

8

VIGAS COM CONDIÇÕES INTERMEDIÁRIAS

Neste capítulo serão estudados alguns problemas de vigas que apresentam condições intermediárias [2]; seja de apoio, massa concentrada ou mola vertical. Esses problemas não apresentam solução analítica, então é necessário usar o método de elementos finitos para construir uma base de aproximação [3]. Nesses casos, é conveniente dividir o domínio do sistema de forma que cada sub-domínio não apresente qualquer restrição intermediária.

Para esses problemas, foram desenvolvidas diversas simulações, com o auxílio do Matlab, com o objetivo de aproximar frequências naturais, modos de vibração e, conseqüentemente, a dinâmica do sistema. Os resultados estão detalhadamente apresentados no apêndice deste trabalho.

8.1

Problemas de vigas com um apoio intermediário

Deseja-se apresentar a formulação fraca de problemas de vigas que apresentam um apoio intermediário e quaisquer condições de contorno. As vigas têm domínio $[0 \quad L]$ e o apoio intermediário encontra-se na coordenada $x = a$.

A formulação forte desse tipo de problema é composta pela equação diferencial de deslocamento da viga, em conjunto com as condições de contorno, as condições intermediárias e as condições iniciais. As condições representativas do apoio intermediário, em $x = a$, são:

$$u(a, t) = 0 \quad (8-1)$$

O mesmo procedimento apresentado anteriormente para a obtenção da formulação fraca de vigas deve ser adotado nos problemas de viga com apoio intermediário: multiplica-se a equação diferencial por uma função-teste $\psi(x)$

e integra-se todos os termos no domínio [0 a L]; o que resulta na equação abaixo:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-2)$$

A fim de facilitar os cálculos, a integral do domínio deve ser dividida na coordenada referente ao apoio intermediário:

$$\int_0^L = \int_0^a + \int_a^L \quad (8-3)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_a^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-4)$$

Calcula-se a integral por partes ($\int u dv = uv - \int v du$) duas vezes, resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) \psi(a) - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) \psi(0) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) \frac{d\psi}{dx}(a) \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi}{dx}(0) + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ & + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) \psi(L) - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) \psi(a) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi}{dx}(L) + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) \frac{d\psi}{dx}(a) \\ & + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-5)$$

À equação (8-5), aplica-se as condições de contorno do problema e condições intermediárias, o que resulta na formulação variacional do problema. A seguir, serão apresentados exemplos de problemas de vigas com diferentes condições de contorno, além do apoio intermediário e tem-se por objetivo:

- desenvolver formulação fraca do sistema;

- desenvolver o PVC associado (aproximar frequências e modos).

A escolha dos problemas estudados foi inspirada no livro de Robert Blevins, que apresenta tabelas de frequências naturais de vigas com diferentes condições de contorno além dos apoios intermediários. Através da aplicação do método de Elementos Finitos, pôde-se calcular o número de elementos necessários para reproduzir algumas dessas tabelas de acordo com uma precisão desejada. Além disso, aproximou-se os modos de vibração de cada caso.

8.1.1

Problema de viga bi-engastada com apoio intermediário

O problema de viga bi-engastada com apoio intermediário (A.47), apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0 \quad (8-6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

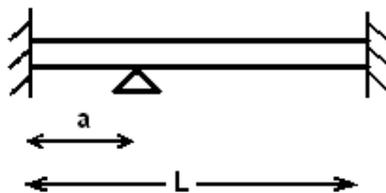


Figura 8.1: Viga bi-engastada com apoio intermediário

E a condição do apoio intermediário é descrita pela equação (8-1).

