

3

FORMULAÇÃO FRACA

Um problema pode ser representado pela sua **Formulação Forte**, que corresponde às equações diferenciais parciais, uma para cada ponto interno do domínio, em conjunto com as condições de contorno, as condições intermediárias e as condições iniciais. Por exemplo, a equação (2-8) é a formulação forte do problema de uma barra livre-livre. A **Formulação Fraca** é uma forma alternativa de representar problemas e consta de uma equação variacional e um espaço de funções admissíveis.

A equação variacional incorpora as equações diferenciais e parte das condições de contorno e intermediárias (condições naturais), e o espaço das funções admissíveis define a regularidade do problema e incorpora parte das condições de contorno e intermediárias (condições essenciais).

O Método de Elementos Finitos (MEF) é um método de discretização que se aplica naturalmente à Formulação Fraca do problema [4]. Este capítulo apresentará todo o procedimento necessário para calcular a formulação fraca de um problema contínuo e será desenvolvido para quatro problemas de barras com diferentes condições de contorno:

- Barra Livre-Livre;
- Barra Fixa-Livre;
- Barra Fixa-Mola;
- Barra Fixa-Massa.

Formulação Forte:

equação diferencial $(0 < x < L, t > 0)$

+

condições de contorno $(x = 0 \text{ e } x = L)$

+

condições intermediárias $(x = a)$

+

condições iniciais ($t = 0$)

3.1

Vantagens da Formulação Fraca

Considere o problema de equação diferencial e condições de contorno da equação (3-1) [3]:

$$\begin{aligned} \frac{-d^2u}{dx^2} + u &= \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) & 0 < x < L \\ u(0) &= 0 & u(L) = 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

sendo $\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$, o impulso em $x = \frac{1}{2}$; que é definido da seguinte forma:

$$\int_0^L \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \phi(x) dx = \phi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3-2)$$

para qualquer função ϕ que satisfaça as condições de contorno. De acordo com a equação (3-1), a função u , em $x = \frac{1}{2}$, deve ter sua primeira derivada descontínua e a segunda derivada não deve existir. Com isso, percebe-se que alguma coisa está errada: como a função u pode satisfazer à equação diferencial (3-1) em todo o intervalo $0 < x < L$ se a sua segunda derivada não existe em $x = \frac{1}{2}$, de acordo com os dados do problema?

A imposição de que a solução u satisfaça a equação diferencial do problema em *todos os pontos* da coordenada x é forte demais. Para superar isso, deve-se reformular o problema de forma a admitir condições *mais fracas* para a solução do problema e suas derivadas. Essa nova formulação é chamada de *formulação fraca* ou *formulação variacional* e serve para adaptar dados e funções irregulares, tais como o exemplo apresentado em (3-1).

A função δ não é uma função no sentido clássico, é uma distribuição. Em Mecânica, é um conceito importante, pois serve para modelar impactos (que são esforços instantâneos, de duração nula) e cargas concentradas, isto é aplicadas em um único ponto de uma estrutura contínua.

Conclui-se, então, que uma grande vantagem da formulação fraca é tornar possível a consideração de problemas cuja solução, a princípio,

era irregular; ou seja, abrange-se maior número de problemas, conforme apresenta a figura (3.1).

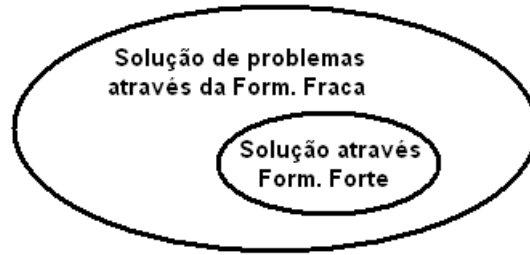


Figura 3.1: Solução de problemas para diferentes formulações

O procedimento necessário para encontrar a formulação fraca será explicado na próxima seção.

