

SOLUÇÕES ANALÍTICAS

4.1

Desenvolvimento

Dentre os mais diversos tipos de estruturas que fazem uso de materiais compósitos, os tubos cilíndricos laminados são um caso particular em que soluções analíticas, sob certas condições de vinculação, para o problema de seu carregamento mecânico são disponíveis na Literatura. Na referência [5], é apresentada a solução exata, no regime elástico, para tubos cilíndricos compostos por camadas de materiais compósitos. São considerados carregamentos de pressão interna uniforme ao longo de seu comprimento axial.

Para os objetivos do presente Trabalho, neste Capítulo são apresentados os desenvolvimentos para a solução analítica do problema em regime estático linear. Permitem-se carregamentos de forças axiais e torques aplicados nas extremidades do cilindro e pressão interna e/ou externa, de valor constante, nas respectivas superfícies do tubo. São excluídos os efeitos térmicos.

Para o desenvolvimento da solução analítica definiu-se, inicialmente, o tubo composto por apenas uma camada. Considerando-se a condição da perfeita adesão entre as camadas, impõe-se, também, condições de continuidade do campo de deslocamentos ao longo da espessura do cilindro, através das fronteiras entre as lâminas. Deste modo, a solução obtida para apenas uma lâmina pode ser diretamente aplicada para o caso com multi-camadas. São escolhidos parâmetros iniciais para a definição de um problema de um tubo laminado como o número de camadas, raios interno e externo do cilindro e espessuras e ângulos de orientação das fibras para cada uma das lâminas. Como modelos de material, consideram-se lâminas homogêneas e de comportamento macromecânico ortotrópico.

Para o desenvolvimento das equações, é adequado utilizar-se um sistema de coordenadas cilíndrico (X, θ, R) para definição do tubo, tal como abordado pelo Capítulo 2. O campo de deslocamentos para pontos do cilindro é definido pelas componentes axial (u), circunferencial (v) e radial (w), no sistema de coordenadas global adotado. Deste modo:

$$u = u(X, \theta, R) \quad (4.1)$$

$$v = v(X, \theta, R) \quad (4.2)$$

$$w = w(X, \theta, R) \quad (4.3)$$

A hipótese de geometria e carregamentos axissimétricos de perfil uniforme, ao longo da direção axial, e a consideração de dimensões de um tubo longo, em que a seção sob análise esteja afastada dos extremos, onde seriam aplicados força axial e torque, permitem a simplificação dos campos de deslocamentos acima definidos em relação à coordenada circunferencial. O deslocamento radial (w) ainda se torna independente da coordenada axial. Resulta-se em:

$$u = u(X, R) \quad (4.4)$$

$$v = v(X, R) \quad (4.5)$$

$$w = w(R) \quad (4.6)$$

A cinemática de deformação mais apropriada a este problema, em um sistema de coordenadas cilíndricas, é definida a seguir por meio de relações^[7] entre componentes do campo de deformações e as do campo de deslocamentos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial w}{\partial R} \quad (4.9)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4.10)$$

$$\gamma_{xr} = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial w}{\partial X} \quad (4.11)$$

$$\gamma_{\theta r} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v + R \cdot \frac{\partial v}{\partial R} \right) \quad (4.12)$$

No entanto, considerando-se as condições de simplificação dos deslocamentos, de (4.4) a (4.6), as seguintes relações entre deformações e deslocamentos tornam-se:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{w}{R} \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial w}{\partial R} \quad (4.15)$$

$$\gamma_{X\theta} = \frac{\partial v}{\partial X} \quad (4.16)$$

$$\gamma_{XR} = \frac{\partial u}{\partial R} \quad (4.17)$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \quad (4.18)$$

Além das definições anteriores, a solução elástica analítica também satisfaz às condições de equilíbrio, às de compatibilidade e às de contorno. As equações de equilíbrio^[5] em coordenadas cilíndricas, para as direções principais, são apresentadas a seguir pelas equações (4.19) a (4.21). Sendo desconsideradas forças de corpo:

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{(\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta})}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta R}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{XR}}{\partial X} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{X\theta}}{\partial X} + \frac{2 \cdot \tau_{\theta R}}{R} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \tau_{XR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \tau_{X\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} + \frac{\tau_{XR}}{R} = 0 \quad (4.21)$$