Essas condições devem ser aplicadas à equação e resultam na formulação variacional desse problema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \quad (8-7)$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste ψ pertence a um espaço de funções Adm_5 que satisfaça as condições de contorno essenciais e condições intermediárias essenciais do problema; além das condições de regularidade da função:

$$Adm_5 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \frac{d\psi}{dx}(L) = 0, \right. \\ \left. \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-8)$$

8.1.2

Problema de viga engastada-apoiada com apoio intermediário

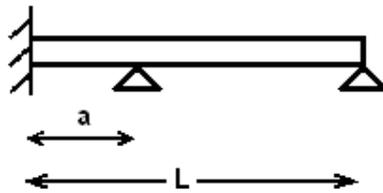


Figura 8.2: Viga engastada-apoiada com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \quad (8-9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \qquad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição do apoio intermediário é dada pela equação (8-1). Incorpora-se as condições de contorno e a condição intermediária a (8-5) e tem-se, como resultado, a formulação variacional do problema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-10)$$

A formulação fraca é formada pela formulação variacional em conjunto com o espaço de funções admissíveis, Adm_6 , tal que:

$$Adm_6 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \right. \\ \left. \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-11)$$

8.1.3

Problema de viga bi-apoiada com apoio intermediário

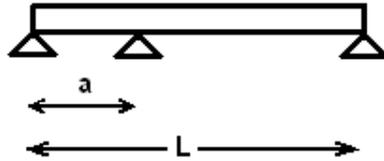


Figura 8.3: Viga bi-apoiada com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \quad (8-12)$$

$$\mathbb{M}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \qquad \mathbb{M}(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A restrição do intermediário é descrita por (8-1) e, juntamente com as condições de contorno, deve ser acrescentada a (8-5) para obter a formulação variacional do sistema:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \\ + \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx \quad (8-13)$$

No problema da viga bi-apoiada com apoio intermediário, a função-teste ψ pertence ao espaço Adm_7 :

$$Adm_7 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re | \psi(0) = 0, \psi(L) = 0, \psi(a) = 0\} \quad (8-14)$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 dx < \infty\}$$

8.1.4

Problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário

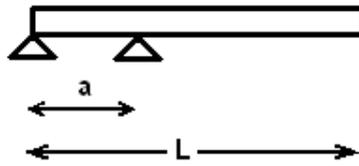


Figura 8.4: Viga apoiada-livre com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-15)$$

$$\mathbb{M}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \mathbb{M}(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição intermediária é dada por (8-1) que, em conjunto com as condições de contorno, é substituída na equação (8-5) e resulta na formulação variacional:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \quad (8-16)$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste do problema de viga apoiada-livre com apoio intermediário pertence ao espaço Adm_8 , definido por:

$$Adm_8 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re | \psi(0) = 0, \psi(a) = 0$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 dx < \infty\}$$
(8-17)

8.1.5

Problema de viga livre-livre com apoio intermediário

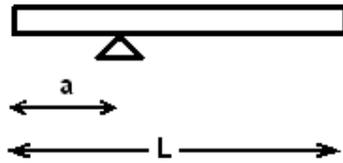


Figura 8.5: Viga livre-livre com apoio intermediário

Condições de contorno:

$$V(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0$$
(8-18)

$$M(0, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

A condição intermediária está apresentada na equação (8-1) e, uma vez substituída em (8-5), junto com as condições de contorno, tem-se a formulação variacional:

$$\int_0^a \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^a EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx + \int_a^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx$$

$$+ \int_a^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^a f(x, t) \psi(x) dx + \int_a^L f(x, t) \psi(x) dx$$
(8-19)

Para o problema de viga livre-livre com apoio intermediário, a função ψ pertence ao espaço Adm_9 , tal que:

$$Adm_9 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(a) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \right. \\ \left. \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-20)$$

8.2

Problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários

O mesmo procedimento adotado para vigas com um apoio intermediário deve ser empregado para vigas com n apoios intermediários. Isso pode ser entendido pelo exemplo a seguir, que é um problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários:

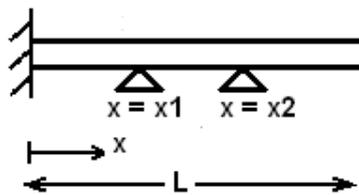


Figura 8.6: Viga engastada-livre com dois apoios intermediários

A equação de movimento da viga e as suas condições de contorno são, respectivamente:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) - f(x, t) = 0 \quad (8-21)$$