3.2

Formulação Fraca e Método Variacional de Aproximação

Nesta seção, será apresentada a metodologia necessária para construir a Formulação Fraca de um problema, a partir da equação diferencial; e classificar as condições de contorno a ela associadas.

Considere a formulação clássica de um problema, composta pela equação diferencial e condições de contorno [3]:

$$\frac{-d^2u}{dx^2} + u = x \quad 0 < x < L \quad (3-3)$$

$$u(0) = 0 \quad u(L) = 0$$

Deseja-se determinar a função u que satisfaça a equação (3-3). Duas etapas são necessárias para o desenvolvimento da Formulação Fraca de um problema [3]:

1. **Primeira etapa:** coloca-se todos os termos da equação diferencial de um único lado, multiplica-se toda a equação por uma função-teste ψ e integra-se no domínio $(0, L)$ do problema:

$$\int_0^L \left[\frac{-d^2u}{dx^2} + u - x \right] \psi dx \quad (3-4)$$

Existem dois tipos de condições de contorno: essenciais e naturais, associados à equação diferencial. Se a equação diferencial considerada é de ordem $2n$, a formulação fraca, tem que a ordem da sua maior derivada é n . As condições de contorno essenciais (CCE) são aquelas cujas derivadas são de ordem até $n - 1$; e as condições de contorno naturais (CCN) têm derivadas de ordem, pelo menos, n [1].

Define-se por \tilde{E} o espaço da solução u ($u \in \tilde{E}$); e E o espaço das funções-teste ψ ($\psi \in E$), que satisfazem as condições de contorno essenciais de forma homogênea. A equação (3-18) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \left[\frac{-d^2u}{dx^2} \psi + u\psi - x\psi \right] dx, \quad \forall \psi \in E \quad (3-5)$$

$$u(0) = 0 \quad u(L) = 0$$

2. **Segunda etapa:** faz-se a integral por partes do primeiro termo da equação (3-32), de forma a distribuir a diferenciação entre a variável dependente (u) e a função-teste (ψ):

$$\int_0^L \frac{-d^2u}{dx^2} \psi = \int_0^L \frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} dx - \left[\frac{du}{dx} \psi \right], \quad \forall \psi \in E \quad (3-6)$$

Considere que $E = \tilde{E} = Adm$, sendo Adm o espaço de funções admissíveis, deseja-se calcular $u \in Adm$ de forma que:

$$\int_0^L \left[\frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} + u\psi - x\psi \right] dx = 0, \quad \forall \psi \in Adm \quad (3-7)$$

de forma que a função ψ pertence ao espaço Adm se:

$$Adm = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \psi(L) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty \} \quad (3-8)$$

Deseja-se obter uma aproximação para a solução do problema. Existem diferentes Métodos Variacionais de Aproximação, que diferem-se pela

escolha da função-teste ψ : Rayleigh-Ritz, Galerkin, Petrov-Galerkin, Mínimos Quadrados. O método de aproximação a ser estudado será o Método de Galerkin [14].

Método de Galerkin:

De acordo com a seção anterior, o problema da equação (3-1) pode ser descrito por: ache a solução $u \in Adm$, para a seguinte formulação variacional:

$$\int_0^L \left[\frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} + u\psi \right] dx = \int_0^L x\psi dx, \quad \forall \psi \in Adm \quad (3-9)$$

Deseja-se calcular a aproximação de (3-9) (e conseqüentemente de (3-1)) [3]. Existem duas propriedades básicas do espaço Adm , além daquelas apresentadas em (3-8): é linear e de dimensão infinita.

Espaço linear: as combinações lineares de funções pertencentes a Adm , também pertencem a Adm . Em outras palavras, se ψ_1 e ψ_2 são duas funções-teste pertencentes a Adm , e α_1 e α_2 são constantes arbitrárias, $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$ também é uma função-teste (pertence a Adm).

Espaço de dimensão infinita: não existe base finita.

