6 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS - MEF

O Método de Elementos Finitos é uma técnica de discretização de um problema descrito na Formulação Fraca, na qual o domínio é aproximado por um conjunto de subdomínios (elementos); e constrói-se, sistematicamente, as funções de aproximação para cada um desses elementos [7].

Os parâmetros das funções de aproximação representam os valores da solução para um número de pontos selecionados, chamados nós; que podem estar nos contornos ou no interior dos elementos. As funções de aproximação são, então, chamadas de funções de interpolação [17] e o grau dessas funções depende do número de nós no elemento e da ordem da equação diferencial a ser aproximada.

O MEF consiste nas seguintes etapas [14]:

- 1. Aproximação do domínio:
 - construção da malha de elementos finitos;
 - numeração dos nós e elementos;
- 2. Aproximação da solução (descrita pela formulação fraca) no domínio aproximado:
 - construção da formulação variacional para um elemento genérico;
 - suposição de que a variável dependente u é da forma

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i;$$

que, substituída na formulação variacional, resulta nas equações locais (elementares), da forma:

$$[M^e]\ddot{u}^e + [K^e]u^e = F^e;$$

- dedução ou seleção (caso existam na literatura) das funções de interpolação ϕ_i e montagem das matrizes elementares;
- Acoplamento das equações elementares, para obtenção das equações globais do sistema:
 - identificação das condições de continuidade entre os elementos, relacionando os graus de liberdade locais com os graus de liberdade globais (do sistema);
 - obtenção das equações globais do sistema, sob a forma:

$$[M^G]\ddot{u}^G + [K^G]u^G = F^G;$$

- 4. Imposição das Condições de Contorno:
 - quando as equações do sistema estiverem prontas para serem resolvidas, elas devem ser modificadas para considerar as condições de contorno do problema. Nesse momento, impõe-se os valores nodais conhecidos;
- 5. Solução do Sistema de Equações:
 - cálculos das variáveis dependentes desconhecidas.

A discretização por Elementos Finitos requer três escolhas: do número de elementos iniciais, no qual o sistema será subdividido inicialmente; escolha do tipo de elemento (define o tipo de aproximação); e definição da precisão da aproximação desejada [14].

Todo esse processo, desde a modelagem de um problema até a discretização por elementos finitos pode ser visualizado pelo esquema da figura (6.1):



Figura 6.1: Procedimento completo do Método de Elementos Finitos [1]

Deseja-se apresentar um exemplo que realize os passos descritos no diagrama (6.1). Considere um círculo de raio R [5], como o da figura (6.2):



Figura 6.2: Círculo de raio ${\cal R}$

Objetivo: Calcular a área A do círculo

Aproximação: a área do círculo é aproximada pelo somatório das áreas de triângulos inscritos iguais inscritos. Para obter esses triângulos, escolhe-se pontos equidistantes ao longo da circunferência. O número de pontos escolhidos define o número de triângulos inscritos no círculo. Uma vez definidos os triângulos, pode-se calcular a área de cada um deles e o respectivo somatório, que corresponde à aproximação desejada.

A solução do problema, a área do circulo, e é dada pela fórmula $A = \pi R^2$. Suponha um círculo de raio R = 10cm e aproxima-se o valor de π por 3.1415. Com isso, a solução do problema é $A = 314.15cm^2$.

Foram feitas diversas aproximações e calculadas as áreas correspondentes (A_p) . Inicialmente, escolheu-se 4 pontos ao longo da circunferência e calculou-se o somatório das áreas dos quatro triângulos inscritos. O mesmo procedimento foi realizado para 5, 6, 7, 8 e 9 triângulos, conforme apresentam as figuras (6.3), (6.4) e (6.5)



Figura 6.3: Círculo discretizado em 4 e 5 triângulos



Figura 6.4: Círculo discretizado em 6 e 7 triângulos



Figura 6.5: Círculo discretizado em 8 e 9 triângulos

A rotina de divisão do círculo em mais triângulos deve ser repetida quantas vezes forem necessárias, até que a precisão estabelecida inicialmente seja satisfeita. Uma vez satisfeita a precisão, deve-se, simplesmente interpretar os resultados obtidos.

