centro do sistema  $F_i$  até o sistema  $F_{i-1}$ , como visto na Figura 4. Os elementos da matriz  $A_i$  dependem dos parâmetros de DH para aquele elo.



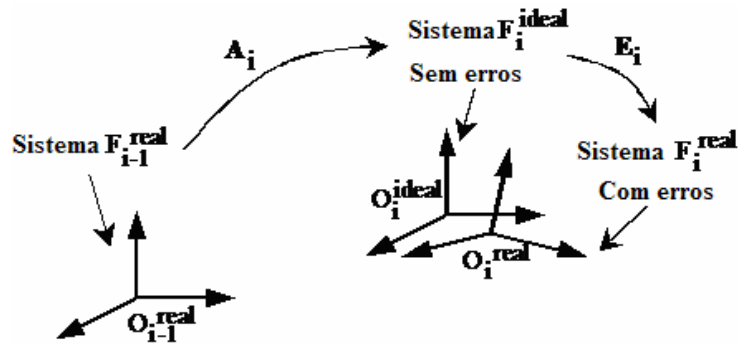


Figura 4: Translação e Rotação do sistema devido ao erro no i-ésimo elo

Os erros são expressos como mais uma matriz de transformação homogênea que desloca a posição final do elo subsequente em relação ao ideal. Os efeitos destes erros nas juntas, por menores que sejam, são acumulados de junta em junta podendo provocar um erro considerável na extremidade.

A matriz homogênea 4x4  $E_i$  produz o deslocamento da posição e orientação do sistema de coordenadas real  $F_i^{real}$  com respeito a sua localização ideal  $F_i^{ideal}$ . A Equação 2.4.2 mostra o formato da matriz de erros  $E_i$ .

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_r & \varepsilon_s & \varepsilon_x \\ \varepsilon_r & 1 & -\varepsilon_p & \varepsilon_y \\ -\varepsilon_s & \varepsilon_p & 1 & \varepsilon_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.4.2}$$

Os seis parâmetros  $\varepsilon_{x,b}$ ,  $\varepsilon_{y,b}$ ,  $\varepsilon_{z,b}$ ,  $\varepsilon_{s,b}$ ,  $\varepsilon_{r,i}$  e  $\varepsilon_{p,i}$  são chamados parâmetros de erro generalizados, os quais podem ser função da geometria do sistema e das variáveis das juntas. Para um manipulador de  $n$  graus de liberdade, existem  $6(n+1)$  erros generalizados que podem ser escritos na forma de um vetor de dimensão  $6(n+1) \times 1$ :  $\varepsilon = [\varepsilon_{x,0}, \dots, \varepsilon_{x,b}, \varepsilon_{y,b}, \varepsilon_{z,b}, \varepsilon_{s,b}, \varepsilon_{r,b}, \varepsilon_{p,b}, \dots, \varepsilon_{p,n}]^T$ , com  $i = 0 \dots n$  (supondo que ambos o manipulador e sua base estão sendo calibrados). Se o manipulador é calibrado em relação à sua própria base, então a matriz de erro  $E_0$  (que modela os erros da localização da base) é eliminada, reduzindo o número de erros generalizados para  $6n$ . Os erros generalizados que dependem da geometria do sistema podem ser calculados dos erros físicos elo a elo.

