

### 3

## IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### 3.1

#### Formulação Variacional e Princípio dos Trabalhos Virtuais

Desde o advento de sua utilização em escala produtiva, o Método de Elementos Finitos (MEF) tem se mostrado de grande importância a projetos de engenheiros e na atuação de pesquisadores em diversas áreas de conhecimento. Este tem particular relevância na análise de estruturas mecânicas. O método baseia-se na discretização do sistema contínuo, o qual sempre estará presente na natureza, ligado ao problema físico no qual o engenheiro estará deparado para resolver. A etapa inicial em sua utilização requer um entendimento dos fenômenos a serem analisados, de acordo com o tipo de estrutura e os carregamentos a que está sujeita. O MEF é uma ferramenta de idealização de fenômenos físicos e, portanto, a representação matemática do modelo requer que hipóteses e simplificações sejam estabelecidas com referência à geometria, à cinemática de deformação, ao comportamento de materiais, a tipos de carregamentos, a condições de contorno, etc.

Os modelos matemáticos podem ser classificados em parâmetros concentrados (sistemas discretos) e aqueles baseados na mecânica do contínuo<sup>[6]</sup> (sistemas contínuos). Com o primeiro, procura-se uma solução do modelo para um número finito de variáveis de estado. Já no segundo caso, as soluções são obtidas por meio da resolução de equações diferenciais. No entanto, as soluções exatas para estas equações podem ser obtidas somente em um número pequeno de casos. Assim, a proposta do método de elementos finitos consiste em transformar um modelo contínuo em uma idealização discretizada, possibilitando a solução por meio da resolução de um sistema de equações algébricas, similarmente ao caso discreto.

Para a solução de um problema contínuo, assim como nos sistemas discretos, é possível, na análise estrutural, abordá-lo ou por um método direto, ou por um método variacional<sup>[6]</sup>. O objetivo é a obtenção de equações diferenciais de

governo. Em uma formulação diferencial, deve-se estabelecer uma condição de equilíbrio e relações constitutivas para elementos escolhidos que constituam o sistema em estudo. É requerida a verificação das condições de compatibilidade, continuidade e condições de contorno e iniciais. O resultado é um sistema de equações diferenciais em termos de variáveis de estado. A solução deste sistema, em análises estáticas ou dinâmicas, indica as respostas das variáveis, para a condição de equilíbrio do sistema. A escolha das variáveis de estado é baseada na natureza do problema.

Como alternativa à abordagem de imposição da condição de equilíbrio, há ainda a formulação variacional. Nesta, que se baseia na Primeira Lei da Termodinâmica, ou Lei de Balanço de Energia, deve-se proceder à definição de um potencial total para o sistema, indicado por  $\Pi$ , e também conhecido por funcional do problema. O equilíbrio será então estabelecido impondo-se a estacionaridade de  $\Pi$  ( $\delta\Pi = 0$ ), em relação às variáveis de estado a serem escolhidas, assim como na formulação diferencial. A maior vantagem<sup>[6]</sup> de utilizar-se este procedimento está na sua eficiência para a solução de problemas contínuos, apresentando uma grande facilidade na satisfação das condições de contorno.

Em análises mecânicas, a escolha do MEF baseado em deslocamentos<sup>[6]</sup> é bastante comum, utilizados como variáveis de estado mais apropriadas. Deste modo, a leitura de respostas em termos de deslocamentos é facilitada, assim como a obtenção posterior de componentes de deformações e tensões. Análises mecânicas de comportamento linear são precursoras nos procedimentos de elementos finitos. Para solicitações estáticas, o sistema de equações numéricas a ser obtido pode ser resolvido diretamente. Já em análises dinâmicas, amortecimentos e inércias da estrutura também devem ser levados em consideração. Neste caso, resulta-se em um sistema de equações diferenciais ordinárias para a resolução das variáveis de deslocamento. Para problemas que incluam não linearidades, assim como os dinâmicos, processos de solução iterativos são necessários para completar a solução do sistema de equações.

