

7

APLICAÇÃO DO MEF PROBLEMAS DE BARRAS E VIGAS

Este capítulo tem, por objetivo, mostrar a aplicação do Método de Elementos Finitos em problemas de barras e de vigas apresentando as matrizes elementares e globais do sistema.

7.1

Problema de uma barra fixa-livre

A formulação fraca da barra fixa-livre é dada pela equação (3-31).

7.1.1

Escolha do número de elementos e do tipo de elemento

A fim de facilitar o entendimento, escolheu-se dividir o domínio em 3 elementos ($N = 3$) lineares (de dois nós):

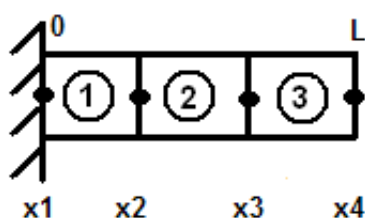


Figura 7.1: Barra fixa-livre dividida em elementos

A formulação fraca deverá ser escrita para cada um dos elementos, aplicando as funções de interpolação correspondentes ao elemento linear e respeitando as coordenadas globais de cada elemento:

$$\rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_0^L f \phi_j dx \quad (7-1)$$

– Elemento 1: $x_1 < x < x_2$

$$\rho A \int_{x_1}^{x_2} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_1}^{x_2} f \phi_j dx \quad (7-2)$$

e as matrizes elementares são dadas por:

$$M^{(1)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (7-3)$$

$$K^{(1)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-4)$$

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f \phi_1 dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (7-5)$$

Para o elemento 1, tem-se a equação:

$$M^{(1)} \ddot{X}^{(1)} + K^{(1)} X^{(1)} = F^{(1)} \quad (7-6)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix}; \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (7-7)$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad K^{(1)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

– Elemento 2: $x_2 < x < x_3$

$$\rho A \int_{x_2}^{x_3} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EA \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_2}^{x_3} f \phi_j dx \quad (7-8)$$

tal que as matrizes elementares são:

$$M^{(2)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_3 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx \end{pmatrix} \quad (7-9)$$

$$K^{(2)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx \\ \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-10)$$

$$F^{(2)} = \begin{pmatrix} \int_{x_2}^{x_3} f \phi_2 dx \\ \int_{x_2}^{x_3} f \phi_3 dx \end{pmatrix} \quad (7-11)$$

Para o elemento 2, tem-se a equação:

$$M^{(2)} \ddot{X}^{(2)} + K^{(2)} X^{(2)} = F^{(2)} \quad (7-12)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \end{pmatrix}; \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (7-13)$$

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} \\ M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad K^{(2)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

– Elemento 3: $x_3 < x < x_4$

$$\rho A \int_{x_3}^{x_4} \phi_i \phi_j dx \ddot{u}_i + EA \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i = \int_{x_3}^{x_4} f \phi_j dx \quad (7-14)$$

onde as matrizes do elemento são:

$$M^{(3)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_4 dx \\ \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-15)$$

$$K^{(3)} = EA \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \\ \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-16)$$

$$F^{(3)} = \begin{pmatrix} \int_{x_3}^{x_4} f \phi_3 dx \\ \int_{x_3}^{x_4} f \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-17)$$

Para o elemento 3, tem-se a equação:

$$M^{(3)} \ddot{X}^{(3)} + K^{(3)} X^{(3)} = F^{(3)} \quad (7-18)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \end{pmatrix}; \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7-19)$$

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{pmatrix}; \quad K^{(3)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{pmatrix}; \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

As matrizes de massa e de rigidez globais do sistema são montadas a partir das matrizes elementares, respeitando os deslocamentos correspondentes a cada elemento. A equação global do sistema corresponde a:

$$M^{(G)} \ddot{X}^{(G)} + K^{(G)} X^{(G)} = F^{(G)} \quad (7-20)$$

sendo:

$$\ddot{X}^{(G)} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \end{pmatrix}; \quad X^{(G)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7-21)$$

