

5

FORMULAÇÃO FRACA PARA PROBLEMAS DE VIGAS

Os problemas de vigas podem ter condições de contorno relacionadas a posição, inclinação, força ou momento. Dentre todas as combinações possíveis, foram selecionados quatro problemas de vigas que serão estudados nesse capítulo. Deseja-se desenvolver a formulação fraca [3] para cada caso apresentado abaixo:

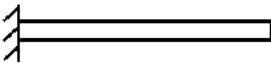
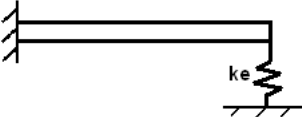
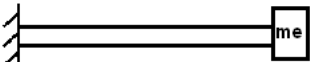
TIPO DE VIGA	CONFIGURAÇÃO
Viga Livre-Livre	
Viga Engastada-Livre	
Viga Engastada-Mola	
Viga Engastada-Massa	

Figura 5.1: Problemas de vigas e suas configurações

5.1

Problema de uma Viga Livre-Livre



Figura 5.2: Viga livre-livre

Uma viga livre nas duas extremidades (figura (A.37)) apresenta as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(0, t) = 0 &\implies \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0; \quad \mathbb{M}(L, t) = 0 \implies \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \\ V(0, t) = 0 &\implies \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=0} = 0; \quad V(L, t) = 0 \implies \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (5-1)$$

O espaço das funções-teste do problema de uma viga livre-livre deve satisfazer as condições de contorno essenciais [14]. Pela equação (5-1), sabe-se que todas as condições de contorno são naturais, então ψ pertence a um espaço sem restrições, que será chamado de Adm_3 .

Formulação Forte de um problema de viga:

Equação Diferencial (4-4) + Condições de Contorno + Condições Iniciais

Inicialmente, faz-se o produto da equação diferencial (4-4) por uma função-teste ψ e calcula-se a integral no domínio $[0 \quad L]$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \psi(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3 \end{aligned} \quad (5-2)$$

Faz-se a integração por partes ($\int u dv = uv - \int v du$) duas vezes, resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) - EI \psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) - EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}(L) \\ + EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}(0) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3 \end{aligned} \quad (5-3)$$

As condições de contorno (5-1), incorporadas à equação (5-3), resultam em:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + EI \underbrace{\psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t)}_{=0} - EI \underbrace{\psi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t)}_{=0} - EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}}_{=0}(L) \\
& + EI \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\psi}{dx}}_{=0}(0) + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3
\end{aligned} \tag{5-4}$$

A formulação fraca desse problema é:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\
& = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_3
\end{aligned} \tag{5-5}$$

A expressão (5-5) pode ser reescrita por:

$$\mathcal{M}(u, \psi) + \mathcal{K}(u, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_3 \tag{5-6}$$

tal que:

$$\mathcal{M}(u, \psi) = \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \implies \text{operador massa} \tag{5-7}$$

$$\mathcal{K}(u, \psi) = \int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \implies \text{operador rigidez} \tag{5-8}$$

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \implies \text{carregamento} \tag{5-9}$$

A solução para o deslocamento transversal da viga (4-24), substituído em (5-6), resulta em:

$$\mathcal{M}(u^N + \varepsilon^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N + \varepsilon^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in H \tag{5-10}$$

$$\mathcal{M}(u^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = \underbrace{-\mathcal{M}(\varepsilon^N, \psi) - \mathcal{K}(\varepsilon^N, \psi)}_{\text{erro}(\psi)} \tag{5-11}$$

Pelo Método de Galerkin: $\psi_i = \phi_i$ e $\varepsilon^N \perp \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$; a equação (5-11) reduz-se a:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{K}(u^N, \phi_1) - \mathcal{F}(\phi_1) = 0 \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_2) + \mathcal{K}(u^N, \phi_2) - \mathcal{F}(\phi_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_N) + \mathcal{K}(u^N, \phi_N) - \mathcal{F}(\phi_N) = 0 \end{cases} \quad (5-12)$$

Para N modos a serem analisados, a parcela ε^N é nula.