O método de Galerkin consiste na busca de uma aproximação para (3-9), que pertença ao subespaço de dimensão finita Adm^N , de forma que $Adm^N \subset Adm$ [14]. Ou seja, Adm^N é um subespaço do espaço de funções admissíveis Adm , e a aproximação desejada, u^N , pertence a Adm^N ($u^N \in Adm^N$) e é da forma:

$$u^N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (3-10)$$

o mesmo acontece com a aproximação da função-teste ψ^N que pertence a Adm^N ($\psi^N \in Adm^N$):

$$\psi^N(x) = \sum_{j=1}^N b_j \phi_j(x) \quad (3-11)$$

tal que (3-10) e (3-11) satisfaçam a equação (3-9) com Adm substituído por Adm^N [3]. Em outras palavras, deseja-se encontrar a aproximação $u^N \in Adm^N$, de forma que:

$$\int_0^L \left[\frac{du^N}{dx} \frac{d\psi^N}{dx} + u^N \psi^N \right] dx = \int_0^L x\psi^N dx, \quad \forall \psi^N \in Adm^N \quad (3-12)$$

sendo ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) o conjunto de funções independentes que define o subespaço finito de dimensão N , Adm^N .

Os coeficientes a_j são definidos com a substituição da expressão de (3-10) na formulação variacional de (3-12), e resolvendo o sistema de expressões algébricas resultante.

As condições de contorno essenciais, que aparecem na construção do espaço das funções-teste, são impostas ao problema; enquanto as condições de contorno naturais, aparecem naturalmente na formulação variacional (no processo de integração por partes).

3.3

Formulação Fraca: problemas de barras

Considere uma barra $[0, L]$, como a da figura (3.2). O material, no ponto x , tem densidade $\rho(x)$ e módulo de elasticidade $E(x)$; e a área da seção transversal é $A(x)$. A dinâmica de movimento é descrita pela equação (2-5).

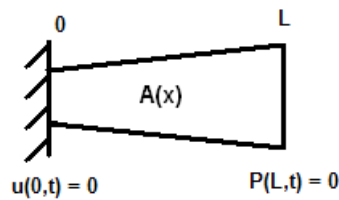


Figura 3.2: Barra fixa-livre com área variável

Condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3-13)$$

Para calcular a Formulação Fraca do problema, faz-se o produto da equação da equação diferencial por uma função-teste ψ e integra-se no domínio $[0, L]$:

$$\int_0^L \left[\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) = f(x, t) \right] \psi(x) dx \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)) \psi(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

Faz-se a integração por partes ($\int u dv = uv - \int v du$) da equação (3-15), resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - E(L)A(L) \psi(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + E(0)A(0) \psi(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

que pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - E(L)A(L) \psi(L) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)}_{=0} + E(0)A(0) \underbrace{\psi(0)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-17)$$

Nos problemas de barras, as condições de contorno essenciais referem-se aos deslocamentos $u(x, t)$ do sistema. Na equação (3-17) devem ser incorporadas as condições de contorno naturais e a função-teste ψ deve satisfazer as condições de contorno essenciais. Com isso, a equação variacional desse problema de barra é:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \\ \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

Adm_0 deve satisfazer as condições de contorno essenciais, ou seja:

$$Adm_0 = \{\psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \psi(0) = 0, \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty\} \quad (3-19)$$

A Formulação Fraca do problema consiste no par formado pela equação variacional do problema e o espaço das funções-teste.

Problema de Valor Característico: problemas de barras

Para achar o Problema de Valor Característico (PVC) associado a um problema de barra, deve-se fazer duas considerações:

- forçamento externo é nulo: $f(x, t) = 0$
- propõe-se solução: $u(x, t) = e^{i\omega t}v(x)$

Essas duas considerações, aplicadas em (3-18), resultam em:

$$-\omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx + \int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx = 0, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-20)$$

pode-se simplificar a equação (3-20) e calcular as freqüências naturais (ω_i) e os modos de vibração (v_i) associados:

$$\omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx = \int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-21)$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L E(x)A(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{d\psi}{dx}(x)dx}{\int_0^L \rho(x)A(x)v(x)\psi(x)dx}, \quad \forall \psi \in Adm_0 \quad (3-22)$$