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & M_{21}^{(2)} & M_{22}^{(2)} + M_{11}^{(3)} & M_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & M_{21}^{(3)} & M_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-22)$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-23)$$

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad (7-24)$$

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx & 0 & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 \phi_2 dx + \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_2 \phi_3 dx & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_2}^{x_3} \phi_3 \phi_3 dx + \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_3 \phi_4 dx \\ 0 & 0 & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_3}^{x_4} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-25)$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & 0 & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_{x_2}^{x_3} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \\ 0 & 0 & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} dx & \int_{x_3}^{x_4} \frac{d\phi_4}{dx} \frac{d\phi_4}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (7-26)$$

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f \phi_1 \\ \int_{x_1}^{x_2} f \phi_2 + \int_{x_2}^{x_3} f \phi_1 \\ \int_{x_2}^{x_3} f \phi_2 + \int_{x_3}^{x_4} f \phi_1 \\ \int_{x_3}^{x_4} f \phi_2 \end{pmatrix} \quad (7-27)$$

7.2

Viga engastada com massa concentrada na extremidade

A viga engastada-massa apresenta-se na figura (A.29) e a sua formulação fraca é dada pela equação (5-43) que, com algumas substituições, pode ser representada por (5-45).

7.2.1

Aplicação do MEF à viga engastada-massa

Aleatoriamente, escolheu-se o número de elementos no qual o sistema será discretizado, $N = 4$; e o tipo de elemento a ser utilizado: linear, de dois nós.

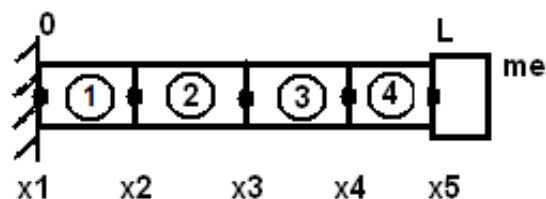


Figura 7.2: Viga engastada-massa dividida em elementos

A formulação fraca deverá ser escrita para cada um dos elementos, aplicando as funções de interpolação correspondentes e considerando as coordenadas de cada elemento. Cada nó possui três graus de liberdade: deslocamento longitudinal (efeito de barras), deslocamento vertical e rotação (efeito de vigas).

Considere um elemento genérico, limitado por dois nós (k e $k+1$); e a sua coordenada x varia da seguinte forma: $x_k < x < x_{k+1}$

$$\begin{aligned} \rho A \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{a}_i + EI \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i \\ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_j dx \end{aligned} \quad (7-28)$$

As matrizes elementares são dadas por:

$$M^{(e)} = \rho A \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_1 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_2 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_3 \phi_4 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_1 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_3 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_4 \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-29)$$

$$K^{(e)} = \rho A \begin{pmatrix} \int \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \\ \int \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_3}{dx^2} dx & \int \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} dx \end{pmatrix} \quad (7-30)$$

$$F^{(e)} = \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_1 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_2 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_3 dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_4 dx \end{pmatrix} \quad (7-31)$$

Cada elemento do sistema pode ser representado pela equação massa-mola:

$$M^{(e)} \ddot{X}^{(e)} + K^{(e)} X^{(e)} = F^{(e)} \quad (7-32)$$

tal que:

$$\ddot{X}^{(e)} = \begin{pmatrix} \ddot{Y}_k \\ \ddot{\gamma}_k \\ \ddot{Y}_{k+1} \\ \ddot{\gamma}_{k+1} \end{pmatrix} \quad X^{(e)} = \begin{pmatrix} Y_k \\ \gamma_k \\ Y_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \end{pmatrix} \quad (7-33)$$

de forma que Y_k representa o deslocamento transversal do nó k e γ_k , a rotação. Da mesma forma, Y_{k+1} é o deslocamento transversal do nó $k+1$ e γ_{k+1} , a sua rotação.