Supondo que a precisão e do problema seja definida por $2e^{-1}$, deseja-se calcular o número de pontos necessários para obter uma aproximação válida. A área exata do círculo, A_e , é dada por:

$$A_e = \pi R^2 = 314.1593 \tag{6-1}$$

A tabela (6.1) apresenta a comparação entre as aproximações calculadas e a solução.

Discretização (n pontos)	Aproximação $(A_p = (b_i * h_i/2) * n)$	Erro $E = A_e - A_p$
4 pontos	$200.0000 \ cm^2$	114.1593
5 pontos	$237.7569 \ cm^2$	76.4024
6 pontos	$259.8076 \ cm^2$	54.3516
7 pontos	$273.6395 \ cm^2$	40.5197
8 pontos	$282.8408 \ cm^2$	31.3184
9 pontos	$289.2786 \ cm^2$	24.8806
10 pontos	$293.8357 \ cm^2$	20.3236
11 pontos	$297.3494 \ cm^2$	16.8099
12 pontos	$299.9966 \ cm^2$	14.1627
20 pontos	$309.0496 \ cm^2$	5.1097
25 pontos	$310.9426 \ cm^2$	3.2166
30 pontos	$311.7980 \ cm^2$	2.3612
40 pontos	$312.6960 \ cm^2$	1.4632
50 pontos	$313.1562 \ cm^2$	1.0031
60 pontos	$313.8035 \ cm^2$	0.3558
70 pontos	$313.8524 \ cm^2$	0.3069
80 pontos	$314.0474 \ cm^2$	0.1119

Tabela 6.1: Comparação entre aproximações e solução

Através da tabela (6.1) pode-se perceber que, quanto maior número de pontos escolhidos ao longo da circunferência e, conseqüentemente, maior o numero de triângulos inscritos, melhor será a aproximação. Para 80 pontos distribuídos ao longo do domínio, a aproximação satisfaz a precisão desejada, porque o erro E é menor do que e (E < e). Com isso, pode-se concluir que a aproximação A_p converge para a solução A_e à medida que $n \longrightarrow \infty$.

6.1 Aproximação do domínio

Uma vez definido o número de elementos em que o domínio será inicialmente discretizado, pode-se construir a malha de elementos finitos. Escolhe-se o tipo de elemento que será utilizado, e numera-se os nós dos elementos [14].

6.2 Aproximação da solução no domínio aproximado

6.2.1 Aproximação Linear

Considere um intervalo dividido em subintervalos, que são elementos de dois nós. O elemento típico é representado por $\Omega^e = (x_1, x_2)$:



Figura 6.6: Elemento típico de dois nós

sendo x a coordenada global do problema e \bar{x} , a coordenada local do elemento, com origem no centro do elemento; tal que $-1 < \bar{x} < 1$.

Um polinômio linear completo é da forma:

$$U^e = a + bx \tag{6-2}$$

sendo $a \in b$ constantes. Calcula-se os valores nos nós:



Figura 6.7: Graus de liberdade relacionados ao elemento

$$U^{e}(x_{1}) = u_{1}^{e} \qquad U^{e}(x_{2}) = u_{2}^{e}$$
(6-3)

substituindo a equação (6-3) em (6-2), tem-se:

$$u_1^e = a + bx_1$$

$$u_2^e = a + bx_2$$
(6-4)

que pode ser escrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
(6-5)

Deseja-se calcular as expressões para os coeficientes $a \in b$, da expressão (6-2). Para isso, inverte-se a equação (6-5), aplicando a regra de Cramer e obtém-se:

$$a = \begin{vmatrix} u_1^e & x_1 \\ u_2^e & x_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_e} (u_1^e x_2 - u_2^e x_1) \equiv \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e u_1^e + \alpha_2^e u_2^e)$$

$$b = \begin{vmatrix} 1 & u_1^e \\ 1 & u_2^e \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_e} (u_2^e - u_1^e) \equiv \frac{1}{h_e} (\beta_1^e u_1^e + \beta_2^e u_2^e)$$
(6-6)

sendo $h_e = x_2 - x_1$ e:

$$\alpha_1^e = (-1)^j x_j^e \qquad x_1^e = x_1 \beta_1^e = (-1)^i \qquad x_2^e = x_2$$
(6-7)

na equação (6-7):