Modelo Reduzido: problemas de barras

A equação variacional (3-18) pode ser aproximada e então representada na forma matricial, sendo as matrizes de massa e de rigidez: $\mathbf{M}_{(N \times N)}$ e $\mathbf{K}_{(N \times N)}$; e o vetor de forçamento $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$; respectivamente definidos por:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \phi dx &\implies \phi^T M U \\ \int_0^L E(x) A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\phi}{dx} dx &\implies \phi^T K U \\ \int_0^L f \phi dx &\implies \phi^T F \end{aligned} \quad (3-23)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \phi^T \mathbf{M} \ddot{U} + \phi^T \mathbf{K} U &= \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \\ \Downarrow & \\ \mathbf{M} \ddot{U} + \mathbf{K} U &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3-24)$$

Uma aproximação de (3-24) pode ser obtida pela projeção dessas equações no subespaço Adm_0^N formado por N vetores linearmente independentes U_α .

$$U = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha U_\alpha \implies U = H q \quad (3-25)$$

Substitui-se $U = H q$ em (3-24) e obtém-se a equação variacional do problema reduzido:

$$(H^T \mathbf{K} H) q + (H^T \mathbf{M} H) \ddot{q} = H^T \mathbf{F} \quad (3-26)$$

$$\{\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{F}\} \implies \{(H^T \mathbf{K} H), (H^T \mathbf{M} H), (H^T \mathbf{F})\} \quad (3-27)$$

A seguir, serão desenvolvidas as formulações fracas para problemas de barras com diferentes condições de contorno, conforme foi citado anteriormente (2.3) e isso será possível simplesmente com a incorporação dessas condições na equação variacional de problemas de barras.

3.3.1

Problema de uma Barra Livre-Livre

O mesmo procedimento para o cálculo da Formulação Fraca de problemas de barras será adotado para o caso de uma barra livre-livre.

Considere uma barra livre-livre, como a da figura (2.4), de comprimento L , densidade ρ , área transversal constante A e módulo de elasticidade E . Esse problema apresenta as seguintes condições de contorno e condições iniciais, respectivamente:

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (3-28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (3-29)$$

As propriedades do material e geométrica são dadas por campos:

$\rho : [0, L] \longrightarrow \Re$ é o campo de densidade;

$E : [0, L] \longrightarrow \Re$ é o campo de módulo de elasticidade;

$A : [0, L] \longrightarrow \Re$ é o campo de geometria;

Define-se por Adm_1 o espaço das funções-teste ψ do problema de uma barra livre-livre, que deve satisfazer as condições de contorno essenciais do problema. De acordo com a equação (3-28), só existem condições de contorno naturais, Adm_1 é um espaço sem restrições.

As condições de contorno são incorporadas à equação variacional de problemas de barras

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx - EA \underbrace{\psi(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)}_{=0} + EA \underbrace{\psi(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)}_{=0} \quad (3-30)$$

$$+ \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_1$$

Esse problema apresenta a seguinte formulação fraca:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_1 \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$Adm_1 = \{ \psi : (0, L) \longrightarrow \Re \mid \int_0^L |\psi|^2 dx < \infty \} \quad (3-32)$$

A expressão (3-31) pode ser reescrita sob a forma:

$$\mathcal{M}(u, \psi) + \mathcal{K}(u, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_1 \quad (3-33)$$

tal que:

$$\mathcal{M}(u, \psi) = \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx \implies \text{operador de massa} \quad (3-34)$$

$$\mathcal{K}(u, \psi) = \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \implies \text{operador de rigidez} \quad (3-35)$$

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \implies \text{carregamento} \quad (3-36)$$