Para todos os elementos do sistema, as matrizes de massa, matrizes de rigidez e os vetores de carregamento serão montados da forma apresentada acima.

As matrizes globais devem ser montadas respeitando as variáveis Y_k e γ_k de cada elemento:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \dots & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & M_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-34)$$

A massa concentrada na extremidade da viga será representada por um termo adicional, $m_e \phi_N \phi_N$, que afeta a matriz de massa do sistema, no seu

último grau de liberdade (rotação do último nó). Com o efeito adicional da massa concentrada, a matriz global de massa é:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \cdots & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & M_{44}^{(4)} + m_e \end{pmatrix} \quad (7-35)$$

a matriz de rigidez e o vetor carregamento globais do sistema são, respectivamente:

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \cdots & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-36)$$

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \vdots \\ F_4^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-37)$$

7.3

Viga engastada com mola vertical na extremidade livre

A viga engastada-mola, apresentada na figura (A.27), tem a sua formulação fraca na equação (5-32) que também pode ser representada por (5-34).

7.3.1

Aplicação do MEF à viga engastada-mola

Deseja-se apresentar, a partir da formulação fraca do sistema, como deve ser representada a mola vertical localizada na extremidade livre da viga para uma aproximação por Elementos Finitos.

O sistema deve ser discretizado e definiu-se que ele será dividido em 4 elementos ($NE = 4$), cujas aproximações sejam lineares (elementos de dois nós).

A formulação fraca estava descrita para todo o domínio do sistema, mas deverá ser subdividida para cada elemento, de acordo com as suas coordenadas.

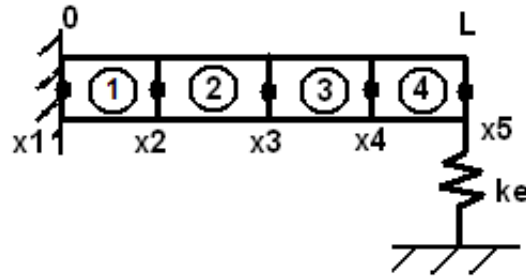


Figura 7.3: Viga engastada-mola dividida em elementos

Para um elemento genérico, de nós k e $k + 1$; sua coordenada x varia da seguinte forma: $x_k < x < x_{k+1}$

$$\rho A \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + EI \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i + k_e \phi_i \phi_j a_i = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \phi_j dx \quad (7-38)$$

As matrizes elementares de massa e de rigidez são as mesmas apresentadas no exemplo anterior, bem como o vetor carregamento; e cada elemento também pode ser representado pela equação massa-mola (7-32).

A partir das matrizes elementares, pode-se montar as matrizes de massa e de rigidez globais:

$$M^{(G)} = \begin{pmatrix} M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(1)} & M_{13}^{(1)} & M_{14}^{(1)} & & \\ M_{21}^{(1)} & M_{22}^{(1)} & M_{23}^{(1)} & M_{24}^{(1)} & & \\ M_{31}^{(1)} & M_{32}^{(1)} & M_{33}^{(1)} + M_{11}^{(2)} & M_{34}^{(1)} + M_{12}^{(2)} & \dots & \\ M_{41}^{(1)} & M_{42}^{(1)} & M_{43}^{(1)} + M_{21}^{(2)} & M_{44}^{(1)} + M_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & M_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-39)$$

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \dots & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-40)$$

A mola vertical na extremidade livre da viga deve ser representada por um termo adicional $k_e \phi_{N-1} \phi_{N-1}$, que a afeta a matriz de rigidez do sistema, no penúltimo grau de liberdade (deslocamento vertical do último nó). Com o efeito da mola vertical, a matriz de rigidez global passa a ser:

$$K^{(G)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & \dots & \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & \vdots & & & K_{33}^{(4)} + k_e \\ & & & & & & K_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-41)$$

o vetor carregamento global do sistema é:

$$F^{(G)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_4^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \vdots \\ F_4^{(4)} \end{pmatrix} \quad (7-42)$$