Uma estrutura global deve ser discretizada por meio de elementos conectados entre si. Devido às condições de solicitação inerentes ao problema em questão, pontos do corpo se deslocam e, de acordo com as restrições de apoio e modelos de material, a estrutura muda sua forma original, se deformando. Em

uma análise linear, os deslocamentos dos pontos são infinitesimais e a solução para a posição deformada é tomada em relação à configuração inicial. Para deslocamentos maiores, referindo-se a uma análise com “grandes deslocamentos”, são invalidadas as simplificações de termos diferenciais de segunda ordem, usadas na definição de termos do campo de deformações. Resulta-se, neste caso, em um problema não linear. Das relações constitutivas, obtém-se o campo de tensões resultante, na condição de equilíbrio da estrutura.

A base dos procedimentos para o método de elementos finitos baseados nos deslocamentos é resultado da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, também conhecido como Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Este estabelece que, na condição de equilíbrio, para qualquer deslocamento virtual imposto, infinitesimal e compatível com as restrições de vinculação, o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo. Matematicamente, esta condição é expressa por:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \cdot \tau \cdot dV = \int_V \bar{U}^T \cdot f^{cp} \cdot dV + \int_S \bar{U}^s \cdot f^s \cdot dS + \sum_i \bar{U}^i \cdot F_c^i \quad (3.1)$$

O termo à esquerda em (3.1) expressa a medida do trabalho de deformação interna. À direita, indica-se o trabalho realizado pelos carregamentos externos, como o das forças de corpo  $f^{cp}$ , das forças de superfície  $f^s$  e das forças concentradas em pontos de aplicação,  $F_c^i$ . A variação dos vetores de deslocamentos,  $U$ , e de deformações,  $\epsilon$ , estão indicados sob travessões. Estes são considerados “virtuais”, i.e., possíveis e próximos da configuração de equilíbrio da estrutura, mediante os carregamentos impostos. Nesta equação,  $\tau$  representa o vetor das componentes de tensões, devidas às solicitações externas.

Na Figura (3.1) é apresentado um corpo de volume  $V$ , sujeito aos carregamentos como campos de forças volumétricas ( $f^{cp}$ ) e de superfície ( $f^s$ ), além de uma série de forças concentradas, e submetido às restrições de movimentos em uma superfície prescrita,  $S_{Ap}$ , é apresentado. Os pontos desta superfície, com movimentos restritos, são indicados com símbolos triangulares. Um ponto (i) do corpo está sujeito a campos de deslocamentos  $u-v-w$ , segundo o sistema de coordenadas considerado  $(X,Y,Z)$ .

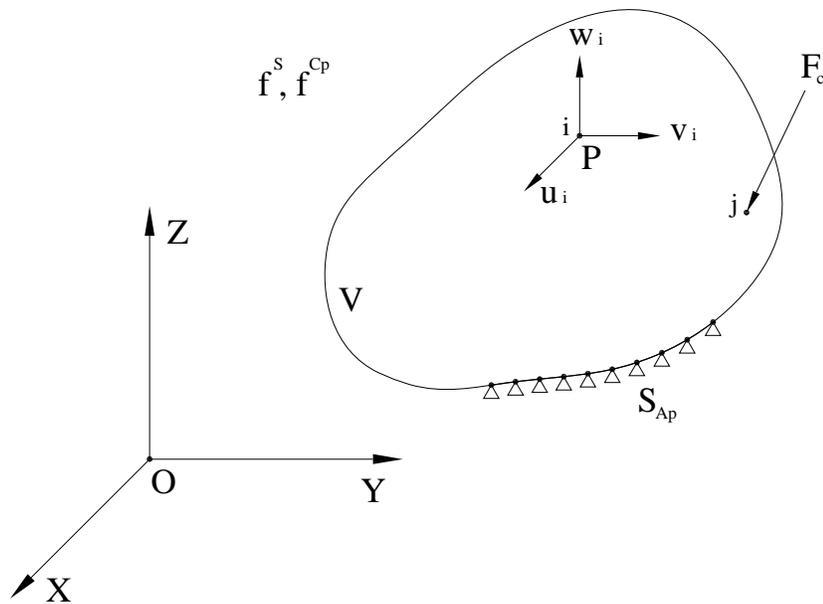


Figura 3.1: Corpo Volumétrico Sujeito a Carregamentos e a Restrições de Movimento

