

5 Simulações.

No presente capítulo são apresentadas simulações referentes ao comportamento de parâmetros importantes para o desenvolvimento do transdutor de pressão. As simulações foram elaboradas com o objetivo de obter base e experiência úteis para a realização e análise das medições.

5.1. Simulações para o Campo Magnético Gerado por um Ímã Permanente.

A fim de se mostrar o comportamento das componentes x , y e z (coordenadas cartesianas) do campo magnético gerado por um ímã permanente, são apresentadas as equações físicas que descrevem o fenômeno; estas foram ajustadas da melhor forma à nossa situação experimental e, em seguida, foi elaborada uma rotina de simulação em *MatLab*.

Por simplificação, vamos considerar que o ímã usado como fonte de campo magnético externo no transdutor em desenvolvimento esteja situado na origem dos eixos x e y , e esteja orientado na direção do eixo z como mostra a figura 31.

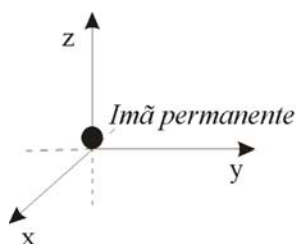


Figura 31 - Esquema da posição do ímã nos eixos cartesianos.

Para modelar o campo, supõe-se que o ímã seja uniformemente magnetizado ao longo do eixo z . Deve-se ainda considerar que o ímã seja composto por uma infinidade de dipolos magnéticos unitários orientados na

direção +z. Desta forma, *calcula-se* o campo de cada dipolo por meio da Lei de Biot-Savart, e integra-se os dipolos ao longo do comprimento do ímã.

O campo de um dipolo magnético é descrito pela equação [1]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + 3 \frac{[\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)](\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5} \right] \quad (8)$$

Onde $\vec{m} = m(0,0,1)$ é o momento de dipolo magnético, $\vec{r} = (x, y, z)$ e $\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$, onde (x, y, z) é a posição de medida do campo magnético pelo magnetômetro utilizado (posição do observador), e z_0 é a posição do dipolo unitário sobre o eixo z. Logo pode-se escrever,

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2} \quad (9)$$

e

$$\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = m(z - z_0) \quad (10)$$

Obtendo separadamente as componentes do campo magnético, têm-se:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3(z - z_0)x}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (11)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3(z - z_0)y}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (12)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2(z - z_0)^2 - x^2 - y^2}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (13)$$

Para integrar ao longo do comprimento do ímã, usa-se a relação entre o momento de dipolo magnético e a magnetização (M) para estabelecer o elemento de integração. O momento de dipolo pode ser definido como $m = M dA dz_0$, onde A é a área da seção reta do ímã, também constante. Dessa forma, determina-se $dm = M A dz_0$, onde M e A são uniformes e constantes podendo sair de dentro da integral, como mostrado a seguir.

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 MA}{4\pi} \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{3(z - z_0)x}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} dz_0 \quad (14)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 MA}{4\pi} \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{3(z - z_0)y}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} dz_0 \quad (15)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{\mu_0 MA}{4\pi} \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{2(z - z_0)^2 - x^2 - y^2}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{5}{2}}} dz_0 \quad (16)$$

Após a integração ao longo do comprimento do ímã, volta-se a considerar o momento de dipolo magnético, substituindo-se $MA = m/l$ para se obter:

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 mx}{4\pi \cdot l} \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (17)$$

$$B_y(x, y, z) = \frac{\mu_0 my}{4\pi \cdot l} \left[\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z + l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (18)$$

$$B_z(x, y, z) = \frac{3\mu_0 m}{4\pi \cdot l} \left[\frac{(z + l/2)}{[x^2 + y^2 + (z - l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(z - l/2)}{[x^2 + y^2 + (z + l/2)^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (19)$$

De posse das eqs. 17, 18 e 19 pode-se traçar os mapas das componentes B_x , B_y e B_z . Mais adiante, no capítulo 6, iremos utilizar a eq. 17 para se estimar, juntamente com alguns dados experimentais, a magnetização do ímã gerador do campo externo no transdutor em desenvolvimento.

5.1.1.

Mapas B_x , B_y e B_z .