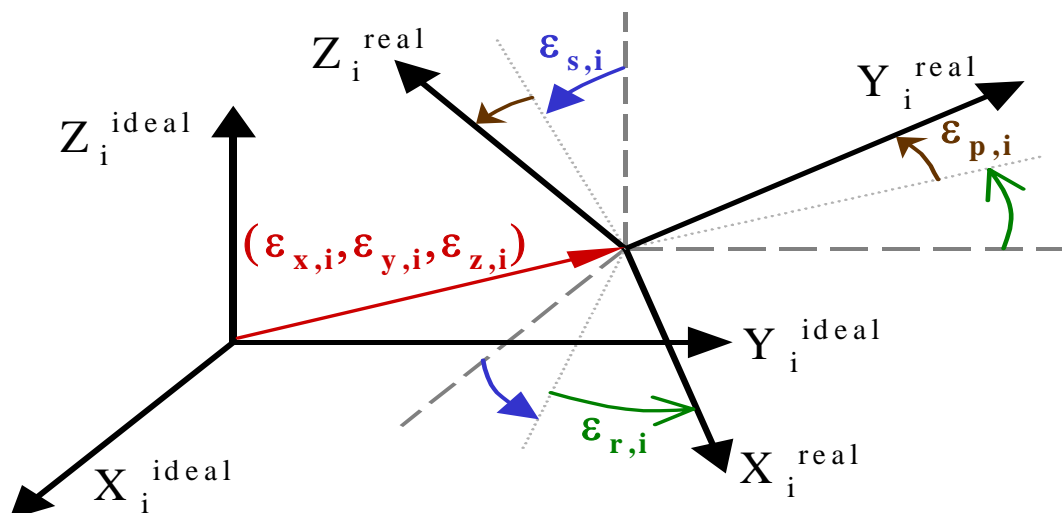


Figura 5: Erros Generalizados para i-ésimo Elo

Definido o erro como uma matriz de transformação homogênea, pode-se estender a Equação 2.3.1 de forma a incluí-los:

$$T_n^0(q, \varepsilon) = E_0 A_0 E_1 A_1 E_2 A_2 \dots A_{n-1} E_{n-1} A_n E_n \quad \text{Eq. 2.4.3}$$

A matriz  $T_n^0$  é uma a matriz homogênea 4x4 na forma da Equação (2.2.5) e descreve a posição e orientação da extremidade do manipulador com respeito ao sistema de coordenadas inercial da base como função dos parâmetros de configuração  $q$  e do vetor de erros generalizados  $\varepsilon$ .

É possível definir o vetor 6x1 da posição e orientação da extremidade  $\mathbf{X}^{real}$  como os componentes translacionais e os componentes formados pelos três ângulos rotacionais da matriz  $T_n^0$ . Se for utilizada a diferença entre a posição real e a ideal, ter-se-á erro de posição e orientação da extremidade do manipulador  $\Delta\mathbf{X}$ :

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{real} - \mathbf{X}^{ideal} \quad \text{Eq. 2.4.4}$$

Considerando-se que os erros generalizados são pequenos,  $\Delta\mathbf{X}$  pode ser calculado pela seguinte equação linear em  $\varepsilon$ :

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{J}_e \varepsilon \quad \text{Eq. 2.4.5}$$

Onde  $J_e$  é a matriz Jacobiana  $6 \times 6(n+1)$  do erro da extremidade  $\Delta X$  com respeito aos elementos do vetor de erros generalizados  $\varepsilon$ , também conhecida como a matriz Jacobiana de Identificação (Zhuang H., pp.805-810, 1999). Assim como no caso dos erros generalizados,  $J_e$  depende da configuração do sistema, geometria e cargas carregadas.

No processo de calibração, deve-se encontrar a matriz Jacobiana de Identificação a partir dos parâmetros cinemáticos, e tomar um conjunto de medidas da posição real da extremidade do manipulador em diversas configurações. Uma vez de posse destes dados, utiliza-se a Eq. 2.4.5 para obter os erros generalizados  $\varepsilon$  com uma simples inversão da matriz jacobiana. Uma vez de posse dos erros generalizados, estes podem ser utilizados para calcular a posição real do manipulador em qualquer configuração. Pode-se também utilizar a Equação 2.4.5 para compensar os erros. A Figura 6 mostra um esquema do algoritmo de compensação de erros baseado na Equação 2.4.5. O método de encontrar  $\varepsilon$  a partir de medidas experimentais é descrito a seguir.