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

As condições dos apoios intermediários são:

$$u(x_1, t) = 0 \quad u(x_2, t) = 0 \quad (8-23)$$

Multiplica-se a equação de movimento da viga por $\psi(x)$ e integra-se todos os termos no domínio $[0 \quad L]$. Nesse problema, os apoios intermediários encontram-se nas posições $x = x_1$ e $x = x_2$, então é conveniente dividir o domínio do sistema em três subdomínios:

$$\int_0^L dx = \int_0^{x_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \int_{x_2}^L dx \quad (8-24)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (8-25)$$

Faz-se a integração por partes ($\int u dv = uv - \int v du$) duas vezes, resultando na formulação em que deverão ser incorporadas as condições de contorno naturais, a função-teste satisfazendo as condições de contorno essenciais e as condições intermediárias do problema:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_1, t) \underbrace{\psi(x_1)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t) \frac{d\psi(x_1)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) \underbrace{\psi(0)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \underbrace{\frac{d\psi(0)}{dx}}_{=0} + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_2, t) \underbrace{\psi(x_2)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t) \frac{d\psi(x_2)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_1, t) \underbrace{\psi(x_1)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t) \frac{d\psi(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) \underbrace{\psi(L)}_{=0} - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} - EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_2, t) \underbrace{\psi(x_2)}_{=0} \\ & + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t) \frac{d\psi(x_2)}{dx} + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned}$$

A formulação variacional do problema de uma viga engastada-livre com dois apoios intermediários é:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^{x_1} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_0^{x_1} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_{x_2}^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_{x_2}^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx - \int_{x_2}^L f(x, t) \psi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (8-26)$$

Nesse problema de viga engastada-livre com dois apoios intermediários, a função-teste ψ pertence ao espaço Adm_{10} que apresenta as seguintes características:

$$Adm_{10} = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(x_1) = 0, \quad (8-27)$$

$$\psi(x_2) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

8.3

Viga bi-engastada com uma mola vertical em coordenada intermediária

Considere o problema de uma viga bi-engastada, com mola vertical intermediária, localizada na coordenada $x = a$, conforme mostra a figura (A.55):

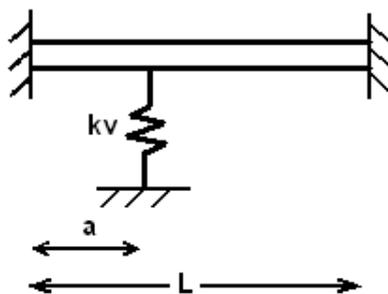


Figura 8.7: Viga bi-engastada com mole vertical em $x = a$

As condições de contorno da viga bi-engastada estão apresentadas na equação (4-6) e as condições intermediárias devido a mola vertical, em $x = a$, são:

$$M(a, t) = 0 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0 \quad (8-28)$$

$$V(a, t) = k_v u(a, t) \implies \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(a, t) = \frac{k_v}{EI} u(a, t)$$

A mola vertical no meio do domínio $[0, L]$ é representada por um termo extra que aparece na formulação variacional do problema de uma viga bi-engastada. Para calcular a formulação fraca, parte-se da equação diferencial do problema, que é multiplicada pela função-teste ψ e integrada em todo o domínio:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi(0) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \\ & - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-29)$$

Na equação (8-29), incorpora-se as condições de contorno do problema, resultando na equação:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi(L)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \\ & - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{=0} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-30)$$

E a formulação variacional desse problema é:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_v u \psi(a) + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \\ & = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-31)$$

A função-teste ψ deve satisfazer às condições de contorno essenciais:

$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$; ou seja, ψ deve pertencer a um espaço Adm_{11} tal que:

$$Adm_{11} = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0, \psi(L) = 0, \right. \\ \left. \frac{d\psi}{dx}(L) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (8-32)$$

8.4

Viga bi-apoiada com massa concentrada em coordenada intermediária

Considere o problema de uma viga bi-apoiada com uma massa concentrada (m_c) localizada na coordenada $x = a$, de acordo com a figura (A.57):