A solução do problema foi apresentada pela equação (4-23) que, aplicada nas condições iniciais do problema (4-5), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x) = u_0(x) \quad (5-13)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i(0)\phi_i(x) = V_0(x)$$

e deseja-se calcular $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_{\infty}(t)$. Multiplica-se os dois lados da equação acima pela função-teste $\psi_i = \phi_j$ e integra-os no domínio $[0 \quad L]$:

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (5-14)$$

$$m_{ij}a_i = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (5-15)$$

$$a_i = \frac{\int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx}{m_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5-16)$$

A expressão da aproximação (4-26) é substituída nos operadores de massa, rigidez e carregamento da formulação:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t)\phi_j(x)dx + \int_0^L E(x)I(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t)\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}dx \\ = \int_0^L f(x, t)\phi_j(x)dx, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \end{aligned} \quad (5-17)$$

feitas as substituições e calculadas as derivadas, tem-se

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \quad \ddot{a}_i + \int_0^L E(x)I(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx \quad a_i = \int_0^L f\phi_j dx, \\ \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-18)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j)\ddot{a}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j)a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-19)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx$$

$$\mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L E(x)I(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx$$

$$\mathcal{F}(\phi_j) = \int_0^L f\phi_j dx$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Pela fórmula variacional (eq. (5-17)), tem-se as matrizes de massa e de rigidez: $\mathbf{M}_{(N \times N)}$ e $\mathbf{K}_{(N \times N)}$, além do vetor de forçamento $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)u^N \cdot \phi dx \quad \implies \quad \phi^T MU \\ \int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} dx \quad \implies \quad \phi^T KU \quad (5-20)$$

$$\int_0^L f\phi dx \quad \implies \quad \phi^T F$$

A equação (5-17) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M}\ddot{U} + \phi^T \mathbf{K}U = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-21)$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{K}U = \mathbf{F} \quad (5-22)$$

Propõe-se uma solução para U :

$$U = e^{i\omega t}v \quad (5-23)$$

substitui-se (5-23) em (5-17) e em (5-22), respectivamente:

$$\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_3^N \quad (5-24)$$

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}v = \mathbf{F} \quad (5-25)$$

PVC: Viga livre-livre

Para $\mathbf{F} = 0$, a equação (5-25) reduz-se a:

$$\mathbf{K}v - \omega^2 \mathbf{M}v = 0 \quad (5-26)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})v = 0 \quad (5-27)$$

$$U \neq 0$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \text{ não existe} \quad \implies \quad \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

5.2

Problema de uma Viga Engastada-Livre

O mesmo procedimento foi adotado para encontrar a Formulação Fraca desse problema de viga.

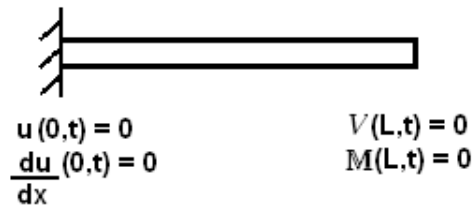


Figura 5.3: Viga engastada-livre

A viga engastada em uma extremidade e livre na outra apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = 0 \implies \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \quad (5-28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \mathbb{M}(L, t) = 0 \implies \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0$$

Define-se por Adm_4 o espaço das funções-teste do problema de uma viga engastada-livre que deve satisfazer as condições de contorno essenciais de (5-28). Com isso, conclui-se que $\psi(0) = 0$ e $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$. O espaço Adm_4 pode ser definido por (5-29):

$$Adm_4 = \left\{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \right. \\ \left. \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty, \int_0^L \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 dx < \infty \right\} \quad (5-29)$$

As condições de contorno de (5-28) são impostas na equação (5-3) e resultam na formulação variacional do problema:

$$\int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4 \quad (5-30)$$

A formulação variacional da viga engastada-livre é igual à da viga livre-livre, dada pela equação (5-5), porém com a função-teste ψ pertencente ao espaço Adm_4 , ao invés de Adm_3 .