Utilizando as equações eqs. 17, 18 e 19 foi possível executar simulações a respeito do comportamento das componentes do campo em uma região planar, similar à da membrana no sensor do transdutor, quando em repouso. Para essa simulação, supõe-se um ímã de magnetização igual a $m = 0,39 \text{ A/m}^2$, situado a uma distância igual a 3 mm da origem no *eixo* z , e na origem dos *eixos* x e y , como representado na figura 32.

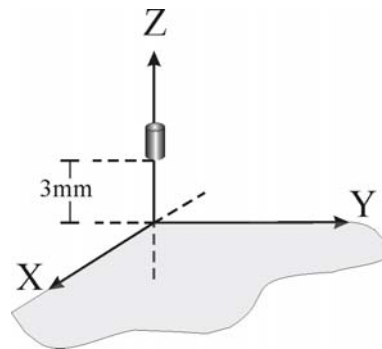
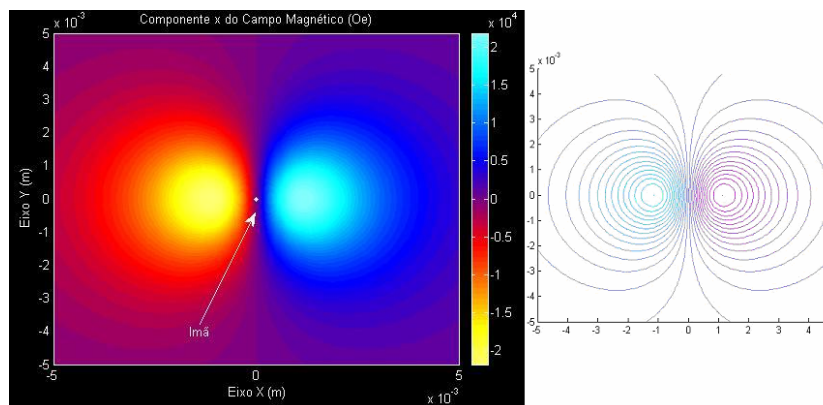


Figura 32 - Localização do ímã na simulação

Assim, na figura 33, tem-se demonstrado três gráficos do campo magnético gerado pelo ímã, cada um representando uma componente do sistema cartesiano.



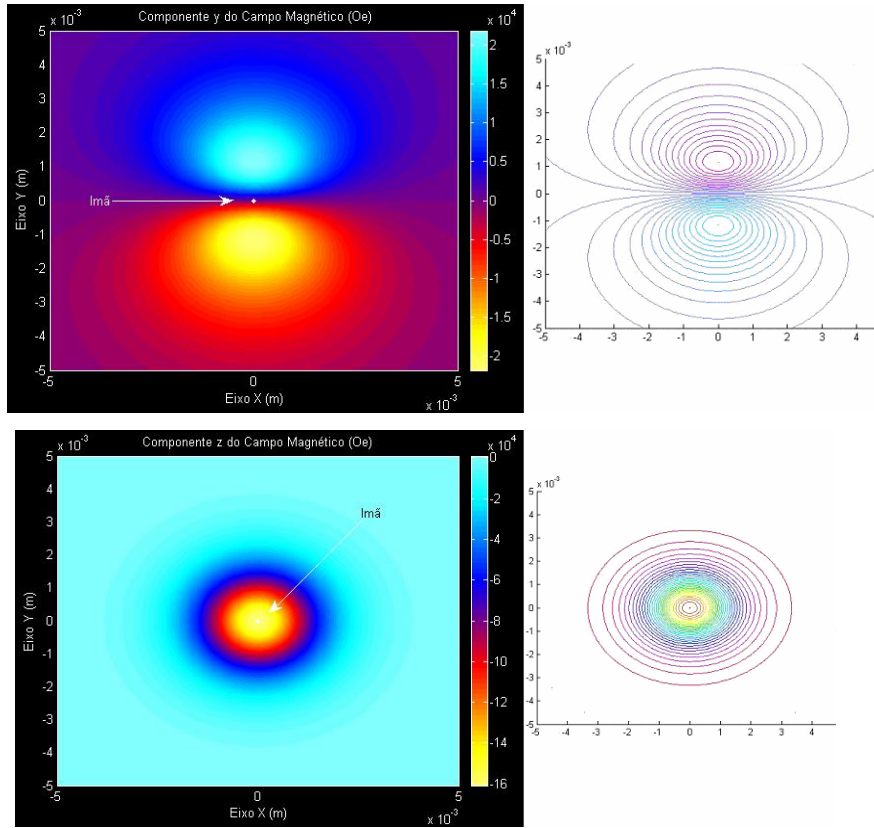


Figura 33 - Componentes x, y e z do campo magnético gerado por um ímã permanente.