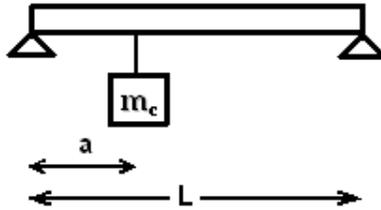


Figura 8.8: Viga bi-apoiada com massa concentrada em $x = a$

Esse problema de viga apresenta as condições de contorno da equação (8-12) e as seguintes condições intermediárias:

$$M(a, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, t) = 0 \quad (8-33)$$

$$V(a, t) = m_c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t); \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = \frac{m_c}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a, t)$$

Esse problema é similar ao da viga bi-engastada com mola em coordenada intermediária. A massa concentrada (m_c) em $x = a$ será representada por um termo adicional na formulação variacional da viga. E a formulação fraca é obtida através do mesmo procedimento:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi(0) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + m_c \ddot{u}(a) \quad (8-34)$$

$$- EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

À equação (8-34), incorpora-se as condições de contorno do problema, resultando na formulação fraca:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi(L)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) + k_v u \psi(a) \quad (8-35)$$

$$- EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{=0} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A formulação do problema é:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_v u \psi(a) + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \quad (8-36)$$

$$= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$$

A função-teste desse problema pertence a um espaço de funções Adm_{12} definido por:

$$Adm_{12} = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \psi(L) = 0 \} \quad (8-37)$$

$$\int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \}$$

8.5

Problema de viga apoiada-livre com uma mola torcional

Deseja-se encontrar a formulação fraca de uma viga apoiada-livre, que contém uma mola torcional (k_t) na extremidade do apoio:

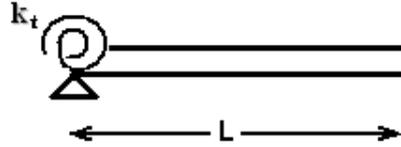


Figura 8.9: Viga apoiada-livre com uma mola torcional na extremidade do apoio

Esse problema possui as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0 \quad (8-38)$$

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = k_t \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \quad M(L, t) = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

Parte-se da formulação forte do problema e, após as devidas integrações, chega-se à equação (5-3) onde devem ser incorporadas as condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi(L) \underbrace{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t)}_{=0} - EI \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t)}_{=0} \frac{d\psi(L)}{dx} \\ + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)}_{= \frac{k_t}{EI} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)} \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-39)$$

A formulação variacional do problema de viga apoiada-livre com mola torcional é:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_t \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \frac{d\psi(0)}{dx} + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8-40)$$

de forma que a função-teste ψ pertença ao espaço Adm_{13} que satisfaz as condições de contorno essenciais:

$$Adm_{13} = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \right. \quad (8-41)$$

$$\left. \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \text{ nonumber} \quad (8-42)$$

8.6

Aproximação da dinâmica de um problema de viga com apoio intermediário

Nesta seção serão apresentados todos os passos necessários para aproximar a dinâmica de um problema [2]. Nesses casos, as frequências naturais e os modos de vibração não são conhecidos e, por isso, precisam ser aproximados pelo método de Elementos Finitos.

Considere o problema de uma viga bi-engastada, com um apoio intermediário e uma força F aplicada; conforme indica a figura (8.10). A viga apresenta comprimento L , área da seção transversal A e momento de inércia da seção transversal I ; o material tem densidade ρ e módulo de elasticidade E . O apoio intermediário encontra-se na coordenada $x = a$ e a força é aplicada em $x = b$.

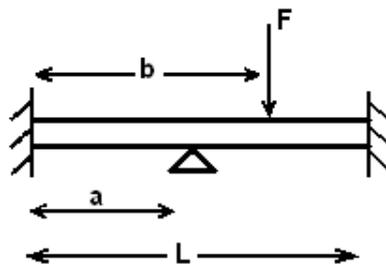


Figura 8.10: Viga engastada-apoiada-engastada com força aplicada

Sendo:

$L = 3m \implies$ comprimento da viga

$h = 0.05m \implies$ altura da viga

$b = 0.1m \implies$ largura da viga

$E = 2 \cdot 10^{11} \implies$ módulo de elasticidade

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3 \implies$ densidade

Deseja-se aproximar a dinâmica do sistema. O problema pode ser dividido em duas partes: aproximação dos modos (pelo MEF) e aproximação da dinâmica. Deseja-se encontrar a solução tal que o erro (e) da aproximação dos modos seja menor do que a precisão estabelecida p , por exemplo, 10^{-2} ; ou seja $e < 0.01$. Além disso, o erro da aproximação da dinâmica também deve ser menor do que a precisão desejada. Como não existe solução analítica para este problema, o erro será baseado na comparação entre duas simulações. Faz-se os cálculos para um número qualquer de elementos e armazena-se os resultados. Em seguida, repete-se os cálculos para uma malha mais refinada e a diferença encontrada entre os dois casos, será o erro. Se esse erro estiver dentro da precisão estabelecida inicialmente, conclui-se que o número de elementos da primeira simulação é suficiente; caso contrário, faz-se novos cálculos, para um número de elementos ainda maior. Esse procedimento deverá ser repetido até que a precisão desejada seja atingida.

O erro nas frequências e modos é obtido pela comparação de frequências naturais e de funções dos modos de vibração do sistema. São calculadas as primeiras cinco frequências naturais para 10 elementos e, em seguida, para 20 elementos. Calcula-se o somatório das diferenças absolutas entre as frequências; comparando a primeira frequência da primeira simulação ($f_1(s_1)$) com a primeira frequência da segunda simulação ($f_1(s_2)$), a segunda frequência da primeira simulação ($f_2(s_1)$) com a segunda frequência da segunda simulação ($f_2(s_2)$) e assim por diante. A diferença entre as funções dos modos é calculada pelo erro norma L_2 , conforme apresenta a equação (6-27); sendo o erro nos modos o somatório das diferenças entre os valores dos modos, nos nós do sistema. O erro total em frequências e modos é dado pela soma do erro nas frequências com o erro nos modos.

Erro nas frequências naturais:

$$\| \omega^N - \omega^{2N} \| = \sum | \omega_i^N - \omega_i^{2N} |$$

Erro nos modos de vibração:

$$\| \phi^N - \phi^{2N} \| = \left(\int_a^b | \phi^N - \phi^{2N} |^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\text{Erro total} = \|\omega^N - \omega^{2N}\| + \|\phi^N - \phi^{2N}\|$$

Primeira Parte: Aproximação dos modos

Essa etapa consiste na construção de uma aproximação dos modos, através do método de Elementos Finitos. Para isso, considera-se nulo o forçamento externo e resolve-se um *problema de valor característico*. A formulação fraca pode ser descrita pela equação (8-7).

Inicialmente, define-se os parâmetros geométricos, as propriedades do material, o número de elementos e o tipo de aproximação (número de nós por elemento). Suponha que o sistema seja discretizado em 10 elementos lineares, de dois nós, resultando em 11 nós. O apêndice deste trabalho explica detalhadamente os programas do Matlab, que seguem a seguinte estrutura:

- Lista dos graus de liberdade associados a cada elemento;
- Lista de coordenadas dos nós;
- Lista de graus de liberdade por nó;
- Construção das matrizes de massa $RMat_M^e$ e de rigidez $RMat_K^e$ elementares;
- Montagem das matrizes globais do sistema ($RMat_M^G$ e $RMat_K^G$);
- Eliminação de linhas e colunas das matrizes globais referentes a graus de liberdade restritos;
- Resolução do problema de auto-valor.

Ao concluir essas etapas, tem-se por resultado as frequências naturais e os modos de vibração do sistema. Para esse problema de uma viga bi-engastada com um apoio intermediário, obteve-se:

Frequências Naturais:(aproximação com 10 elementos)

0.143059 · 10³ Hz

0.207652 · 10³ Hz

0.464707 · 10³ Hz

0.574372 · 10³ Hz

0.977378 · 10³ Hz

Frequências Naturais:(aproximação com 20 elementos)

0.143024 · 10³ Hz

0.207546 · 10³ Hz

0.463562 · 10³ Hz

$$0.572238 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.967732 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Frequências Naturais:(aproximação com 40 elementos)

$$0.143022 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.207539 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.463488 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.572098 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$0.967066 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

De acordo com os resultados encontrados, verificou-se que o erro encontrado entre as aproximações de 10 e 20 elementos era maior do que a precisão desejada; tornando-se necessário refazer os cálculos para a aproximação com 40 elementos. O erro entre as simulações de 20 e 40 elementos satisfaz a precisão p do problema. Com isso, conclui-se que 20 elementos são necessários para calcular a dinâmica desse problema; ou seja, numa próxima simulação não será necessário um número maior de elementos.

