4
MODELAGEM DE PROBLEMAS DE VIGAS

Neste capítulo serão estudados problemas de vigas. Existem dois modelos principais de vigas, Euler-Bernoulli e Timoshenko. O modelo de Euler-Bernoulli considera que o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, ou seja, Supõe-se que as seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga mesmo após a deflexão. Já o modelo de Timoshenko, considera que as seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga, porque o cisalhamento causa um giro da seção em relação a essa perpendicular [1]. Na teoria de vigas, utiliza-se a hipótese de pequenas deformações, por isso as variações de geometria podem ser desconsideradas.

4.1
Dinâmica de Vigas

Deseja-se equacionar, de forma sistemática, um problema de viga usando o modelo Euler-Bernoulli. Considere uma viga bi-engastada [8], de comprimento L, densidade $\rho(x)$, área de seção transversal $A(x)$, módulo de elasticidade $E(x)$ e momento de inércia da área da seção $I(x)$. $u(x,t)$ é a posição do ponto x no instante t e $f(x,t)$, a força externa ao sistema.

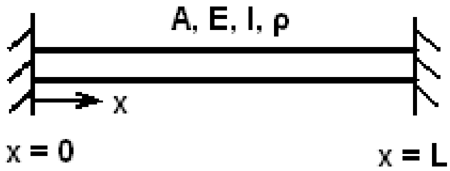

Figura 4.1: Viga bi-engastada

Engastamento em uma extremidade significa que não há deslocamento da extremidade e que a inclinação da seção nessa posição é fixada.

Considere a seção da viga $[\overline{x_1 x_2}]$. No ponto x_i da viga, considera-se uma força cortante $V(x_i,t)$ e um momento fletor, denominado $\mathbb{M}(x_i,t)$ para a configuração no instante t; conforme mostra a figura (4.2).

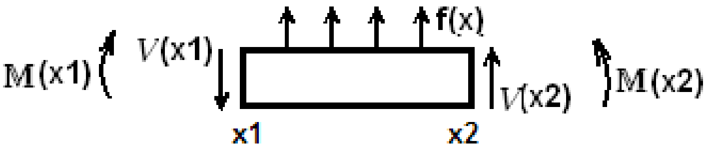

Figura 4.2: Forças cortantes e momentos, em uma seção da viga

Para achar as equações que representam a dinâmica de uma viga, será feito o balanço de quantidade de movimento nesta seção $[\overline{x_1 x_2}]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx = V(x_2,t) - V(x_1,t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx \qquad \text{(4-1)}$$

Sendo $V(x_2,t) - V(x_1,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,t)(x_2 - x_1)$ e fazendo $(x_2 - x_1) \longrightarrow 0$, tem-se:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) + f(x,t) \qquad \text{(4-2)}$$

Pelo modelo Euler-Bernoulli, tem-se a relação entre $\mathbb{M}$ e V: $V = -\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x}$. Adota-se a hipótese constitutiva de que o momento é proporcional à curvatura linearizada, o que significa que $\mathbb{M} = E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Substitui-se essas considerações em (4-2), então:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) = f(x,t) \qquad \text{(4-3)}$$

sendo:
$u(x,t)$ - deslocamento transversal;
$A(x)$ - área da seção transversal;
$I(x)$ - momento de inércia da seção transversal;
$E(x)$ - módulo de elasticidade do material;
$\rho(x)$ - massa por unidade de comprimento;
$f(x,t)$ - força transversal por unidade de comprimento.

Considerando constantes as propriedades $A(x)$, $I(x)$, $E(x)$ e $\rho(x)$; a equação (4-3) reduz-se a:

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + E(x)I(x)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = f(x,t) \tag{4-4}$$

4.2 Problema Modelo: resolução por separação de variáveis

A equação de movimento de um problema clássico de viga, de comprimento L é dada pela equação (4-3) na qual precisa-se incorporar quatro condições de contorno, duas em cada extremidade ($x = 0$ e $x = L$); porque existem derivadas de até quarta ordem de $u(x,t)$ em relação a x. Além disso, a equação é de segunda ordem em relação ao tempo, então são necessárias duas condições iniciais, que correspondem à configuração inicial e à velocidade inicial da viga [8].

Condições iniciais (t = 0):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x) \end{aligned} \tag{4-5}$$

sendo u_0 e v_0 funções conhecidas.

As condições de contorno são características do problema e podem representar deflexão, inclinação da seção, momento ou o esforço cortante, que são, respectivamente:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x) \\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= v_0(x) \\ \mathbb{M}(x,t) &= E(x)I(x)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ V(x,t) &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left[E(x)I(x)\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right] \end{aligned}$$

Considere um problema de viga engastada nas duas extremidades (bi-engastada). Isso significa que os deslocamentos e as rotações em $x = 0$ e em $x = L$ são nulos. As condições de contorno correspondentes são:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \qquad & \tfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \qquad & \tfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0 \end{aligned} \tag{4-6}$$

A solução da equação (4-3), submetida às quatro condições de contorno e às duas condições iniciais, deve seguir os mesmos passos adotados para barras. Aplica-se o *Método de Separação de Variáveis* [8], ou seja, procura-se soluções da forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4-7}$$

sendo $X(x)$ uma função de posição e T(t) uma função do tempo. Substitui-se (4-7) na equação (4-3), considerando $f(x,t) = 0$:

$$-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{\rho A}\frac{1}{X}\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2X}{dx^2}\right) = \lambda^2 \tag{4-8}$$

tal que λ é uma constante a ser determinada.