Pelas mesmas hipóteses em que se basearam as simplificações dos deslocamentos, consideram-se todas as componentes de tensão independentes das coordenadas circunferencial e axial. As equações diferenciais parciais (4.19) a (4.21) são reescritas, portanto, como equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\sigma_{RR}}{dR} + \frac{(\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta})}{R} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{d\tau_{\theta R}}{dR} + \frac{2 \cdot \tau_{\theta R}}{R} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d\tau_{XR}}{dR} + \frac{\tau_{XR}}{R} = 0 \quad (4.24)$$

A definição das componentes do campo de deformações, de (4.7) a (4.12), ou suas simplificações dadas as hipóteses deste problema, de (4.13) a (4.18), depende diretamente das três componentes do campo de deslocamentos. As seis componentes do campo de deformações infinitesimais são automaticamente desenvolvidas, para o regime linear elástico. No entanto, um problema pode requerer a definição, *a priori*, das componentes de deformação. Resulta-se, neste caso, na necessidade de obtenção do respectivo campo de deslocamentos, por meio de funções matemáticas, contínuas no domínio geométrico considerado. A relação entre deslocamentos e deformações deve ser biunívoca para, em qualquer tipo de problema, não haver possíveis diferentes respostas, seja para o campo de deslocamentos, seja para o de deformações. No caso de serem definidas seis componentes de deformação, há três variáveis a serem resolvidas, para as componentes de deslocamentos. Havendo um número maior de equações que incógnitas, certas condições de integrabilidade das componentes de deformação deverão ser satisfeitas de modo a garantirem biunicidade e, deste modo, a obtenção de um campo de deformações compatível. Estas condições de compatibilidade, inicialmente obtidas por *St. Venant*, eliminam as componentes de deslocamentos das definições dos campos de deformações. Referidas ao sistema de coordenadas curvilíneas, estas definições são expressas pela equação a seguir^[7], mediante derivadas covariantes de tensores de deformação de 2ª ordem, em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij}|_{kl} + \varepsilon_{kl}|_{ij} - \varepsilon_{ik}|_{jl} - \varepsilon_{jl}|_{ik} = 0 \quad (4.25)$$

A equação (4.25), em notação expandida, daria origem a 81 equações diferentes, devido à natureza dos tensores de 2ª ordem. No entanto, a maioria destas são identicamente satisfeitas; recorrendo-se à condição de simetria dos tensores de deformações, resultam em apenas seis equações finais. Para a escolha específica de um sistema de coordenadas cilíndricas^[8], são apresentadas a seguir a forma final das condições de compatibilidade:

$$\frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{X\theta}}{\partial X \cdot \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{XX}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial X^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XR}}{\partial X} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XX}}{\partial R} = 0 \quad (4.26)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{XR}}{\partial X \cdot \partial R} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{XX}}{\partial R^2} = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{2}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta R}}{\partial \theta \cdot \partial R} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{R\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial R} = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{XX}}{\partial R \cdot \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XR}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\theta R}}{\partial X} \right] + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial X} - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XX}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}}{\partial X \cdot \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \varepsilon_{\theta R}}{\partial X} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XR}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial R} \right] - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\theta R}}{\partial X} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial R} - \frac{\varepsilon_{X\theta}}{R^2} = 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial X \cdot \partial R} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial R} + \frac{\partial \varepsilon_{R\theta}}{\partial X} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XR}}{\partial \theta} \right] + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{XR}}{\partial R} - \\ - \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{X\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{XX})}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo-se as definições das componentes do campo de deformações (4.4) a (4.9), as equações de compatibilidade descritas em (4.26) a (4.28) são identicamente satisfeitas. No entanto, o desenvolvimento das demais resulta em:

$$\frac{d^2 \varepsilon_{XX}}{dR^2} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d \varepsilon_{XX}}{dR} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{d(R \cdot \gamma_{X\theta})}{dR} \right] = 0 \quad (4.34)$$

Além das expressões resultantes das equações de compatibilidade, também devem ser satisfeitas relações constitutivas para os modelos de material considerados. Para os modelos ortotrópicos, abordados no Capítulo 2, estas relações são expressas pela equação (2.20), com a matriz $\bar{C}$ na forma apresentada por (2.22).