A estrutura é discretizada por elementos. Estes são conectados entre si por meio de pontos nodais em suas superfícies externas, garantindo a compatibilidade dos deslocamentos. Estes são representados por funções expressas em função dos valores nodais, utilizando-se funções de interpolação. Denomina-se  $H^{(i)}$  uma matriz formada por estas funções de interpolação, para cada elemento (i), sendo indicada em:

$$u^{(i)} = H^{(i)} \cdot \hat{U} \quad (3.2)$$

Em (3.2), o vetor  $\hat{U}$  inclui os deslocamentos, definidos como u, v e w, para todos os nós da estrutura, e  $u^{(i)}$  representa o campo de deslocamentos correspondente ao elemento (i), definido no sistema de coordenadas considerado. Os deslocamentos u-v-w, de ponto interior ao elemento, (P), são expressos em função dos valores nodais. Os deslocamentos são definidos em um sistema de coordenadas globais X-Y-Z.

Submetida aos deslocamentos e condições de apoio, a estrutura se deforma. Esta medida é expressa pelos campos de deformação, que estão associados aos de

tensão, devido à condição de equilíbrio para cada elemento (i). Representados por  $\varepsilon^{(i)}$  e  $\tau^{(i)}$ , respectivamente, os campos de deformação e tensão são expressos como:

$$\varepsilon^{(i)} = B^{(i)} \cdot \hat{U} \quad (3.3)$$

$$\tau^{(i)} = C^{(i)} \cdot \varepsilon^{(i)} + \tau_{mi}^{(i)} \quad (3.4)$$

Em (3.3), as matrizes  $B^{(i)}$  e  $C^{(i)}$  expressam a relação entre deslocamentos e o campo de deformações e relações constitutivas apropriadas ao modelo de material escolhido, respectivamente.  $\tau^{(i)}$  é um possível estado de tensões inicial, anterior às solicitações do problema atual.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais apresentado em (3.1), considerado para um domínio da estrutura dado por um número inteiro “NEL” de elementos, resulta em:

$$\sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} \varepsilon^{-(i)T} \cdot \tau^{(i)} \cdot dV^{(i)} = \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} \bar{u}^{-(i)T} \cdot f^{Cp^{(i)}} \cdot dV^{(i)} + \sum_{i=1}^{NEL} \int_{S_n^{(i)}} \bar{u}^{-(i)T} \cdot f^{S^{(i)}} \cdot dS_n^{(i)} + \sum_{i=1}^{NEL} \bar{u}^{-(i)T} \cdot F_C^{(i)} \quad (3.5)$$

A equação (3.5), com o auxílio de (3.2) a (3.4), fornece:

$$\begin{aligned} \bar{U}^T \cdot \left[ \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} B^{(i)T} \cdot C^{(i)} \cdot B^{(i)} \cdot dV^{(i)} \right] \cdot \hat{U} = \bar{U}^T \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} H^{(i)T} \cdot f^{Cp^{(i)}} \cdot dV^{(i)} \right) + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i=1}^{NEL} \int_{S_n^{(i)}} H^{S^{(i)T}} \cdot f^{S^{(i)}} \cdot dS_n^{(i)} \right) - \left( \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} B^{(i)T} \cdot \tau^{(i)} \cdot dV^{(i)} \right) + F_C \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

Na equação (3.6), o somatório de integrais no lado esquerdo significa, pelo método da rigidez direta<sup>[6]</sup>, a soma de matrizes de rigidez de cada elemento (i). O lado direito da igualdade inclui os carregamentos impostos à estrutura. Assim, efetuando-se os somatórios sobre os domínios dos elementos, tem-se que:

$$K \cdot \hat{U} = R \quad (3.7)$$

Cada matriz de rigidez elementar, parcela a ser considerada na obtenção de  $K$ , é expressa por:

$$K^{(i)} = \int_{V^{(i)}} B^{(i)T} \cdot C^{(i)} \cdot B^{(i)} \cdot dV^{(i)} \quad (3.8)$$