Substitui-se a expressão (2-37) em (3-33):

$$\mathcal{M}(u^N + \varepsilon^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N + \varepsilon^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in Adm_1 \quad (3-37)$$

$$\mathcal{M}(u^N, \psi) + \mathcal{K}(u^N, \psi) - \mathcal{F}(\psi) = \underbrace{-\mathcal{M}(\varepsilon^N, \psi) - \mathcal{K}(\varepsilon^N, \psi)}_{\text{erro}(\psi)} \quad (3-38)$$

De acordo com o método de Galerkin, o espaço das funções-teste é idêntico ao das funções aproximantes ($\psi_i = \phi_i$) e a função erro é ortogonal ao subespaço formado pelas funções-teste Adm_1^N ; ou seja, $\varepsilon^N \perp \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Com isso, a equação (3-38) reduz-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{M}(u^N, \phi_1) + \mathcal{K}(u^N, \phi_1) - \mathcal{F}(\phi_1) = 0 \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_2) + \mathcal{K}(u^N, \phi_2) - \mathcal{F}(\phi_2) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{M}(u^N, \phi_N) + \mathcal{K}(u^N, \phi_N) - \mathcal{F}(\phi_N) = 0 \end{array} \right. \quad (3-39)$$

Deseja-se calcular $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... $a_\infty(t)$ que satisfaçam as condições iniciais do problema (3-29) e que, aplicadas na solução (2-34), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x) &= u_0(x) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i(0)\phi_i(x) &= v_0(x) \end{aligned}$$

multiplica-se os dois lados da equação acima pela função-teste $\psi_i = \phi_j$ e integra-os no domínio $[0 \quad L]$:

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (3-40)$$

$$m_{ij}a_i = \int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx \quad (3-41)$$

$$a_i(0) = \frac{\int_0^L u_0(x)\phi_j(x)dx}{m_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-42)$$

A expressão da aproximação (2-39) deve ser substituída nos operadores de massa, rigidez e carregamento da formulação:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t)\phi_j(x)dx}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}(x, t)\frac{d\phi_j}{dx}(x)dx}_{op. \text{ rigidez}} \\ & = \underbrace{\int_0^L f(x, t)\phi_j(x)dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-43) \end{aligned}$$

feitas as substituições e calculadas as derivadas, tem-se:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx \ddot{a}_i + \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx a_i = \int_0^L f\phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-44)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j), \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-45)$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \rho(x)A(x)\phi_i\phi_j dx$$

$$\mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L E(x)A(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} dx$$

$$\mathcal{F}(\phi_j) = \int_0^L f\phi_j dx$$

tal que $i = 1, 2, \dots, N$.

A equação variacional (3-43) pode ser aproximada e escrita na forma matricial, sendo as matrizes de massa e de rigidez: $\mathbf{M}_{(N \times N)}$ e $\mathbf{K}_{(N \times N)}$; e o vetor de forçamento $\mathbf{F}_{(N \times 1)}$; respectivamente definidos por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \phi dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T M U$$

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\phi}{dx} dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T K U \quad (3-46)$$

$$\int_0^L f\phi dx \quad \Longrightarrow \quad \phi^T F$$

A equação (3-43) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{U} + \phi^T \mathbf{K} U = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-47)$$

↓

$$\mathbf{M} \ddot{U} + \mathbf{K} U = \mathbf{F} \quad (3-48)$$

Propõe-se uma solução para U :

$$U = e^{i\omega t}v \quad (3-49)$$

substitui-se (3-49) nas fórmulas variacional e discreta; e obtém-se, respectivamente:

$$\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_1^N \quad (3-50)$$

$$\mathbf{K}U - \omega^2\mathbf{M}U = \mathbf{F} \quad (3-51)$$

PVC: Barra livre-livre

Para $F = 0$, a equação (3-52) reduz-se a:

$$\mathbf{K}U - \omega^2\mathbf{M}U = 0 \quad (3-52)$$

e pode ser reescrita por:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})U = 0 \quad (3-53)$$

$$U \neq 0$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \text{ não existe} \quad \implies \quad \det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

A equação (3-53) corresponde a um problema de auto-valor, a partir do qual pode-se calcular as frequências naturais ω_i e os modos de vibração, v_i , a cada uma delas associado.