Integrando-se as expressões dadas por (4.32) e (4.33), obtém-se a distribuição constante para deformações axiais, ε_{XX} , ao longo da espessura, dada por ε_{XX}^0 :

$$\varepsilon_{XX} = \varepsilon_{XX}^0 \quad (4.35)$$

Outras integrações diretas são resultantes das equações (4.23) e (4.24). As componentes de tensão cisalhantes $\tau_{\theta R}$ e τ_{XR} são obtidas, com auxílio de duas constantes de integração definidas como E e F:

$$\tau_{\theta R} = \frac{E}{R^2} \quad (4.36)$$

$$\tau_{XR} = \frac{F}{R} \quad (4.37)$$

Estes resultados, substituídos na inversa da relação constitutiva, apresentada por (2.20), sendo a matriz $[\bar{S}]$ obtida pela inversão da matriz $[\bar{C}]$, definida por (2.22), resulta na componente de deformação cisalhante:

$$\gamma_{XR} = \bar{S}_{55} \cdot \frac{E}{R^2} + \bar{S}_{56} \cdot \frac{F}{R} \quad (4.38)$$

A substituição da equação (4.38) na componente de deformação simplificada expressa por (4.17), resulta-se na expressão geral para solução de deslocamentos axiais, com a inclusão de uma função arbitrária $f(X)$:

$$u(X, R) = -\bar{S}_{55} \cdot \frac{E}{R} + \bar{S}_{56} \cdot F \cdot \ln(R) + f(X) \quad (4.39)$$

Considerando-se os resultados expressos por (4.39) e (4.35), ao inspecionar a definição dada por (4.13), conclui-se que a função $f(X)$ deve ser igual ao fator $\varepsilon_{XX}^0 \cdot X$, proporcional à coordenada axial, mais uma constante representativa de movimento de corpo rígido, definida por F_1 . O deslocamento radial é reescrito como:

$$u(X, R) = \varepsilon_{XX}^0 \cdot X - \bar{S}_{55} \cdot \frac{E}{R} + \bar{S}_{56} \cdot F \cdot \ln(R) + F_1 \quad (4.40)$$

Da integração da condição de compatibilidade simplificada, em (4.34), obtém-se a componente de deformação cisalhante:

$$\gamma_{x\theta} = K_1 \cdot R + \frac{K_2}{R} \quad (4.41)$$

A equação acima inclui duas constantes de integração, K_1 e K_2 . O uso das equações (4.41) e (4.16) permite obter, mediante integração, o resultado a seguir para deslocamentos circunferenciais:

$$v(X, R) = \left(K_1 \cdot R + \frac{K_2}{R} \right) \cdot X + g(R) \quad (4.42)$$

Nas equações (4.39) e (4.42), $f(X)$ e $g(R)$ são funções arbitrárias resultantes das integrações. Aplicando-se o resultado acima na expressão (4.18), têm-se:

$$\gamma_{\theta R} = g'(R) - \frac{2 \cdot K_2 \cdot X}{R^2} - \frac{g(R)}{R} \quad (4.43)$$

Novamente, recorrendo-se à inversa da relação constitutiva em (2.20) e à inversa da matriz $[\bar{C}]$, com o auxílio de (4.36), chega-se a:

$$\gamma_{\theta R} = \bar{S}_{56} \cdot \frac{E}{R^2} + \bar{S}_{66} \cdot \frac{F}{R} \quad (4.44)$$

A comparação direta das equações (4.43) e (4.44) permite concluir que a constante de integração K_2 é nula e que a expressão $g(R)$ deve satisfazer à seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d(g(R))}{dR} - \frac{g(R)}{R} = \bar{S}_{56} \cdot \frac{E}{R^2} + \bar{S}_{66} \cdot \frac{F}{R} \quad (4.45)$$

Cuja solução é dada por:

$$g(R) = -\frac{\bar{S}_{56}.E}{2.R} - \bar{S}_{45}.F + G_1.R \quad (4.46)$$

Na equação acima, a constante de integração G_1 está associada ao movimento de corpo rígido (rotação). A expressão para $g(R)$ é, então, substituída em (4.42). Nesta passagem, o desenvolvimento analítico adota um valor nulo para K_2 e define $K_1 = \gamma^0$ como sendo o ângulo de torção, em radianos, por unidade de comprimento axial do tubo cilíndrico. Assim, a expressão para o deslocamento circunferencial resulta em:

$$v(X, R) = \gamma^0.X.R - \frac{\bar{S}_{56}.E}{2.R} - \bar{S}_{66}.F + G_1.R \quad (4.47)$$