A solução do sistema de equações em (3.7) fornece o vetor de deslocamentos nodais,  $\hat{U}$ . Para a obtenção do vetor de carregamentos  $R$ , consideram-se todos as cargas externas impostas à estrutura. A partir destes valores, considerando-se as matrizes de interpolação elementares, obtém-se os deslocamentos nos pontos do contínuo. Das equações (3.3) e (3.4), obtém-se, também, os campos de tensões e deformações. Nestes procedimentos, observa-se a importância da discretização porque a aproximação numérica do método dependerá do número de elementos finitos, das expressões escolhidas para as funções de interpolação, e também da cinemática de deformação empregada. São várias as possibilidades para interpolações, desde aproximações lineares a maiores ordens. Sendo uma escolha linear, bastante comum e de menos operações em termos de esforços computacionais, a qualidade nas aproximações depende da adequabilidade dos resultados de (3.3) e (3.4) às definições do campo de deslocamentos e ao de tensões. Em outros casos, diferentes funções de interpolação poderão ser usadas, conhecendo-se melhor a natureza da aplicação.

As definições apresentadas nesta Seção, assim como a estratégia de desenvolvimento, permite implementação e o teste de formulações empregando o Método de Elementos Finitos. As definições, em termos de vetores e matrizes, sugerem o emprego de ferramenta de manipulação simbólica comercial, com facilidades no uso destas entidades matemáticas, como MAPLE<sup>®</sup> ou MATLAB<sup>®</sup>.

A equação (3.7) se refere a problemas de natureza estática, obtendo-se soluções para uma posição de equilíbrio da estrutura. Nos problemas em que os efeitos de solicitações dinâmicas estão presentes, com carregamentos e os deslocamentos nodais variando em função do tempo, forças de inércia e as de dissipação, devem ser considerados na formulação. Sendo estas definidas como forças aplicadas a todo o volume, há adições à parcela relativa a forças de corpo ( $f^{cp}$ ), no vetor de carregamentos  $R$ , além das contribuições devidas a forças de superfície ( $f^s$ ) e a cargas concentradas. Assim como o vetor de deslocamentos

nodais,  $U$ , as acelerações também são interpoladas de maneira similar à expressa pela equação (3.2), sendo o vetor de acelerações nodais expresso por  $\hat{U}$ . Forças de amortecimento, usadas para representar a dissipação de energia da estrutura, são consideradas dependentes das velocidades,  $\dot{U}$ . A parcela de carregamentos volumétricos,  $R_V$ , no vetor  $R$ , toma a forma<sup>[5]</sup> expressa a seguir:

$$R_V = \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} H^{(i)T} \left[ f^{Cp^{(i)}} - \rho^{(i)} \cdot H^{(i)} \cdot \ddot{U} - \kappa^{(i)} \cdot H^{(i)} \cdot \dot{U} \right] dV^{(i)} \quad (3.9)$$

Na equação anterior, o vetor de carregamentos volumétricos,  $f^{Cp}$ , não mais considerada as forças de inércia nem de amortecimento, explicitadas nos demais termos. São incluídos nesta expressão as densidades definidas para cada elemento,  $\rho^{(i)}$ , e parâmetros relativos aos respectivos amortecimentos,  $\kappa^{(i)}$ . As matrizes  $H^{(i)}$ , definidas anteriormente, são novamente utilizadas para interpolação de acelerações e de velocidades. A partir da equação (3.9), as matrizes de massa ( $M$ ) e de amortecimento ( $C_{Am}$ ) globais da estrutura são definidas a partir dos somatórios das respectivas matrizes elementares, tais como:

$$M = \sum_{i=1}^{NEL} M^{(i)} = \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} \rho^{(i)} \cdot H^{(i)T} \cdot H^{(i)} \cdot dV^{(i)} \quad (3.10)$$

$$C_{Am} = \sum_{i=1}^{NEL} C_{Am}^{(i)} = \sum_{i=1}^{NEL} \int_{V^{(i)}} \kappa^{(i)} \cdot H^{(i)T} \cdot H^{(i)} \cdot dV^{(i)} \quad (3.11)$$

Assim como o resultado expresso em (3.7) para o caso estático, a equação de equilíbrio final da estrutura, para solicitações dinâmicas, toma a forma expressa a seguir:

$$M \cdot \ddot{\hat{U}} + C_{Am} \cdot \dot{\hat{U}} + K \cdot \hat{U} = R \quad (3.12)$$