Todo o procedimento realizado para viga livre-livre pode ser repetido para a viga engastada-livre: divisão da formulação fraca do sistema em operadores de massa, rigidez e carregamento, aplicação do método de Galerkin para aproximar a solução, aplicação de solução proposta.

5.3

Problema de uma Viga Engastada-Mola

Nesta seção será desenvolvida a formulação fraca de uma viga engastada com mola vertical na sua extremidade livre (A.27), além da formulação variacional desse sistema.

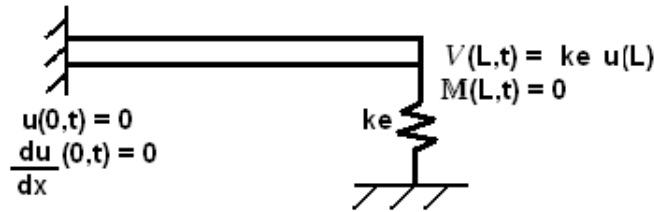


Figura 5.4: Viga engastada-mola

A viga engastada-mola apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = k_e u(L, t) \implies \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = \frac{k_e u}{EI}(L, t) \quad (5-31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad M(L, t) = 0 \implies \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0$$

As condições de contorno essenciais de (5-31) são $u(0, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, então o espaço das funções-teste deve satisfazer as condições $\psi(0) = 0$ e $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$ e é chamado de Adm_4 , definido em (5-29).

As condições de contorno de (5-31) são aplicadas na equação (5-3), o que resulta na formulação variacional do problema:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4 \end{aligned} \quad (5-32)$$

Aplica-se o método de Galerkin na formulação variacional e substitui-se a expressão da solução (4-24) nos operadores de massa, rigidez e carregamento.

Dada a solução (4-23), deseja-se calcular $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_\infty(t)$ que satisfaçam as condições iniciais (4-5). Com isso, calcula-se a_i , apresentada na equação

(5-16); e, substituída a expressão da aproximação (4-26) nos operadores de massa, rigidez e carregamento do sistema, tem-se:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi_j(x) dx + k_e u^N(L, t) \phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx}_{op. \text{ rigidez}} = \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-33)$$

sendo Adm_4^N é subespaço de Adm_4 e (5-33) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \int_0^L E(x)I(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i = \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-34)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-35)$$

Pela formulação variacional de (5-33) tem-se a matriz de massa, a matriz de rigidez e o vetor de forçamento.

A equação (5-33) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T k_e U_N}_{\mathbf{K}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \quad (5-36)$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^* \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5-37)$$

de forma que a matriz $\mathbf{K}^*$ consiste na matriz de rigidez do sistema $\mathbf{K}$, já com o termo $\phi_N^T k_e U_N$ a ela incorporado.

Propõe-se a solução de (5-23) que, substituída em (5-33) e (5-36) tem-se, respectivamente:

$$\int_0^L E(x)I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx + k_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x) A(x) u \phi dx = \int_0^L f \phi dx \quad (5-38)$$

$$\mathbf{K}^* v - \omega^2 \mathbf{M} v = \mathbf{F} \quad (5-39)$$

PVC: Viga engastada-mola

Para $\mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{K}^* v - \omega^2 \mathbf{M} v = 0 \quad (5-40)$$

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{M}) v = 0 \quad (5-41)$$

$$v \neq 0$$

5.3.1

Problema de Viga Engastada-Massa

Esta seção apresentará a formulação fraca e o PVC do problema de uma viga engastada com uma massa concentrada na sua extremidade livre (A.29), juntamente com a sua formulação variacional.