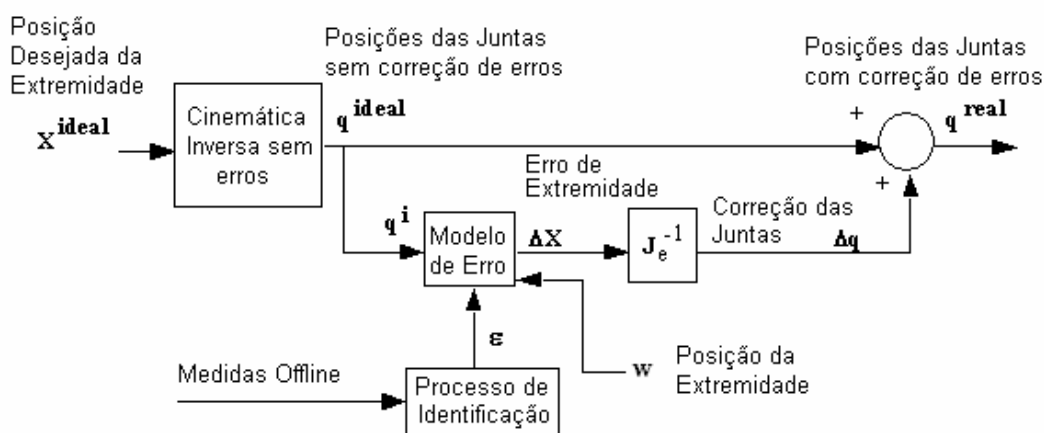


Figura 6: Esquema de Compensação de Erro

Para calcular os erros generalizados  $\varepsilon$  considera-se que alguns componentes do vetor  $\Delta X$  podem ser medidos em um número finito de diferentes configurações do manipulador. Porém, como coordenadas de posições são muito mais simples de se medir do que orientações, em muitos casos apenas as três coordenadas das posições de  $\Delta X$  são medidas.

Supondo que todas as 6 componentes de  $\Delta X$  podem ser medidas, para um manipulador de  $n$  graus de liberdade,  $6(n+1)$  erros generalizados  $\boldsymbol{\varepsilon}$  podem ser calculados medindo-se  $\Delta X$  em  $m$  configurações diferentes, definidas como  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ , e então escrevendo a Equação 2.4.5  $m$  vezes:

$$\Delta \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_1 \\ \Delta \mathbf{X}_2 \\ \dots \\ \Delta \mathbf{X}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_e(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{J}_e(\mathbf{q}_2) \\ \dots \\ \mathbf{J}_e(\mathbf{q}_m) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2.4.6}$$

Na Equação 2.4.6,  $\Delta \mathbf{X}_t$  é o vetor  $m \times 1$  formado por todos os vetores medidos  $\Delta X$  em  $m$  configurações diferentes e  $\mathbf{J}_t$  é a matriz  $6m \times 6(n+1)$  formada pelas  $m$  matrizes Jacobianas de Identificação  $\mathbf{J}_e$  em  $m$  configurações, denominada aqui de Jacobiano de Identificação Total. Para reduzir os efeitos de ruído de medidas,  $m$  é, em geral, muito maior do que  $n$ .

Considerando-se que os erros generalizados  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são repetitivos e constantes, uma estimativa única por mínimos quadrados  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  pode ser calculada por:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t)^{-1} \mathbf{J}_t^T \cdot \Delta \mathbf{X}_t \quad \text{Eq. 2.4.7}$$

Porém, se a matriz de identificação jacobiana  $J_e(q_i)$  contiver colunas linearmente dependentes, a Equação 2.4.7 vai produzir estimativas com baixa precisão devido ao fraco condicionamento da matriz (Hollerbach, pp. 573-591, 1996). Isto ocorre quando há redundância no modelo de erro, e neste caso não é possível distinguir a contribuição de cada componente dos erros generalizados sobre o erro total.

## 2.5.

### Eliminação de Erros Redundantes

Como visto na seção anterior, os erros redundantes causam baixa precisão ao processo de calibração e precisam ser eliminados. A seguir é apresentado um método analítico para efetuar tal eliminação.