 $se \ i = 1 \quad \Longrightarrow \quad j = 2$ se $i = 2 \implies j = 1$

As variáveis $\alpha_i^e \in \beta_i^e$ foram introduzidas para mostrar a forma típica das funções de interpolação. Substituindo (6-6) em (6-2):

$$U^{e}(x) = \frac{1}{h_{e}} [(\alpha_{1}^{e} u_{1}^{e} + \alpha_{2}^{e} u_{2}^{e}) + (\beta_{1}^{e} u_{1}^{e} + \beta_{2}^{e} u_{2}^{e})x]$$

$$= \frac{1}{h_{e}} (\alpha_{1}^{e} + \beta_{1}^{e} x)u_{1}^{e} + \frac{1}{h_{e}} (\alpha_{2}^{e} + \beta_{2}^{e} x)u_{2}^{e}$$
(6-8)

Isso pode ser reescrito na forma:

$$U^{e}(x) = \phi_{1}^{e}(x)u_{1}^{e} + \phi_{2}^{e}(x)u_{2}^{e} = \sum_{j=1}^{2}\phi_{j}^{e}(x)u_{j}^{e}$$
(6-9)

sendo:

$$\phi_1^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_1^e + \beta_1^e x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$(6-10)$$

$$\phi_2^e(x) = \frac{1}{h_e} (\alpha_2^e + \beta_2^e x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

que são chamadas de funções lineares de aproximação. Pode-se reescrever as funções de (6-10), em termos da coordenada \bar{x} [14]:

$$\phi_1^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1-\bar{x}) \qquad \phi_2^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1+\bar{x}) \tag{6-11}$$



Figura 6.8: Funções de interpolação local e global de um elementos linear

A partir das funções de interpolação pode-se calcular as matrizes de massa e de rigidez elementares, apenas substituindo as expressões de (6-11).

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 dr \\ \\ \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 dr \end{pmatrix}$$
(6-12)

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} (\frac{d\phi_1}{dr}) (\frac{d\phi_1}{dr}) dr & \int_{-1}^{+1} (\frac{d\phi_1}{dr}) (\frac{d\phi_2}{dr}) dr \\ \int_{-1}^{+1} (\frac{d\phi_2}{dr}) (\frac{d\phi_1}{dr}) dr & \int_{-1}^{+1} (\frac{d\phi_2}{dr}) (\frac{d\phi_2}{dr}) dr \end{pmatrix}$$
(6-13)

6.2.2 Aproximação Quadrática

No caso da aproximação quadrática, são necessários três nós por elemento, conforme a figura (6.9):



Figura 6.9: Elemento típico de três nós

Nesse caso, utiliza-se o polinômio completo de segundo grau que é dado por:

$$U^{e}(x) = a + bx + cx^{2} ag{6-14}$$

sendo $a, b \in c$ constantes. Calcula-se os valores em cada nó:

$$u(x1) = u_1^e \stackrel{\longrightarrow}{\longleftarrow} u(x2) = u_2^e \stackrel{\longrightarrow}{u(x3)} = u_3^e$$

Figura 6.10: Graus de liberdade associados ao elemento de três nós

Cada nó possui o seu próprio deslocamento que, substituído na expressão (6-14) tem-se:

$$u_{1}^{e} = U^{e}(x_{1}) = a + bx_{1}^{e} + c(x_{1}^{e})^{2}$$

$$u_{2}^{e} = U^{e}(x_{2}) = a + bx_{2}^{e} + c(x_{2}^{e})^{2}$$

$$u_{3}^{e} = U^{e}(x_{3}) = a + bx_{3}^{e} + c(x_{3}^{e})^{2}$$

(6-15)

que pode ser reescrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 \\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 \\ 1 & x_3^e & (x_3^e)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
(6-16)

sendo x_i^e a coordenada global do i-ésimo nó, do elemento Ω^e . Invertendo-se a equação (6-16), tem-se:

$$a = \frac{1}{D^{e}} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i}^{e} u_{i}^{e}, \quad \alpha_{i}^{e} = x_{j}^{e} (x_{k}^{e})^{2} - x_{k}^{e} (x_{j}^{e})^{2}$$