Das equações (4.22), da relação constitutiva para σ_{xx} , em (2.20), e das expressões (4.13) a (4.18), (4.40) e (4.47), obtém-se a equação diferencial ordinária^[5], para o deslocamento radial:

$$\frac{d^2 w}{dR^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dw}{dR} - \frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{33}} \cdot \frac{w}{R^2} = \frac{1}{\bar{C}_{33}} \cdot \left[\frac{(\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13}) \cdot \mathcal{E}_{xx}^0}{R} + (\bar{C}_{24} - 2\bar{C}_{34}) \cdot \gamma^0 \right] \quad (4.48)$$

Na equação (4.48), os coeficientes da matriz $[\bar{C}]$ são obtidos em (2.22), para materiais ortotrópicos. Sua solução é apresentada a seguir:

$$w(R) = A_1.R^\lambda + \frac{A_2}{R^\lambda} + \Gamma \cdot \mathcal{E}_{xx}^0.R + \Omega \cdot \gamma^0.R^2 \quad (4.49)$$

Os termos A_1 e A_2 são constantes de integração e λ , Γ e Ω são parâmetros definidos a partir de coeficientes da matriz $[\bar{C}]$, na relação constitutiva, como:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{33}}} \quad (4.50)$$

$$\Gamma = \frac{(\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13})}{(\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22})} \quad (4.51)$$

$$\Omega = \frac{(\bar{C}_{26} - 2.\bar{C}_{36})}{(4.\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22})} \quad (4.52)$$

Eliminando-se as condições de corpo rígido em (4.40) e (4.47) - $F_I = G_I = 0$ - resulta nas soluções analíticas para as duas componentes do campo de deslocamentos, associadas para uma única camada, apresentadas a seguir:

$$u(X, R) = \varepsilon_{XX}^0 . X - \bar{S}_{55} . \frac{E}{R} + \bar{S}_{56} . F . \ln(R) \quad (4.53)$$

$$v(X, R) = \gamma^0 . X . R - \bar{S}_{56} . \frac{E}{2.R} - \bar{S}_{66} . F \quad (4.54)$$

As relações acima, adicionadas à equação (4.49), compõem o campo de deslocamentos do modelo analítico.

Para cada exemplo considerado, são definidas as condições de contorno apropriadas. No caso de pressão interna, P_{int} , resulta-se nas seguintes condições para as posições nos raios interno e externo, R_i e R_e :

$$\sigma_{RR} \Big|_{R_i} = -P_i \quad (4.55)$$

$$\sigma_{RR} \Big|_{R_e} = 0 \quad (4.56)$$

$$\tau_{XR} \Big|_{R_i} = 0 \quad (4.57)$$

$$\tau_{\theta R} \Big|_{R_i} = 0 \quad (4.58)$$

$$\tau_{XR} \Big|_{R_e} = 0 \quad (4.59)$$

$$\tau_{\theta R} \Big|_{R_e} = 0 \quad (4.60)$$

Impondo-se estas condições de contorno, as duas constantes de integração, E e F, resultam em valores nulos, devido às integrações das expressões contidas em (4.36) e (4.37). Deste modo, as soluções analíticas para o campo de deslocamentos, particular para um problema desta natureza, reduzem-se a:

$$u(X, R) = \varepsilon_{XX}^0 . X \quad (4.61)$$

$$v(X, R) = \gamma^0 . X . R \quad (4.62)$$

$$w(R) = A_1.R^\lambda + \frac{A_2}{R^\lambda} + \Gamma.\varepsilon_{XX}^0.R + \Omega.\gamma^0.R^2 \quad (4.63)$$

Nas expressões acima, a componente axial em (4.61) apresenta uma variação linear em função da coordenada axial, X , sendo constante ao longo da espessura. Quanto aos deslocamentos circunferenciais, estes variam linearmente, diretamente proporcional às posições axial e radial, X e R , respectivamente. Os deslocamentos radiais, em (4.63), variam apenas com a coordenada radial R , apresentando-se como uma distribuição não linear nesta direção.