Primeiramente, definem-se as combinações lineares dos coeficientes,  $\mathbf{J}_{x,i}$ ,  $\mathbf{J}_{y,i}$ ,  $\mathbf{J}_{z,i}$ ,  $\mathbf{J}_{s,i}$ ,  $\mathbf{J}_{r,i}$  e  $\mathbf{J}_{p,i}$ , que são colunas de  $\mathbf{J}_e$  associadas aos componentes dos erros generalizados  $\varepsilon_{x,i}$ ,  $\varepsilon_{y,i}$ ,  $\varepsilon_{z,i}$ ,  $\varepsilon_{s,i}$ ,  $\varepsilon_{r,i}$  e  $\varepsilon_{p,i}$ , respectivamente ( $i$  entre 0 e  $n$ ). As combinações lineares dos coeficientes são expressas a partir dos parâmetros DH do manipulador. A Equação 2.4.5 pode ser reescrita como:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{X0} & \dots & \mathbf{J}_{Xi} & \mathbf{J}_{Yi} & \mathbf{J}_{Zi} & \mathbf{J}_{Si} & \mathbf{J}_{Ri} & \mathbf{J}_{Pi} & \dots & \mathbf{J}_{Pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{X0} \\ \dots \\ \varepsilon_{Xi} \\ \varepsilon_{Yi} \\ \varepsilon_{Zi} \\ \varepsilon_{Si} \\ \varepsilon_{Ri} \\ \varepsilon_{Pi} \\ \dots \\ \varepsilon_{Pn} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2.5.1}$$

Para cada elo  $i$ , entre 1 e  $n$ , as seguintes combinações lineares são sempre válidas (Meggiolaro M, Apêndice A, 2000):

$$\mathbf{J}_{z,(i-1)} \equiv \sin \alpha_i \mathbf{J}_{y,i} + \cos \alpha_i \mathbf{J}_{z,i} \quad \text{Eq. 2.5.2}$$

$$\mathbf{J}_{r,(i-1)} \equiv a_i \cos \alpha_i \mathbf{J}_{y,i} - a_i \sin \alpha_i \mathbf{J}_{z,i} + \sin \alpha_i \mathbf{J}_{s,i} + \cos \alpha_i \mathbf{J}_{r,i} \quad \text{Eq. 2.5.3}$$

Se a junta  $i$  for prismática, combinações adicionais para as colunas de  $\mathbf{J}_e$  são encontradas:

$$\mathbf{J}_{x,(i-1)} \equiv \mathbf{J}_{x,i} \quad \text{Eq. 2.5.4}$$

$$\mathbf{J}_{y,(i-1)} \equiv \cos \alpha_i \mathbf{J}_{y,i} - \sin \alpha_i \mathbf{J}_{z,i} \quad \text{Eq. 2.5.5}$$

As combinações lineares mostradas acima estão sempre presentes, independentemente dos valores de  $a_i$  e  $\alpha_i$ , mesmo em casos especiais (como  $a_i=0$ ). Se a posição completa da extremidade (posição e orientação) for medida, então as Equações 2.5.2-2.5.5 são as únicas combinações lineares do elo  $i$ .

Para obter uma matriz Jacobiana de Identificação não singular, chamada aqui de  $G_e$ , as colunas  $J_{z,(i-1)}$  e  $J_{r,(i-1)}$  devem ser eliminadas da matriz  $J_e$  para todos os valores de  $i$  entre 1 e  $n$ . Se a junta  $i$  for prismática, então as colunas  $J_{x,(i-1)}$  e  $J_{y,(i-1)}$  devem ser também eliminadas. Para um manipulador de  $n$  graus de liberdade com  $r$  juntas rotativas e  $p$  ( $p = n-r$ ) juntas prismáticas, um total de  $2r+4p$  colunas devem ser eliminadas do Jacobiano de Identificação  $J_e$  para formar a submatriz  $G_e$ . Isso significa que  $2r+4p$  erros generalizados não podem ser obtidos medindo-se a posição da extremidade.