### 3.2

#### Definição do Problema de Tubos Cilíndricos

Para a definição de deslocamentos e demais grandezas físicas, a escolha do sistema de coordenadas é indiferente a cada elemento finito porque as matrizes e os vetores, associados às coordenadas do elemento, devem ser transformadas a um sistema de coordenadas global, único da estrutura. Orientando-se um cilindro com seu eixo longitudinal na vertical, a coordenada  $X$  pode representar a variação ao longo deste eixo,  $\theta$ , a variação circunferencial, e  $R$  o posicionamento radial. Para ainda se adequar a um tubo cilíndrico de material compósito, laminado por camadas, um segundo sistema de coordenadas auxiliar deverá ser definido. A diferença entre camadas, fora suas espessuras particulares, estará nos diferentes materiais, geralmente de comportamento ortotrópico, e nos possíveis ângulos de bobinamento das fibras. Neste trabalho, consideram-se camadas de materiais compósitos laminados reforçados por fibras simples, em matrizes. Este sistema, localizado em cada camada, é representado pelos eixos 1-2-3. Estes três eixos coincidem com os globais  $X$ - $\theta$ - $R$ , respectivamente, no caso do ângulo de bobinamento,  $\phi$ , ser nulo. Na Figura (2.3) foram apresentadas as definições das orientações de ângulo, assim como o sistema de coordenadas local. As transformações entre os eixos, assim definidos, foram utilizadas no Capítulo 2, ao modificar as matrizes constitutivas de materiais compósitos laminados. Nos carregamentos considerados, incluem-se as aplicações típicas de tubos e segmentos cilíndricos na engenharia.

### 3.3

#### Proposta de Elemento Finito

Um elemento finito deve ser adequado, em termos de suas definições como geometria, graus de liberdade de seus nós, e funções de interpolação, à física do problema em questão, para procurar simular a realidade com menos perda de acurácia possível. Para materiais compósitos, modelos correntes em programas acadêmicos ou comerciais, permitem a representação adequada de laminados planos, por meio da definição do número de camadas, espessuras parciais, ângulo

de bobinamentos, além de permitir a definição de diferentes modelos de materiais ortotrópicos. No entanto, considerando-se estruturas cilíndricas, ou outra correspondente que possa ser considerada por meio de revolução em torno de um eixo, há a opção na modelagem de apenas a seção de revolução, com um caráter axissimétrico. A proposta deste trabalho, para modelagem de estruturas tubulares cilíndricas, de materiais compósitos laminados, é a de reunir características destas duas abordagens. Assim, um elemento quadrilateral de quatro nós foi desenvolvido, sendo imposta a condição de axissimetria em torno do eixo longitudinal do cilindro.

A escolha dos campos de deslocamentos, no caso de elementos com materiais compósitos, requer considerar-se, além dos deslocamentos no plano do elemento, definidos como  $u$  e  $w$ , também deslocamentos na direção circunferencial  $\theta$ . Esta terceira componente é denominada de  $v$ . Adota-se, portanto, a proposta de um elemento finito axissimétrico de forma retangular, de quatro nós com três graus de liberdade em cada um:  $u$ ,  $v$  e  $w$ . A Figura (3.2) ilustra o elemento proposto e sua definição em relação ao sistema de coordenadas cilíndrico, global, escolhido.