5.2.

Simulações de vibração da membrana de estetoscópios.

A equação da onda gerada pela vibração de uma membrana elástica com amortecimento é representada [31] da seguinte forma:

$$a^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + ku \quad (20)$$

onde $u = u(r, \theta, t)$ é a função de vibração da membrana (amplitude), b é a constante de amortecimento, k é a constante de elasticidade da membrana, e $a = \sqrt{\text{tração}/\text{densidade}}$ é velocidade de propagação da onda de vibração.

Escrevendo o operador nabla (∇) em coordenadas polares, e assumindo que não há variações angulares, a eq. 20 fica:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + ku \quad (21)$$

Nesse ponto é conveniente se fazer uma simplificação do presente estudo, considerando que a vibração da membrana não tem dependência angular, ou seja, a função $u = u(r, t)$. Dessa forma, a eq. 21 pode ser escrita da seguinte forma:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + ku \quad (22)$$

Resolvendo essa equação diferencial, tem-se a amplitude da vibração da membrana ao longo do tempo.

Como a função u é uma função tanto do espaço quanto do tempo, pode-se escrevê-la como o produto de duas outras funções que dependam exclusivamente de r e t , $u = u(r, t) = R(r)T(t)$. Assim a eq. 22 fica:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 R(r)T(t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)T(t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 R(r)T(t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial R(r)T(t)}{\partial t} + kR(r)T(t) \quad (23)$$

Dividindo a eq. 23 por $R(r)T(t)$ e reagrupando convenientemente seus elementos chega-se a:

$$a^2 \left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{T(t)} \left(\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) + k \quad (24)$$

Como cada lado da eq. 24 só depende de r ou t respectivamente, a única forma desta igualdade ser válida é se ambos os termos forem iguais a uma constante qualquer. Chamando essa constante de $-\lambda^2$, tem-se

$$\left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2 T(t)} \left(\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) + k = -\lambda^2 \quad (25)$$

Assim, obtêm-se as duas equações diferenciais abaixo:

$$\left(\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) = -\lambda^2 \quad (26)$$

e

$$\frac{1}{a^2 T(t)} \left(\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) + k = -\lambda^2 \quad (27)$$

Reescrevendo as eqs. 26 e 27 chega-se a:

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \lambda^2 r^2 R = 0 \quad (28)$$

e

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + b \frac{\partial T(t)}{\partial t} + (\lambda^2 a^2 + k) = 0 \quad (29)$$

A eq. 28 é uma equação diferencial paramétrica de Bessel e a eq. 29 é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. Como as duas equações acima têm solução analítica, foi possível determiná-la e depois escrever uma rotina em *MatLab* que simulasse o comportamento de uma membrana quando submetida a uma deflexão inicial. Pode-se observar, na figura 33, a simulação da oscilação de uma faixa estreita de uma membrana elástica com uma densidade média de 2 g/cm^3 , comprimento igual a 25 mm , constante elástica de $k = 1 \text{ N/m}$, presa nas suas extremidades por uma tração de 1 N e amortecida por uma constante de amortecimento de $b = 0,5$. A Figura é composta por nove gráficos, cada um representando a posição da faixa da membrana em determinado instante de tempo.