Por definição, os parâmetros de erros dependentes eliminados por  $\boldsymbol{\varepsilon}$  não afetam o erro da extremidade, resultando na identidade:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{J}_e \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{G}_e \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \text{Eq. 2.5.6}$$

Usando a identidade acima e as combinações lineares das colunas de  $J_e$  das Equações 2.5.2-2.5.5, é possível obter todas as relacionamentos entre o conjunto de erros generalizados  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e seus subconjuntos independentes,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  (ver Apêndice A). Se a junta  $i$  for revolvente ( $i$  entre 1 e  $n$ ), então os erros generalizados  $\varepsilon_{z,(i-1)}$  e  $\varepsilon_{r,(i-1)}$  são eliminados, e seus valores são incorporados aos parâmetros de erro independentes  $\varepsilon_{y,i}^*$ ,  $\varepsilon_{z,i}^*$ ,  $\varepsilon_{s,i}^*$  and  $\varepsilon_{r,i}^*$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_{y,i}^* \equiv \varepsilon_{y,i} + \varepsilon_{z,(i-1)} \sin \alpha_i + \varepsilon_{r,(i-1)} \cdot a_i \cos \alpha_i \\ \varepsilon_{z,i}^* \equiv \varepsilon_{z,i} + \varepsilon_{z,(i-1)} \cos \alpha_i - \varepsilon_{r,(i-1)} \cdot a_i \sin \alpha_i \\ \varepsilon_{s,i}^* \equiv \varepsilon_{s,i} + \varepsilon_{r,(i-1)} \sin \alpha_i \\ \varepsilon_{r,i}^* \equiv \varepsilon_{r,i} + \varepsilon_{r,(i-1)} \cos \alpha_i \end{cases} \quad \text{Eq. 2.5.7}$$

Se a junta  $i$  for prismática, os erros translacionais  $\varepsilon_{x,(i-1)}$  e  $\varepsilon_{y,(i-1)}$  são eliminados, e seus valores são incorporados aos parâmetros de erros independentes  $\varepsilon_{x,i}^*$ ,  $\varepsilon_{y,i}^*$  e  $\varepsilon_{z,i}^*$ . Neste caso, a Equação 2.5.7 passa a ser:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,i}^* \equiv \varepsilon_{x,i} + \varepsilon_{x,(i-1)} \\ \varepsilon_{y,i}^* \equiv \varepsilon_{y,i} + \varepsilon_{y,(i-1)} \cos \alpha_i + \varepsilon_{z,(i-1)} \sin \alpha_i + \varepsilon_{r,(i-1)} \cdot a_i \cos \alpha_i \\ \varepsilon_{z,i}^* \equiv \varepsilon_{z,i} - \varepsilon_{y,(i-1)} \sin \alpha_i + \varepsilon_{z,(i-1)} \cos \alpha_i - \varepsilon_{r,(i-1)} \cdot a_i \sin \alpha_i \\ \varepsilon_{s,i}^* \equiv \varepsilon_{s,i} + \varepsilon_{r,(i-1)} \sin \alpha_i \\ \varepsilon_{r,i}^* \equiv \varepsilon_{r,i} + \varepsilon_{r,(i-1)} \cos \alpha_i \end{cases} \quad \text{Eq. 2.5.8}$$

Se o vetor  $\varepsilon^*$  contendo os erros independentes for constante, a matriz  $G_e$  pode ser usada para substituir  $J_e$  na Equação 2.5.5, e a Equação 2.5.7 é utilizada para calcular um estimador para os erros generalizados independentes  $\varepsilon^*$ , completando o processo de identificação. Porém, se fatores não-geométricos forem considerados, são necessários mais parâmetros do modelo em  $\varepsilon^*$  como função da configuração do sistema anteriormente ao processo de identificação.

## 2.6.

### Representação Física dos Erros Redundantes

O conceito de erros redundantes pode ser melhor compreendido se visto fisicamente. Eles representam erros em juntas distintas que provocam o mesmo resultado na extremidade do manipulador.

A Equação 2.5.2 demonstra que um erro translacional no eixo Z da junta  $i-1$  possui o mesmo resultado na posição e orientação da extremidade que uma combinação de erros translacionais nos eixos Z e Y na junta  $i$  (ver figura 7).