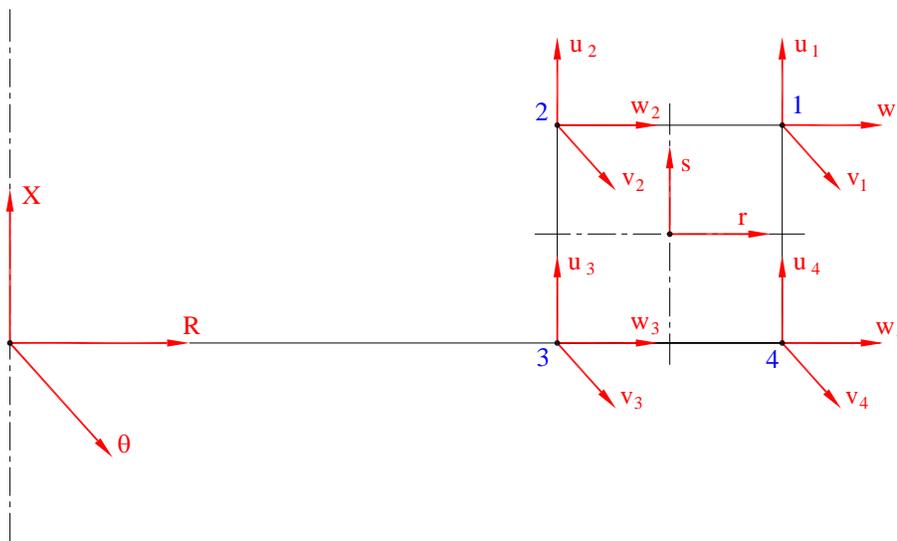


Figura 3.2: Proposta de Elemento Finito Axissimétrico de 04 Nós

Na formulação de elementos finitos isoparamétricos, a adoção de sistemas de coordenadas locais é bastante usual, conveniente e, por vezes, necessária, especialmente quando elementos distorcidos são utilizados. Como mostrado na Figura (3.2), adotam-se os eixos locais,  $r$  e  $s$ , para o elemento plano axissimétrico. Estas coordenadas são necessárias para a avaliação das integrações numéricas, devendo ser relacionadas com os eixos globais,  $X$  e  $R$ . Com o intuito de realizar-se as integrações numericamente, as coordenadas naturais  $r$  e  $s$  têm valores restritos ao domínio  $[-1, +1]$ , conforme adotado em domínios com o mapeamento padronizado. Desta forma, os eixos  $r$  e  $s$  passam pelos pontos médios das arestas do elemento. Na formulação utilizada, a orientação dos deslocamentos nodais,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , segue de acordo com o sistema de coordenadas global, cilíndrico,  $X$ - $\theta$ - $R$ . O vetor dos deslocamentos nodais de um elemento, no sistema coordenado global se apresenta na forma:

$$\hat{U}_{12 \times 12}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4] \quad (3.13)$$

Recorrendo-se à formulação isoparamétrica, as coordenadas globais e os deslocamentos, em qualquer ponto do domínio do elemento, são obtidos em função dos valores nodais, utilizando-se funções de forma. No caso do presente modelo, para um elemento finito com quatro nós, tem-se:

$$X(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s).X_i = h_1.X_1 + h_2.X_2 + h_3.X_3 + h_4.X_4 \quad (3.14)$$

$$\theta(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s).\theta_i = h_1.\theta_1 + h_2.\theta_2 + h_3.\theta_3 + h_4.\theta_4 \quad (3.15)$$

$$R(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s).R_i = h_1.R_1 + h_2.R_2 + h_3.R_3 + h_4.R_4 \quad (3.16)$$

e, com auxílio da equação (3.2):

$$U_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} u(r, s) \\ v(r, s) \\ w(r, s) \end{bmatrix} = H_{3 \times 12} \cdot \hat{U}_{12 \times 1} \quad (3.17)$$

A matriz  $H(r,s)$  é a de interpolação do elemento:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Os termos  $h_i(r,s)$  são as funções de forma Lagrangeanas, definidas de modo a recuperar valores nodais no domínio  $[-1,+1]$  do elemento. Para uma aproximação linear, têm-se:

$$h_1(r,s) = \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1+s) \quad (3.19)$$

$$h_2(r,s) = \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1+s) \quad (3.20)$$

$$h_3(r,s) = \frac{1}{4} \cdot (1-r) \cdot (1-s) \quad (3.21)$$

$$h_4(r,s) = \frac{1}{4} \cdot (1+r) \cdot (1-s) \quad (3.22)$$

Os deslocamentos para um ponto interior do elemento, em função das respostas nodais são fornecidas pela equação (3.17), para as coordenadas locais  $r$  e  $s$ . O modelo em questão adota hipóteses para a variação dos deslocamentos,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , em relação às coordenadas globais, cilíndricas,  $X$ ,  $\theta$  e  $R$ . Uma simplificação adotada foi de, devido à condição de simetria axial, os deslocamentos de um tubo axissimétrico, submetido aos carregamentos radiais considerados, independem da coordenada circunferencial. Resulta-se, portanto, em:

$$u = u(X,R) \quad (3.23)$$

$$v = v(X,R) \quad (3.24)$$

$$w = w(X,R) \quad (3.25)$$

O campo de deformações, nos pontos da estrutura cilíndrica, é definido em função dos deslocamentos e de suas derivadas em relação às coordenadas globais.