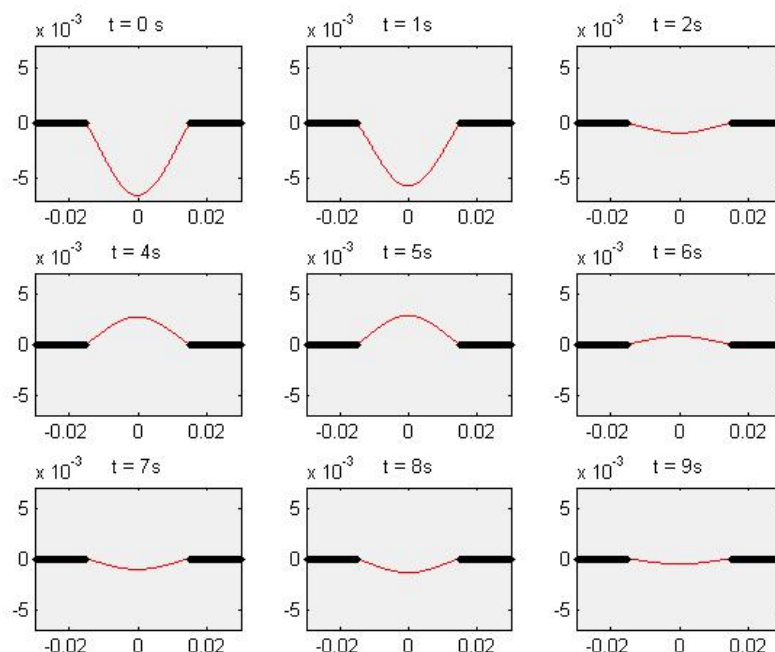


Figura 34 - Cada gráfico representa uma posição de uma fatia da membrana em um instante de tempo. O eixo x corresponde à distância em metros e o eixo y corresponde à amplitude da vibração também em metros.

5.3.

Simulação da distância ótima entre o ímã e as fitas MIG no transdutor.

Um importante dado que deve ser obtido para um melhor desempenho do transdutor é a determinação da distância que o ímã deve ficar das fitas MIG. Esse dado é importante, uma vez que, para se obter uma maior sensibilidade do transdutor, deve-se procurar uma posição em que o campo magnético longitudinal nas fitas apresente maior variação possível. Como ponto de partida para essa busca, toma-se por base a premissa de que a região mais sensível das fitas coincide com a região de campos magnéticos mais intensos. Assim, o ímã deve ser posto a uma distância que induza nas fitas um campo magnético de alta intensidade e que, ao mesmo tempo, apresente uma maior variação possível a pequenos deslocamentos.

Na figura 35a, podemos ter uma idéia de como o campo longitudinal da fita se relaciona com a componente x do campo magnético e com o co-seno do ângulo formado entre a posição da fita em repouso e dela deslocada.

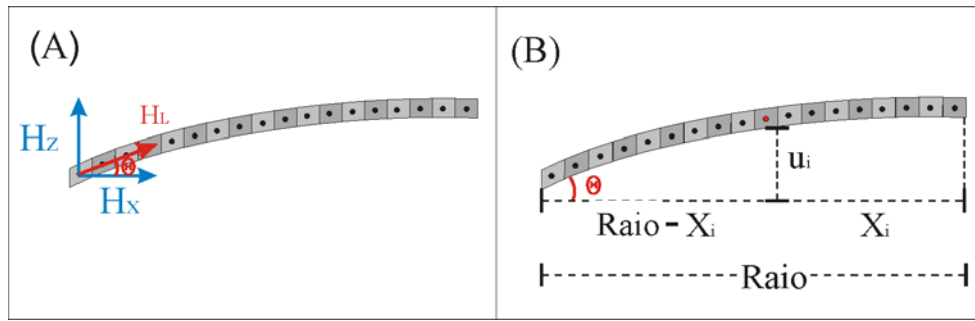


Figura 35 - Desenho esquemático de parte da fita MIG deslocada da sua posição de repouso.

Pode-se escrever que o campo magnético longitudinal à fita é

$$H_L = H_x \cdot \cos(\theta) + H_z \sin(\theta) \quad (30)$$

e, observando a figura 35b, pode-se escrever

$$\theta = \arctan[u_i / (r - x_i)] \quad (31)$$

Logo, podemos concluir que o campo magnético longitudinal à fita pode ser descrito como,

$$H_L = H_x \cdot \cos(\arctan[u_i / (r - x_i)]) + H_z \sin(\arctan[u_i / (r - x_i)]) \quad (32)$$

Fica bastante claro que o campo longitudinal será máximo quando a componente B_x é máxima. Assim, de posse dessas informações, foi possível escrever uma rotina em *MatLab* que procurasse a existência ou não de uma posição otimizada para o ímã. (Figura 36).