Exemplo: Aproximação para dois modos de vibração (N = 2)

Para facilitar o entendimento, a seguir será calculada a aproximação para dois modos de vibração: $\mathbf{N} = \mathbf{2}$.

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L \phi_1 \phi_1 dx \ddot{a}_1 + \rho A \int_0^L \phi_2 \phi_1 dx \ddot{a}_2 + EA \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx a_1 \\ + EA \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx a_2 = \int_0^L f \phi_1 dx \end{aligned} \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L \phi_1 \phi_2 dx \ddot{a}_1 + \rho A \int_0^L \phi_2 \phi_2 dx \ddot{a}_2 + EA \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx a_1 \\ + EA \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx a_2 = \int_0^L f \phi_2 dx \end{aligned}$$

Operadores:

$$\mathcal{M}(\phi_1, \phi_1) \ddot{a}_1 + \mathcal{M}(\phi_2, \phi_1) \ddot{a}_2 + \mathcal{K}(\phi_1, \phi_1) a_1 + \mathcal{K}(\phi_2, \phi_1) a_2 = \mathcal{F}(\phi_1) \quad (3-55)$$

$$\mathcal{M}(\phi_1, \phi_2) \ddot{a}_1 + \mathcal{M}(\phi_2, \phi_2) \ddot{a}_2 + \mathcal{K}(\phi_1, \phi_2) a_1 + \mathcal{K}(\phi_2, \phi_2) a_2 = \mathcal{F}(\phi_2)$$

Fórmula indicial:

$$\mathbf{M}_{ij} \ddot{a}_j + \mathbf{K}_{ij} a_j = \mathbf{F}_i \quad (3-56)$$

Fórmula matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3-57)$$

$$\mathbf{M}_{11} \ddot{a}_1 + \mathbf{M}_{12} \ddot{a}_2 + \mathbf{K}_{11} a_1 + \mathbf{K}_{12} a_2 = \mathbf{F}_1 \quad (3-58)$$

$$\mathbf{M}_{21} \ddot{a}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{a}_2 + \mathbf{K}_{21} a_1 + \mathbf{K}_{22} a_2 = \mathbf{F}_2$$

tal que:

$$\mathbf{M} = \rho A \begin{pmatrix} \int_0^L \phi_1 \phi_1 dx & \int_0^L \phi_2 \phi_1 dx \\ \int_0^L \phi_1 \phi_2 dx & \int_0^L \phi_2 \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

$$\mathbf{K} = EA \begin{pmatrix} \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx & \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx \\ \int_0^L \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx & \int_0^L \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx \end{pmatrix} \quad (3-60)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \int_0^L f \phi_1 dx \\ \int_0^L f \phi_2 dx \end{pmatrix} \quad (3-61)$$

3.4

Problema de uma Barra Fixa-Livre

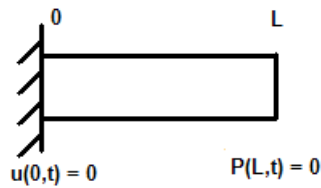


Figura 3.3: Barra fixa-livre

Considere o problema de uma barra fixa em uma extremidade e livre na outra, com área constante e material uniforme, como na figura (3.3). As condições de contorno do problema são dadas pela equação (3-13) e a função-teste deve pertencer ao espaço Adm_0 , definido em (3-32), que satisfaz as condições de contorno essenciais do problema:

O problema de uma barra fixa-livre apresenta a mesma equação variacional que o problema de uma barra livre-livre, apresentada na equação (3-31), porém a diferença entre eles está no espaço da função-teste ψ .