A solução analítica para o campo de deformações é obtida substituindo-se estes resultados para as componentes de deslocamentos nas definições apresentadas de (4.4) a (4.9). Duas das componentes de deformações cisalhantes, γ_{XR} e $\gamma_{\theta R}$, resultam em identicamente nulas. As componentes do campo de tensões são obtidas por meio das relações constitutivas, expressas por (2.20). Tendo a matriz $\bar{C}$ a forma apresentada por (2.22), também as duas componentes de tensão cisalhantes, τ_{XR} e $\tau_{\theta R}$, tornam-se identicamente nulas. Deste modo, as soluções analíticas para os campos de deformação e de tensão reduzem-se a apenas quatro componentes não nulas.

Considerando-se, agora, o tubo com múltiplas camadas, cada uma é definida podendo-se variar suas espessuras, orientações das fibras e modelos de material. Ao ser adotada a hipótese de perfeita adesão entre lâminas, em suas fronteiras as condições de continuidade de deslocamentos são satisfeitas. O uso das condições de contorno apresentadas para o carregamento de pressão interna, de uma camada apenas, expressos de (4.55) a (4.60), é mantido. As condições de nulidade de tensões de cisalhamento, τ_{XR} e $\tau_{\theta R}$, são, no entanto, reaplicadas a cada nova fronteira. A condição de continuidade de deslocamentos, para lâminas perfeitamente unidas, implica que tanto as deformações axiais quanto o ângulo de torção por unidade de comprimento sejam constantes para todas as camadas, ao longo de toda a espessura do tubo. Deste modo, para cada lâmina de número “ i ”, em um tubo com múltiplas de camadas:

$$\varepsilon_{XX}^{(i)} = \varepsilon_{XX}^0 \quad (4.64)$$

$$\gamma^{0(i)} = \gamma^0 \quad (4.65)$$

E, da mesma forma, as soluções para o campo de deslocamentos em uma camada (i) são redefinidas de modo:

$$u^{(i)}(X, R) = \varepsilon_{XX}^0 \cdot X \quad (4.66)$$

$$v^{(i)}(X, R) = \gamma^0 \cdot X \cdot R \quad (4.67)$$

$$w^{(i)}(R) = A_1^{(i)} \cdot R^\lambda + \frac{A_2^{(i)}}{R^\lambda} + \Gamma^{(i)} \cdot \varepsilon_{XX}^0 \cdot R + \Omega^{(i)} \cdot \gamma^0 \cdot R^2 \quad (4.68)$$

A substituição das soluções para as componentes de deslocamentos, para uma ou mais camadas, nas equações (4.13) a (4.18), permite a obtenção direta das componentes do campo de deformações, obedecendo-se às hipóteses adotadas. Neste caso, as componentes de deformação angulares em (4.17) e (4.18) resultam identicamente nulas. As componentes de tensão são obtidas através da relação constitutiva, uma vez definido o campo de deformações. Assim como as componentes de deformação angulares expressas por (4.17) e (4.18), as tensões cisalhantes τ_{XR} e $\tau_{\theta R}$ também apresentam-se identicamente nulas.

4.2

Implementação para Cálculo das Soluções Analíticas

Os procedimentos de cálculo de soluções analíticas para os campos de deslocamentos, de deformação e de tensão, foram implementados em um aplicativo FORTRAN®, estando a solução disponibilizada na Internet, na página pessoal^[9] do autor da referência [5]. Esta solução atende ao problema de tubos cilíndricos de multi-camadas, para carregamentos de torque, tração longitudinal, pressão interna e/ou externa e de natureza térmica, permitindo-se, apenas, o modelo de material transversalmente isotrópico.

Os dados de entrada requeridos para a implementação devem ser definidos em arquivo de entrada, para o número de camadas, em separado, de acordo com a escolha do empilhamento, pelo usuário. Não há restrições quanto ao número máximo das camadas. A espessura total do tubo é obtida pela soma de suas espessuras parciais. A saída de dados é feita por arquivo apresentando desde um resumo dos dados de entrada, as matrizes $[C]$ e $[\bar{C}]$, para os sistemas da fibra e

global, respectivamente, a listagens finais das componentes deformações, tensões e deslocamentos, para pontos igualmente distribuídos ao longo da espessura total do cilindro. As respostas de deformações e tensões são ainda informadas em ambos os sistemas de coordenadas, local e global.