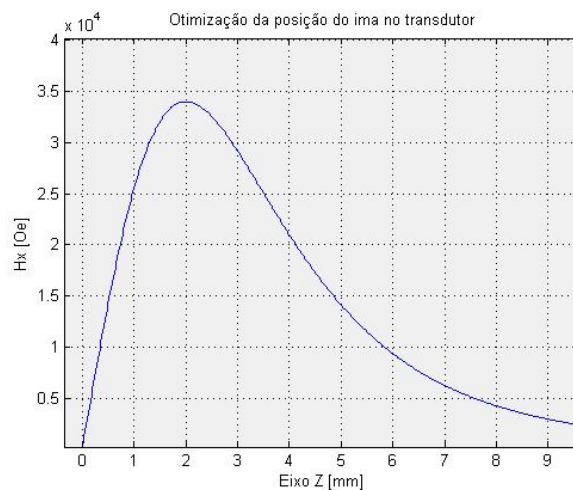


Figura 36 - Gráfico de otimização da posição do ímã no transdutor.

5.4.

Simulação do campo magnético sentido pelo transdutor.

Para se estimar o valor médio do campo magnético longitudinal às fitas MIG no transdutor é necessário que seja feita uma combinação das simulações feitas nos itens anteriores.

Foi simulada a vibração da fita sobre a membrana e determinada a sua posição relativa no tempo (admitindo-se que a posição da membrana só variou na direção do eixo z). A partir desses dados, foi simulada a variação da componente longitudinal do campo magnético (a uma distância igual a $2mm$, posição ótima do ímã), e a amplitude de oscilação da membrana (e, por conseguinte da fita).

Obtivemos algumas curvas de campo com o tempo de oscilação, onde fizemos variar a constante de amortecimento da vibração. Na figura 37 é apresentada a variação do campo magnético com o tempo, gerado por um ímã de $m = 0.39 A/m^2$ para uma deflexão inicial igual a $0,002m$, para 4 constantes de amortecimento distintas.

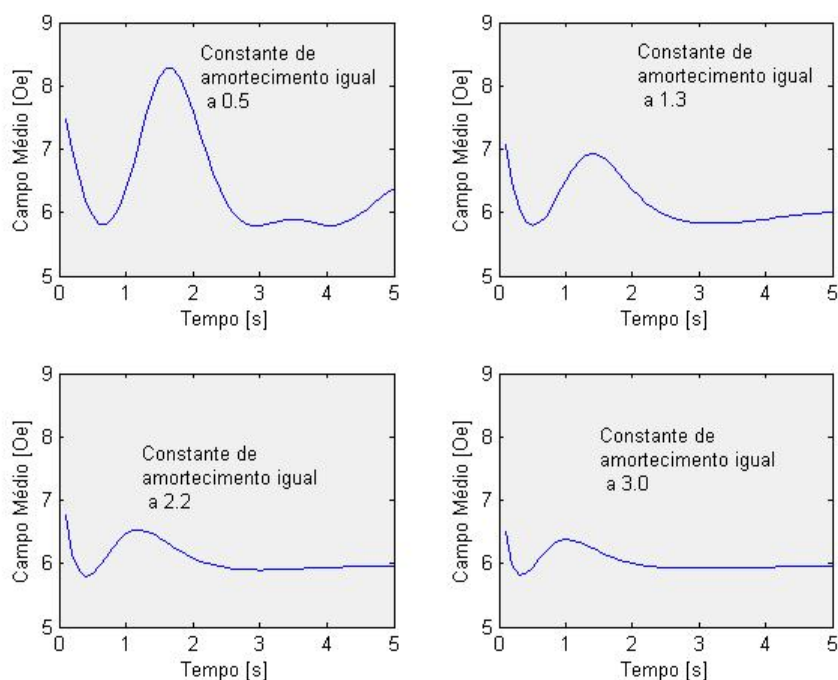


Figura 37 - Simulação do campo magnético sentido pelas fitas MIG quando postas a vibrar sob influência de uma deflexão inicial.