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \psi(x) dx + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x,t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

Todas as etapas desenvolvidas para uma barra livre-livre podem ser reproduzidas para uma barra fixa-livre: separação da formulação fraca em operadores de massa, rigidez e carregamento; aplicação do método de Galerkin; substituição da solução e cálculo das frequências naturais e modos de vibração

3.4.1

Problema de uma Barra Fixa-Acoplamento Elástico

Considere uma barra fixa em uma extremidade e com um acoplamento elástico na outra (3.4). Esse acoplamento elástico será descrito por: $P(L, t) = -k_e u(L, t)$, ou seja, a força na extremidade L da barra é equivalente à força aplicada por uma mola. Deseja-se calcular a formulação fraca desse problema.

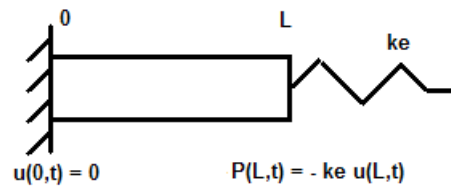


Figura 3.4: Barra fixa com acoplamento elástico

O sistema barra fixa-mola apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_e u(L, t) \quad (3-63)$$

A condição de contorno essencial de (3-63) é $u(0, t) = 0$, então a função-teste ψ deve pertencer a um espaço que satisfaça $\psi(0) = 0$, ou seja, $\psi \in Adm_0$; tal que Adm_0 é definido pela equação (3-32).

As condições de contorno de (3-63) devem ser incorporadas à equação variacional de um problema de barra, resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + k_e u(L, t) \psi(L) + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \\ = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0 \end{aligned} \quad (3-64)$$

que, em conjunto com o espaço da função-teste, corresponde à formulação fraca do problema.

Aplica-se o método de Galerkin na equação variacional. De acordo com as condições iniciais do problema (eq.3-29), tem-se a expressão de a_i (3-42). Substitui-se a expressão da aproximação (2-39) nos operadores de massa, rigidez e carregamento, que resulta em:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x,t) \phi(x) dx}_{op. \text{ massa}} + k_e u^N(L,t) \phi(L) + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u^N}{\partial x}(x,t) \frac{d\phi}{dx}(x) dx}_{op. \text{ rigidez}} \quad (3-65)$$

$$= \underbrace{\int_0^L f(x,t) \phi(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

tal que Adm_0^N é um subespaço de Adm_0 ($Adm_0^N \subset Adm_0$). A equação (3-65) pode ser reescrita por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \int_0^L E(x)A(x) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i \quad (3-66)$$

$$= \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + k_e \phi_i \phi_j a_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j) \implies i = 1, 2, \dots, N \quad (3-67)$$

A equação variacional (eq. 3-66) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T k_e U_N}_{\mathbf{K}_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-68)$$

↓

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^* \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3-69)$$

de forma que a matriz \mathbf{K}^* consiste na matriz de rigidez do sistema \mathbf{K} , já com o termo $\phi_N^T k_e U_N$ a ela incorporado.

Substitui-se a solução proposta em (3-49), na equação (3-66):

$$\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx + k_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx$$

$$= \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-70)$$

$$\mathbf{K}^*U - \omega^2\mathbf{M}U = \mathbf{F} \quad (3-71)$$

PVC: Barra fixa-mola

Para $\mathbf{F} = 0$, tem-se:

$$(\mathbf{K}^* - \omega^2\mathbf{M})U = 0 \quad (3-72)$$

$$\det(\mathbf{K}^* - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (3-73)$$

e calcula-se as freqüências naturais (ω_i) e os modos de vibração (u_i) do sistema.

3.5

Problema de Barra Fixa-Massa

Considere o problema de uma barra fixa com massa concentrada na sua extremidade livre. Deseja-se calcular a formulação fraca correspondente.