Desta forma, as seis componentes de deformação, em coordenadas cilíndricas<sup>[7]</sup>, fornecem as seguintes relações:

$$\varepsilon_{XX} = \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right) \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (3.27)$$

$$\varepsilon_{RR} = \left( \frac{\partial w}{\partial R} \right) \quad (3.28)$$

$$\gamma_{X\theta} = \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3.29)$$

$$\gamma_{XR} = \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right) \quad (3.30)$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v + R \cdot \frac{\partial v}{\partial R} \right) \quad (3.31)$$

Com as condições expressas em (3.23) a (3.25), as relações (3.26) a (3.31) reduzem-se a:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{w}{R} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial w}{\partial R} \quad (3.34)$$

$$\gamma_{X\theta} = \frac{\partial v}{\partial X} \quad (3.35)$$

$$\gamma_{XR} = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial w}{\partial X} \quad (3.36)$$

$$\gamma_{\theta R} = \frac{\partial v}{\partial R} - \frac{v}{R} \quad (3.37)$$

Combinando-se a equação (3.17) com as relações (3.32) a (3.37), as diferenciações são obtidas aplicando-se a regra da cadeia, com a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial s}{\partial R} \\ \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial r}{\partial X} & \frac{\partial s}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Esta transformação representa a inversa daquela entre coordenadas locais e globais, e é expressa pela inversa do operador Jacobiano. Voltando-se à definição na equação (3.3), com as componentes de deformações definidas em (3.32) a (3.37), a matriz transformação deformação-deslocamentos,  $B$ , reduz-se a:

$$B_{6 \times 12} = \begin{bmatrix} J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{ds} & 0 & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_1}{R} & 0 & 0 & \frac{h_2}{R} \\ 0 & 0 & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{dr} & 0 & 0 & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{dr} \\ 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{ds} & 0 & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{ds} & 0 \\ J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{dr} & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{ds} & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{dr} & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{ds} \\ 0 & (J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_1}{dr} - \frac{h_1}{R}) & 0 & 0 & (J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_2}{dr} - \frac{h_2}{R}) & 0 \\ \\ J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{ds} & 0 & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_3}{R} & 0 & 0 & \frac{h_4}{R} \\ 0 & 0 & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{dr} & 0 & 0 & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{dr} \\ 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{ds} & 0 & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{ds} & 0 \\ J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{dr} & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{ds} & J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{dr} & 0 & J_{22}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{ds} \\ 0 & (J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_3}{dr} - \frac{h_3}{R}) & 0 & 0 & (J_{11}^{-1} \cdot \frac{dh_4}{dr} - \frac{h_4}{R}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Na equação de equilíbrio expressa em (3.7), a matriz de rigidez global da estrutura,  $K$ , é obtida pelo método da rigidez direta, sendo resultado da adição das matrizes de rigidez de cada elemento. Desta forma, recorrendo-se à equação (3.3), utiliza-se a matriz  $B$ , dada por (3.39), enquanto a matriz  $C$ , em notação comum a

materiais isotrópicos, é substituída por  $\bar{C}$ . Conforme apresentado na equação (2.23), a integração se realiza com o elemento diferencial expresso nas coordenadas locais,  $r$ ,  $s$  e  $\theta$ . Os limites de integração resultam nas coordenadas locais, de  $-1$  a  $+1$ , para as coordenadas  $r$  e  $s$ . Para a coordenada circunferencial utiliza-se um valor unitário, em radianos. A matriz de rigidez elementar resulta, portanto, em:

$$K^{(i)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} (B^{(i)T} \cdot \bar{C}^{(i)} \cdot B^{(i)}) \cdot (\det J \cdot dr ds) d\theta \quad (3.40)$$

As componentes do campo de deformações, obtidas a partir das respostas de deslocamentos, permitem obter o campo de tensões atuantes, explicitado com a equação (3.4). Admitindo-se que, inicialmente a estrutura esteja livre de tensões, para o caso ortotrópico ou transversalmente ortotrópico, com a matriz  $\bar{C}$  indicada por (2.23), as componentes de tensão são expressas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{RR} \\ \tau_{X\theta} \\ \tau_{XR} \\ \tau_{\theta R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{RR} \\ \gamma_{X\theta} \\ \gamma_{XR} \\ \gamma_{\theta R} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Nota-se que a matriz expressa em (2.25), usada na equação (3.41), toma a forma característica para os modelos de materiais monoclinicos, quando relacionada no sistema de coordenadas global.