$$b = \frac{1}{D^{e}} \sum_{i=1}^{3} \beta_{i}^{e} u_{i}^{e}, \quad \beta_{i}^{e} = (x_{j}^{e})^{2} - (x_{k}^{e})^{2} \qquad (6-17)$$

$$c = \frac{1}{D^{e}} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i}^{e} u_{i}^{e}, \quad \gamma_{i}^{e} = -(x_{j}^{e} - x_{k}^{e}), \quad D^{e} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i}^{e}$$

da equação (6-14):

$$U^{e}(x) = \phi_{1}^{e}(x)u_{1}^{e} + \phi_{2}^{e}(x)u_{2}^{e} + \phi_{3}^{e}(x)u_{3}^{e} = \sum_{j=1}^{3} \phi_{j}^{e}(x)u_{j}^{e}$$
(6-18)

onde ϕ_i^e são as funções quadráticas de interpolação.

 D^e corresponde ao determinante da matriz apresentada em (6-16), e α_i^e , β_i^e e γ_i^e são definidas por(6-17), de forma que:

As funções de interpolação quadrática podem ser expressas nas coordenadas locais de cada elemento $(\bar{\mathbf{x}})$, com origem no centro do elemento e variando entre -1 e +1. A coordenada global x relaciona-se com a coordenada local $\bar{\mathbf{x}}$ da seguinte forma:

$$x = x_2^e + \bar{x} \tag{6-19}$$

onde $x_2^e = x_B$ é a coordenada global do segundo nó do elemento Ω^e , localizado no centro do elemento. Para esse caso, as funções de interpolação são dadas por [14]:

$$\phi_1^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1-\bar{x}) - \frac{1}{2}(1-\bar{x}^2)$$

$$\phi_2^e(\bar{x}) = (1-\bar{x}^2)$$

$$\phi_3^e(\bar{x}) = \frac{1}{2}(1+\bar{x}) - \frac{1}{2}(1-\bar{x}^2)$$
(6-20)

As funções de interpolação podem ser visualizadas pela figura (6.11), sendo que ϕ_i^e tem valor um no nó i e zero nos demais, variando quadraticamente entre os nós.



Figura 6.11: Funções de interpolação locais e globais do elemento quadrático

Uma vez conhecidas as funções de interpolação de um elemento de três nós, pode-se montar as respectivas matrizes de massa e de rigidez:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{30} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 dr \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 dr \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 dr & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 dr \end{pmatrix}$$
(6-21)

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix}$$
(6-22)

6.2.3 Aproximação Cúbica

O mesmo procedimento pode ser repetido para elementos de quatro nós (aproximações cúbicas):



Figura 6.12: Elemento típico de quatro nós

Um polinômio cúbico completo é da forma:

$$U^{e} = a + bx + cx^{2} + dx^{3} \tag{6-23}$$

sendo $a, b, c \in d$ constantes.



Figura 6.13: Graus de liberdade associados a um elemento de quatro nós

Realizados os cálculos necessários, obtém-se as funções de interpolação correspondentes aos elementos de aproximação cúbica:

$$\phi_1(\bar{x}) = \frac{(1-\bar{x})}{2} - \frac{(1-\bar{x}^2)}{2} + \frac{(-9\bar{x}^3 + \bar{x}^2 + 9\bar{x} - 1)}{16}$$

$$\phi_2(\bar{x}) = (1 - \bar{x}^2) + \frac{(27\bar{x}^3 + 7\bar{x}^2 - 27\bar{x} - 7)}{16}$$

$$\phi_3(\bar{x}) = \frac{(-27\bar{x}^3 - 9\bar{x}^2 + 27\bar{x} + 9)}{16}$$

$$\phi_4(\bar{x}) = \frac{(1+\bar{x})}{2} - \frac{(1-\bar{x}^2)}{2} + \frac{(9\bar{x}^3 + \bar{x}^2 - 9\bar{x} - 1)}{16}$$
(6-24)

As funções de interpolação desse elemento (aproximação cúbica) podem ser visualizadas no gráfico a seguir:



Figura 6.14: Funções de interpolação de um elemento de quatro nós

As matrizes elementares são representadas por:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_4 d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{dr} \frac{d\phi_1}{dr} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{dr} \frac{d\phi_2}{dr} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{dr} \frac{d\phi_3}{dr} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{dr} \frac{d\phi_4}{dr} d\bar{x} \end{pmatrix}$$