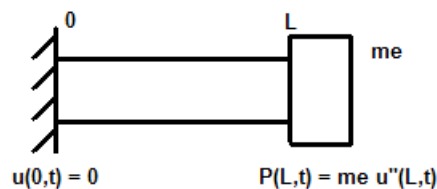


Figura 3.5: Barra fixa-massa

As condições de contorno da barra fixa-massa são:

$$u(0, t) = 0 \quad EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = m_e \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} \quad (3-74)$$

Da equação (3-74), tem-se que a condição de contorno essencial é $u(0, t) = 0$, portanto o espaço das funções-teste ψ desse problema também deve ser Adm_0 , definido em (3-32).

A equação variacional desse problema é dada por:

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + m_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) + \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx \quad (3-75)$$

$$= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in Adm_0$$

Aplica-se o método de Galerkin na equação variacional e substitui-se a expressão da solução (2-39) nos operadores de massa, rigidez e carregamento:

$$\underbrace{\int_0^L \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(x, t) \phi(x) dx + m_e \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}(L, t) \phi(L)}_{op. \text{ massa}} + \underbrace{\int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u^N}{\partial x}(x, t) \frac{d\phi}{dx}(x) dx}_{op. \text{ rigidez}} \quad (3-76)$$

$$= \underbrace{\int_0^L f(x, t) \phi(x) dx}_{carregamento}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

$$\int_0^L \rho(x)A(x) \phi_i \phi_j dx \ddot{a}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{a}_i + \int_0^L E(x)A(x) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx a_i \quad (3-77)$$

$$= \int_0^L f \phi_j dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N$$

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j) \ddot{a}_i + m_e \phi_i \phi_j \ddot{a}_i + \mathcal{K}(\phi_i, \phi_j) a_i = \mathcal{F}(\phi_j) \implies i = 1, 2, \dots, N \quad (3-78)$$

A equação (3-77) pode ser reescrita por:

$$\phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \underbrace{\phi_N^T m_e U_N}_{M_{NN}} + \phi^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \phi^T \mathbf{F}, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \quad (3-79)$$

↓

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3-80)$$

substitui-se a solução de (3-49) na equação (3-77):

$$\begin{aligned} \int_0^L E(x)A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} dx + m_e U_N \phi_N - \omega^2 \int_0^L \rho(x)A(x)u\phi dx \\ = \int_0^L f\phi dx, \quad \forall \phi \in Adm_0^N \end{aligned} \quad (3-81)$$

$$\mathbf{K}U - \omega^2 \mathbf{M}^*U = \mathbf{F} \quad (3-82)$$

PVC: Barra fixa-massa

Para $\mathbf{F} = 0$, tem-se:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*)U = 0 \quad (3-83)$$

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}^*) = 0 \quad (3-84)$$

A tabela (3.6) apresenta a formulação fraca para problemas de barras com diferentes condições de contorno. Conforme pode-se observar, a formulação variacional do problema de barra livre-livre é igual à do problema de barra fixa-livre; porém a diferença entre esses dois casos encontra-se na definição do espaço da função-teste ($\psi \in Adm$), que representa as condições de contorno essenciais. O espaço das funções-teste admissíveis dos casos de barra fixa-livre, fixa-mola e fixa-massa é o mesmo porque representa a condição de contorno essencial $u(0, t) = 0$, devido à extremidade fixa em $x = 0$. O que diferencia esses três problemas é a formulação variacional que, no caso de barra fixa-mola, há um termo adicional representativo da mola ($k_e u(L, t)\psi(L)$); e, para o problema da barra fixa-massa, existe um termo que representa a massa na extremidade ($k_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t)$).


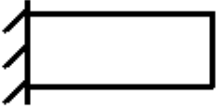

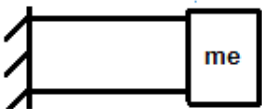
Barra	Configuração	Formulação Variacional	Adm
Livre-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	—
Fixa-Livre		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $= \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$
Fixa-Mola		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $+ k_e u(L, t) \psi(L) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$
Fixa-Massa		$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi(x) dx + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{d\psi}{dx}(x) dx$ $+ m_e \psi(L) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx$	$\psi(0) = 0$

Figura 3.6: Formulação Fraca de diferentes problemas de barras