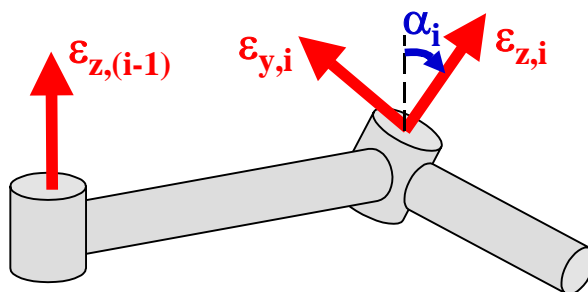


Figura 7: Combinação linear de erros translacionais

Outro exemplo ocorre quando um erro rotacional ao longo do eixo Z na junta  $i-1$  provoca o mesmo efeito que uma combinação de erro rotacional e translacional sobre os eixos Y e Z da junta  $i$ . Este resultado pode ser visto na Equação 2.3.3 e pode ser visto exemplificado na Figura 8.

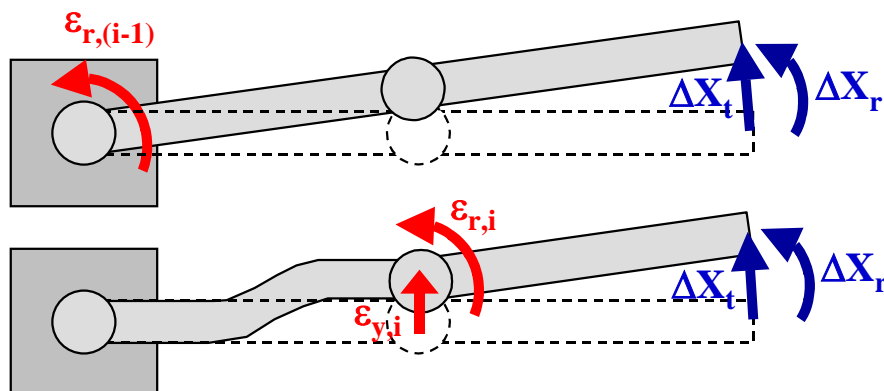


Figura 8: Combinação linear de erros translacionais

## 2.7.

### Medidas Parciais da Posição da Extremidade

Todas as equações obtidas até agora consideram que se tenham medidas completas da posição e orientação da extremidade do manipulador em diversas configurações. Porém conseguir mensurar as orientações da extremidade pode ser pouco prático e portanto vale a pena discutir como chegar aos mesmos resultados portando apenas da posição da extremidade. Neste caso, são formadas combinações lineares adicionais, tendo as três últimas colunas de  $\mathbf{J}_e$  como vetores nulos (Meggiolaro M, Apêndice A, 2000):

$$\mathbf{J}_{s,n} \equiv \mathbf{J}_{r,n} \equiv \mathbf{J}_{p,n} \equiv \mathbf{0} \quad \text{Eq. 2.6.1}$$

A Equação 2.6.1 exprime o fato de que os três erros rotacionais da extremidade,  $\varepsilon_{s,n}$ ,  $\varepsilon_{r,n}$  e  $\varepsilon_{p,n}$  não influenciam na posição da mesma (eles apenas afetam a orientação, as quais não estão sendo medidas). Como resultado, esses erros generalizados não são obtíveis.



Se a última junta for prismática, então nenhuma outra combinação linear é encontrada. Porém, se a última junta é revoluta e o tamanho deste elo  $a_n$  é zero, então mais três combinações lineares estão presentes:

$$\mathbf{J}_{s,(n-1)} \equiv d_n \mathbf{J}_{x,(n-1)} \quad \text{Eq. 2.6.2}$$

$$\mathbf{J}_{p,(n-1)} \equiv -d_n \mathbf{J}_{y,(n-1)} \quad \text{Eq. 2.6.3}$$

$$\mathbf{J}_{r,(n-1)} \equiv \mathbf{0} \quad \text{Eq. 2.6.4}$$

Significando que os efeitos de  $\varepsilon_{s,(n-1)}$  e  $\varepsilon_{p,(n-1)}$  não podem ser distinguidos daqueles causados por  $\varepsilon_{x,(n-1)}$  e  $\varepsilon_{y,(n-1)}$ , e também o erro generalizado  $\varepsilon_{r,(n-1)}$  não é obtível. Se ambos os tamanhos do elo  $a_n$  e a distância da junta  $d_n$  forem zero, então a origem das coordenadas  $n-1$  e  $n$  coincidem na extremidade. Nesse caso, as Equações 2.3.9-2.3.12 podem ser recursivamente aplicadas às coordenadas  $n-1$ ,  $n-2$ , e assim por diante, desde que a origem de todos os sistemas de coordenadas se mantenham na posição da extremidade.