6.2.4 Aproximação Hermitiana

Os elementos de Hermite são de dois nós, porém cada nó possui dois graus de liberdade, um referente ao deslocamento e outro referente à rotação [12]:



Figura 6.15: Graus de liberdade associados a um elemento de Hermite

Suas funções de interpolação estão apresentadas na equação (6-25) e na figura (6.16):

$$\phi_1(\bar{x}) = 1 - 3(\bar{x})^2 + 2(\bar{x})^3 , \qquad \phi_2(\bar{x}) = \bar{x}(1 - \bar{x})^2$$

$$\phi_3(\bar{x}) = 3(\bar{x})^2 - 2(\bar{x})^3 , \qquad \phi_4(\bar{x}) = \bar{x}^2(\bar{x} - 1)$$
(6-25)



Figura 6.16: Funções de interpolação de um elemento de Hermite

As matrizes elementares são de um elemento Hermitiano são:

$$M^{(e)} = \frac{\rho A h_e}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_1 \phi_4 d\bar{x} \end{pmatrix} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_2 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_3 \phi_4 d\bar{x} \\ \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_1 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_2 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_3 d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \phi_4 \phi_4 d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$K^{(e)} = \frac{2EA}{h_e} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_1}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_2}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_3}{d\bar{x}} d\bar{x} & \int_{-1}^{+1} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} \frac{d\phi_4}{d\bar{x}} d\bar{x} \end{pmatrix}$$

6.2.5 Aproximação de ordem n

Todas as funções de interpolação satisfazem as seguintes propriedades, conhecidas como propriedades de interpolação [14]:

$$\phi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 \quad se \ i \neq j \\ 1 \quad se \ i = j \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n \phi_j^e(x) = 1 \quad \therefore \quad \sum_{j=1}^n \frac{d\phi_j^e}{dx} = 0$$
(6-26)

sendo n-1 o grau dos polinômios de interpolação; e x_j^e a coordenada global do nó j, do elemento Ω^e . Pode-se verificar que as funções de interpolação linear (6-11) e quadrática (6-20) satisfazem as propriedades de (6-26).

6.3 Escolha do número de elementos iniciais (N)

Escolhido o número de elementos iniciais, divide-se o domínio em N partes e, para cada elemento, pode-se aplicar as funções de interpolação e construir as matrizes elementares.

Em seguida, acopla-se as matrizes elementares, e tem-se as equações globais do sistema. Calculados os resultados, verifica-se se a precisão desejada foi atingida. Se não foi, refaz-se os cálculos para um número maior de elementos, ou seja, uma malha ainda mais refinada

6.4 Análise do erro

Os erros introduzidos a uma aproximação por elementos finitos de uma equação diferencial podem ser atribuídos, a três causas [14]:

- 1. Erro na aproximação do domínio;
- 2. Erro de computação numérica;
- 3. Erro na aproximação da solução

Problemas unidimensionais têm seus domínios representados por linhas, por isso não é necessário aproximá-los. Porém, em problemas bi-dimensionais, envolvendo domínios não-retangulares (tais como o círculo da figura (6.2)), os erros de aproximação do domínio são introduzidos à aproximação por elementos finitos. Conforme a malha é refinada, o domínio passa a ser melhor representado e os erros de aproximação do domínio tendem a zero.

Quando os cálculos por elementos finitos são executados em computadores, introduz-se à aproximação, erros devido aos cálculos numéricos de integrais.

Além disso, há o erro devido a aproximação da variável dependente do problema u, que também deve ser introduzido à solução por elementos finitos: $u \equiv u^N$. Existem diversas maneiras de medir a diferença entre a solução u e a aproximação u^N ; porém, neste trabalho, será adotado o erro norma L_2 , definido por:

$$|| u^{2N} - u^{N} ||_{0} = \left(\int_{a}^{b} | u^{2N} - u^{N} |^{2} dx \right)^{1/2}$$
(6-27)

sendo u^N
e u^{2N} as aproximações definidas por: $u^N=u-\varepsilon^N$
 $u^{2N}=u-\varepsilon^{2N}$