A equação (4-8) pode ser separada em duas EDO's de forma que X e T devem satisfazer:

$$\frac{1}{\rho A}(EIX'')'' = \lambda^2 X \tag{4-9}$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \tag{4-10}$$

de forma que $\frac{\partial}{\partial x} =' $ e $\frac{\partial}{\partial t} =^{\cdot}$

Considerando constantes as propriedades do material e as variáveis geométricas (ρ, E, I e A), a equação (4-9) pode ser reescrita por:

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{d^4X}{dx^4} = \lambda^2 X \tag{4-11}$$

Denota-se por:

$$\lambda^2 = \omega^2 \qquad \left(\frac{\omega}{\sqrt{EI/\rho A}}\right)^2 = \beta^4 \tag{4-12}$$

Então a solução das equações (4-9) e (4-10), são:

$$X(x) = a_1\sin(\beta x) + a_2\cos(\beta x) + a_3\sinh(\beta x) + a_4\cosh(\beta x) \tag{4-13}$$

$$T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{4-14}$$

A função X deve satisfazer as condições de contorno do problema e, quando elas são impostas, obtém-se infinitas soluções para β, que são diferenciadas com a introdução de um parâmetro n; fornecendo, então, β_n. Para cada β_n determina-se as constantes não-nulas a_{1n}, a_{2n}, a_{3n} e a_{4n} que, juntas, definem uma função $X_n(x)$:

$$X_n(x) = a_{1n}\sin(\beta_n x) + a_{2n}\cos(\beta_n x) + a_{3n}\sinh(\beta_n x) + a_{4n}\cosh(\beta_n x) \tag{4-15}$$
$$n = 1, 2, 3...$$

Para cada β_n existe um autovalor $\lambda_n^2 = \beta_n^4$ correspondente e, consequentemente, um T_n:

$$T_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) \tag{4-16}$$

Finalmente, para cada $n \geq 1$, tem-se uma solução da equação (4-3), na forma do produto:

$$u_n(x,t) = (A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t))X_n(x) \tag{4-17}$$

que deve satisfazer as condições iniciais do problema. Para garantir que essas condições sejam satisfeitas, faz-se a superposição das soluções $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n t + B_n\sin\lambda_n t)[a_{1n}\sin(\beta_n x) + a_{2n}\cos(\beta_n x) \tag{4-18}$$
$$+a_{3n}\sinh(\beta_n x) + a_{4n}\cosh(\beta_n x)]$$

Sendo A_n e B_n determinadas a partir das condições iniciais do problema.

Para $n \geq 1$, a função $X_n(x)$ de (4-15) corresponde ao n-ésimo modo de vibração, associado à n-ésima freqüência natural ω_n do problema:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{4-19}$$

Para calcular as freqüências naturais e os modos de vibração do problema de uma viga bi-engastada, deve-se resolver a equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{4-20}$$

e a equação característica é $\cos\beta \cos\beta = 1$, então, para $n \geq 1$, o n-ésimo modo de vibração desse problema para $\lambda_n^2 = \beta_n^4$ é:

$$X_n(x) = \cosh\beta_n x - \cos\beta_n x - \sigma_n(\sinh\beta_n x - \sin\beta_n x) \tag{4-21}$$

sendo $\sigma_1 = 0.9825$, $\sigma_2 = 1.0008$ e $\sigma_n = \frac{\cosh\beta_n x - \cos\beta_n x}{\sinh\beta_n x - \sin\beta_n x}$ para $n > 2$

As freqüências naturais são:

$$\omega_n = \beta_n^2 \tag{4-22}$$

A solução do problema (4-7) pode ser reescrita de forma simplificada:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \tag{4-23}$$

A aproximação por N modos de vibração, é representada por $u^N(x,t)$ e o erro associado a essa aproximação é $\varepsilon^N(x,t)$:

$$u(x,t) = u^N(x,t) + \varepsilon^N(x,t) \tag{4-24}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{u(x,t)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \phi_n(x) a_n(t)}_{u^N(x,t)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t)}_{\varepsilon^N(x,t)} \tag{4-25}$$

aproximação: $$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(x) a_n(t) \qquad (4\text{-}26)$$

erro de aproximação: $$\varepsilon^N(x,t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi_n(x) a_n(t) \qquad (4\text{-}27)$$

tal que N é o número de modos usados na aproximação de u^N.