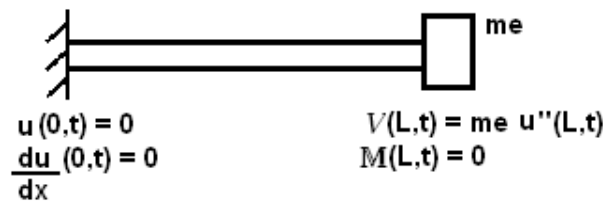


Figura 5.5: Viga engastada-massa

Esse sistema apresenta as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 \quad V(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) &\implies \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{x=L} = \frac{m_e}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \mathbb{M}(L, t) = 0 &\implies \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (5-42)$$

O espaço das funções-teste deve satisfazer as condições de contorno essenciais de (5-42), que são $u(0, t) = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$; portanto $\psi \in Adm_4$, tal que Adm_4 está definido em (5-29).

As condições de contorno de (5-42) são aplicadas em (5-3) e resultam na formulação variacional do problema:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_4 \end{aligned} \quad (5-43)$$

Aplica-se o método de Galerkin na formulação variacional e substitui-se a expressão da solução (4-24) nos operadores de massa, rigidez e carregamento.

A solução do problema é dada por (4-23), e deseja-se calcular $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_\infty(t)$ que satisfaçam as condições iniciais (4-5). Após os cálculos, encontra-se (5-16), e substitui-se a expressão da aproximação (4-26) nos operadores de massa, rigidez e carregamento do sistema:

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho(x) A(x) \int_0^L \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi_j(x) dx + m_e \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(L, t) \phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{E(x) I(x) \int_0^L \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \phi_j}{dx^2}(x) dx}_{op. \text{ rigidez}} \\ = \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi_j(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \end{aligned} \quad (5-44)$$

que pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho(x) A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{u}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{u}_i + \int_0^L E(x) I(x) \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx a_i \\
& = \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N
\end{aligned} \tag{5-45}$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{u}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{u}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in H^N \tag{5-46}$$

A formulação variacional, equação (5-44), representa as matrizes de massa e rigidez e o vetor carregamento.

A equação (5-44) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T m_e U_N}_{\mathbf{M}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_4^N \tag{5-47}$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{5-48}$$

A matriz $\mathbf{M}^*$ é a matriz de massa do sistema, já com o efeito do termo $\phi_N^T m_e U_N$ adicionado.

Substitui-se a solução (5-23) nas equações (5-44 e (5-48):

$$\begin{aligned}
& \int_0^L E(x) I(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx + m_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x) A(x) u \phi dx \\
& = \int_0^L f \phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_4^N
\end{aligned} \tag{5-49}$$

$$\mathbf{K} v - \omega^2 \mathbf{M}^* v = \mathbf{F} \tag{5-50}$$

PVC: Viga engastada-massa

Para $\mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{K} v - \omega^2 \mathbf{M}^* v = 0 \tag{5-51}$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*)v = 0 \quad (5-52)$$

A tabela (5.6) apresenta a formulação fraca para problemas de vigas com diferentes condições de contorno. Pode-se observar que a formulação variacional dos problemas de viga livre-livre e viga engastada-livre são iguais e a diferença entre eles encontra-se na definição do espaço de funções-teste. Os problemas de viga engastada-livre, engastada-mola e engastada-massa apresentam o mesmo espaço de funções admissíveis Adm , porém pode-se diferenciá-los pelas formulações variacionais que, no caso da viga engastada-mola, tem um termo que representa a mola da extremidade e no caso da viga engastada-massa há um termo representativo da massa concentrada em $x = L$.

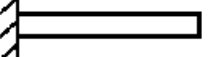
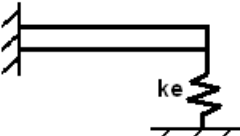
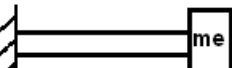
Viga	Configuração	Formulação Variacional	Adm
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Engastada-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$
Engastada-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$
Engastada-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}(x) dx$ $+ m_e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$ $\frac{d\psi}{dx}(0) = 0$

Figura 5.6: Formulação Fraca de diferentes problemas de Vigas