### 3.4

#### Malha de Elementos Finitos

Uma vez definidos os sistemas de coordenadas e todas as relações nas Seções anteriores, é possível generalizar o processo para solução da malha de elementos finitos. Considerando um cilindro tal como o descrito na Figura (2.3), uma malha de elementos laminados axissimétricos é proposta para modelagem de



entre diferentes tamanhos horizontais entre si ou realizar-se uma divisão da espessura do tubo em partes iguais. O primeiro caso permite um preciso posicionamento das fronteiras dos elementos, caso haja camadas em diferentes espessuras. Com o segundo, são possíveis estudos de convergência numérica, com diferentes simulações aumentando-se gradativamente o número de elementos. A versatilidade nestas escolhas é útil na modelagem de *lay-ups*, ou seqüência de empilhamento de diferentes camadas.

### 3.5

#### **Definição de Condições de Contorno – Carregamentos e Restrições de Graus de Liberdade**

Na introdução do Capítulo 2, abordaram-se alguns casos típicos de aplicação de tubos cilíndricos. Diversos são os tipos de carregamentos mecânicos em estruturas deste tipo: desde os ciclos térmicos, impostos durante os processos de fabricação, a solicitações de serviço, o projeto da estrutura deverá considerar todas as prescrições. As mais comuns são apontadas como aplicação de pressão interna e/ou externa, de valores constantes ao longo do eixo axial ou variadas, de modo estático ou dinâmico.

Compósitos, de características ortotrópicas, podem apresentar comportamentos mecânicos diferentes de um material isotrópico. No desenvolvimento das equações teóricas para laminados planos, por exemplo, indica-se que, dependendo do empilhamento escolhido, haverá um acoplamento entre tração e a torção, relativamente ao eixo axial. A aplicação de esforços de tração longitudinal pode causar elevado empenamento da chapa. Para cilindros, deve haver uma observação deste fenômeno a cada caso.

A abordagem deste trabalho permite analisar a estrutura sob a maioria dos carregamentos mecânicos, em solicitações estáticas lineares. Foram excluídos os efeitos térmicos e/ou higrotermais ou termomecânicos. É possível aplicar-se restrições de graus de liberdade em nós selecionados da malha, tais como nos travamentos de deslocamentos ou na imposição de igualdades de respostas em grupos de nós.

### 3.6

#### Implementação em Ferramenta Computacional

Em seu desenvolvimento, o Método de Elementos Finitos requer a recorrência de diversas matrizes em suas etapas preliminares. O procedimento de rigidez direta permite a obtenção de uma matriz de rigidez global, a partir das matrizes elementares, por meio de procedimentos de manipulação matricial. Neste trabalho, utilizou-se a ferramenta comercial MATLAB<sup>®</sup>. Esta é plenamente adequada para as operações necessárias, além de possuir facilidades para o armazenamento de informações, por meio de vetores e matrizes indexadas. A implementação destes procedimentos, relacionados com a obtenção dos deslocamentos, das deformações e das tensões, para um cilindro de material laminado, gerou um código-fonte.

Os dados de entrada para o funcionamento do código requerem definições geométricas básicas, como altura e diâmetros interno e externo do tubo. O empilhamento do compósito, com informações como número de camadas, suas espessuras parciais e ângulos de orientação das fibras também é definido pelo usuário antes da simulação. Para a geração da malha de elementos finitos, discretizando a seção de definição do cilindro radialmente, escolhe-se entre uma divisão da espessura em partes iguais, ou define-se o posicionamento em particular elemento a elemento. Em ambos os casos o número total de elementos da malha é escolhido pelo usuário.

Os resultados das simulações são apresentados por meio de relatório, ao fim dos procedimentos numéricos de cálculo. São informados, em seqüência, dados numéricos relativos aos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões, no sistema de coordenadas global definido, para todos os nós de cada elemento, elemento a elemento, para toda a malha.