## 2.8.

### Cinemática Inversa

A cinemática direta, encontrada a partir dos parâmetros de Denavit-Hartenberg, permite localizar a posição da extremidade do manipulador em relação à base. As matrizes de transformação encontradas, além disso, têm outra finalidade. A partir delas é possível encontrar a cinemática inversa do manipulador.

A cinemática inversa gera os ângulos de cada junta a partir da posição final da extremidade do manipulador. Com o uso da cinemática inversa passa a ser possível a automatização de tarefas, com um programa capaz de automaticamente calcular as posições de cada junta para movimentar a extremidade até a localização desejada.

Na cinemática direta, a posição da extremidade é determinada unicamente pelos deslocamentos das juntas. Na cinemática inversa, por outro lado, o problema passa a ser mais complexo uma vez que diversas soluções possíveis existem para uma mesma posição da extremidade, ou pode ocorrer de não existirem soluções

para um conjunto particular de posições da extremidade, considerando a estrutura do manipulador. Além destes fatores, uma vez que a equação cinemática é composta por diversas equações não-lineares formadas por funções trigonométricas, não é possível derivar uma solução geral, sendo a cinemática inversa produzida caso-a-caso a partir das equações da cinemática direta. Quando a solução para a cinemática inversa não pode ser calculada analiticamente, esta deve ser obtida por métodos numéricos.

Um braço robótico deve possuir pelo menos seis graus de liberdade para permitir a localização de sua extremidade em um ponto arbitrário e com uma orientação arbitrária no espaço. Manipuladores com menos que seis graus de liberdade podem não permitir tal posicionamento arbitrário. Por outro lado, se o manipulador possuir mais de seis graus de liberdade, existem infinitas possíveis soluções baseadas nas equações cinemáticas, sendo chamados manipuladores redundantes. Considere o exemplo do braço humano, o qual possui sete graus de liberdade, excluindo os dedos. Mesmo com a mão fixada numa parede, é possível mover o cotovelo continuamente sem causar mudanças na localização da mão nem do membro. Isto implica que existem infinitos conjuntos de deslocamentos de juntas que levam a mesma posição da mão.

### **2.8.1.**

#### **Solubilidade**

Nem sempre soluções fechadas para a cinemática inversa podem ser obtidas de forma analítica. Uma alternativa para o método analítico seria aplicar métodos numéricos baseados em algoritmos iterativos, como o Método de Newton-Raphson. Porém, o poder computacional necessário para tais métodos iterativos geralmente é muito maior que o necessário quando se possui uma solução-fechada. Devido a essa complexidade, métodos numéricos são geralmente considerados pouco práticos. Considere um manipulador necessitando mover sua extremidade por uma trajetória. O número de pontos ao longo da trajetória precisa ser transformado em deslocamento de juntas, necessitando portanto de rápida computação. Em particular, o tempo computacional é crucial se a transformação deve ser feita em tempo real.

A existência de soluções fechadas depende da estrutura cinemática do braço robótico. A estrutura cinemática do braço robótico é geralmente desenvolvida para que o problema da cinemática inversa seja possível de se resolver, para evitar complexidade computacional.

Portanto, uma questão importante é descobrir o que faz uma estrutura cinemática passível de solução. (Pieper, D.L., 1968) mostra que uma condição suficiente para que uma estrutura cinemática de um braço robótico de seis graus de liberdade tenha cinemática inversa analítica é que os eixos das juntas de três juntas revolutas consecutivas se interceptem em um único ponto para todas as configurações do braço.

Quando as três últimas juntas interceptam seus eixos em um único ponto, as três juntas são comumente referenciadas como pulso esférico. (Pieper, D. L., 1968) lista todas as possíveis estruturas cinemáticas para manipuladores de seis graus de liberdade que se encaixam neste caso. No capítulo 4 será discutida a cinemática inversa para o manipulador TA-40.