Modos de Vibração(aproximação com 40 elementos)

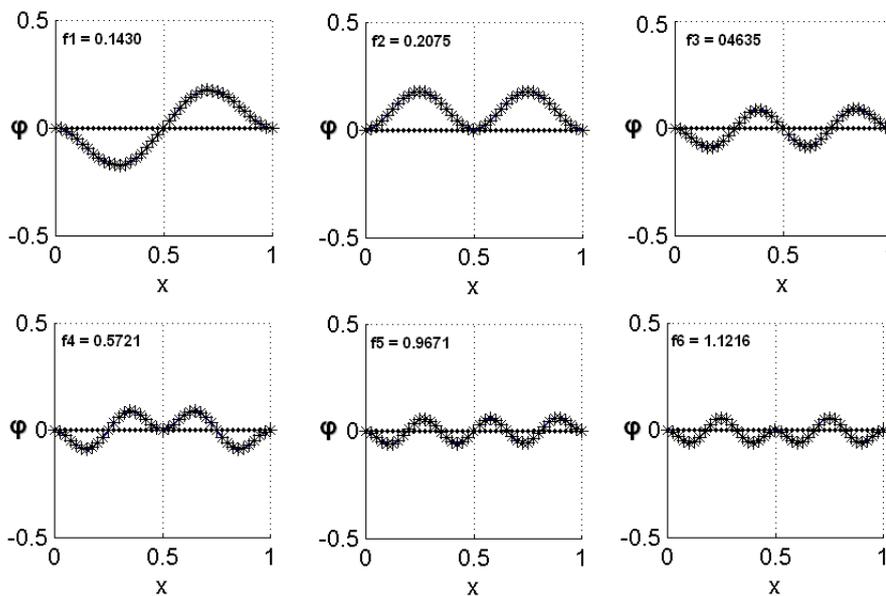


Figura 8.11: Modos de Vibração de uma viga bi-engastada com apoio intermediário

Segunda Parte: Aproximação da dinâmica do sistema

Uma vez aproximados os modos de vibração, pode-se aproximar a dinâmica do sistema. Quanto maior o número de elementos em que o sistema é discretizado, melhor a aproximação dos modos, calculada por Elementos Finitos; porém maior será o sistema de equações diferenciais ordinárias (edo's). Para diminuir o esforço computacional necessário para solucionar o sistema completo de edo's, constrói-se um modelo reduzido de equações diferenciais e faz-se a discretização no tempo desse modelo reduzido. Concluiu-se que cinco modos de vibração são suficientes para aproximar a dinâmica desse sistema.

Foi aplicada uma força harmônica F , na coordenada $x = 0.9L$; e a dinâmica foi aproximada no ponto de observação $x = x_0$. O integrador do Matlab utilizado foi o *ode45* que tem como entradas a função, o tempo de integração e as condições iniciais do problema.

Fez-se uma comparação da aproximação da dinâmica do problema pelo Método de Elementos Finitos e pelo modelo reduzido 5 modos), que pode ser visualizada pelo gráfico (8.12)

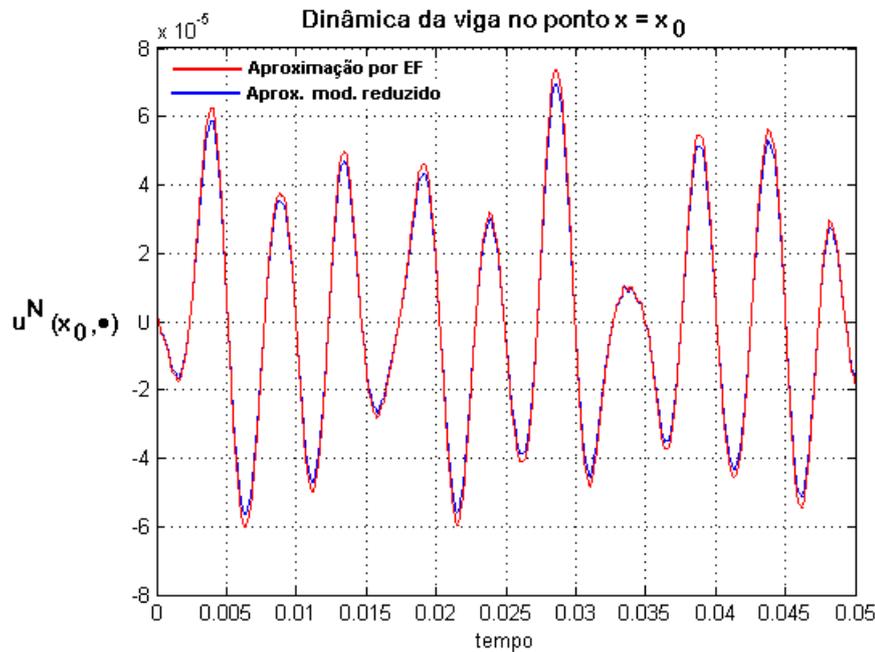


Figura 8.12: Dinâmica aproximada no ponto $x = x_0$

O procedimento para aproximar a dinâmica de sistemas contínuos pode ser visualizado pela figura (8.13):

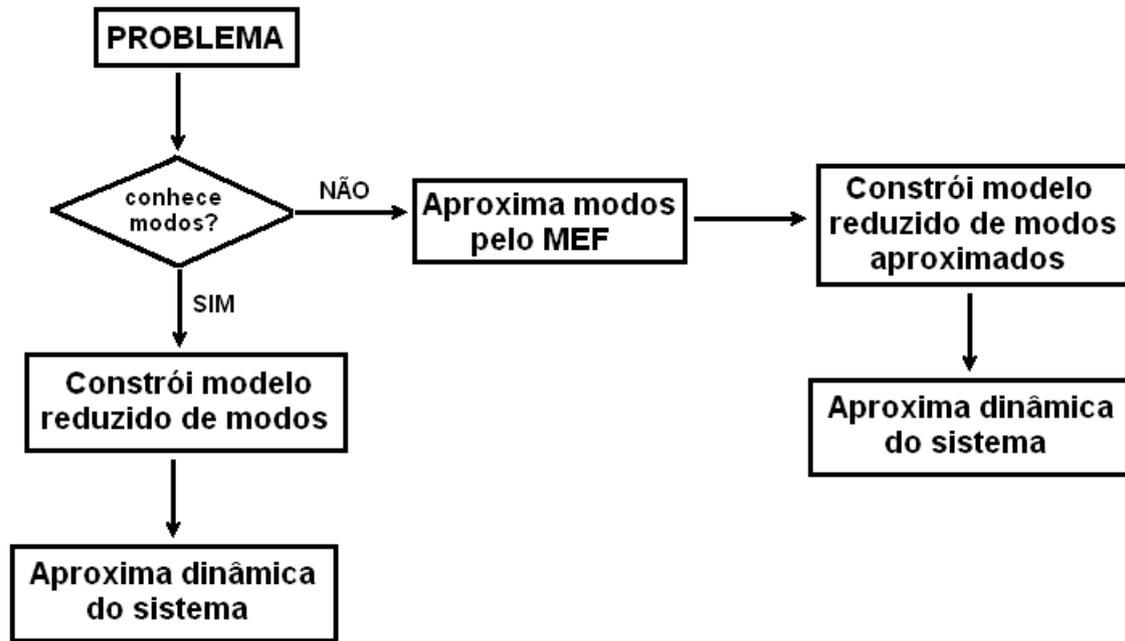


Figura 8.13: Procedimento adotado para aproximar dinâmica de sistemas contínuos