

1

INTRODUÇÃO

O Método de Elementos Finitos (MEF) pode ser definido como uma ferramenta numérica para obtenção da aproximação de um problema [14]; e consiste na discretização de um meio contínuo, dividindo-o em elementos. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos para que sejam obtidos os resultados desejados [3].

O desenvolvimento do MEF originou-se no final do século XVIII, quando Gauss propôs a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas matemáticos. Durante mais de um século, diversos matemáticos desenvolveram teorias e técnicas analíticas para a solução de problemas, entretanto, pouco se evoluiu devido à dificuldade no processamento de equações algébricas. O desenvolvimento prático desta análise ocorreu mais tarde, em consequência dos avanços tecnológicos, por volta de 1950. Isto permitiu a elaboração e a resolução de sistemas de equações complexas [5]. Em 1960, Turner, Clough, Martins e Topp, propuseram um método de análise estrutural, o MEF, e descreveram-no.

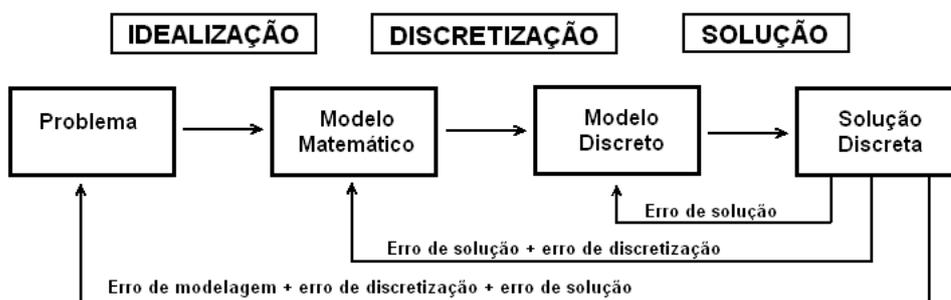


Figura 1.1: Fluxograma representativo do MEF

O fluxograma de (1.1) representa, esquematicamente, o funcionamento de um modelo baseado em simulações. Historicamente, os métodos matriciais para análise estrutural (Matrix Structural Analysis - MSA), que eram utilizados antes de 1950, antecedem o MEF.

A MSA e o MEF são baseados em três aspectos principais:

- Modelagem matemática;
- Formulação matricial de equações discretas lineares;
- Ferramentas computacionais.

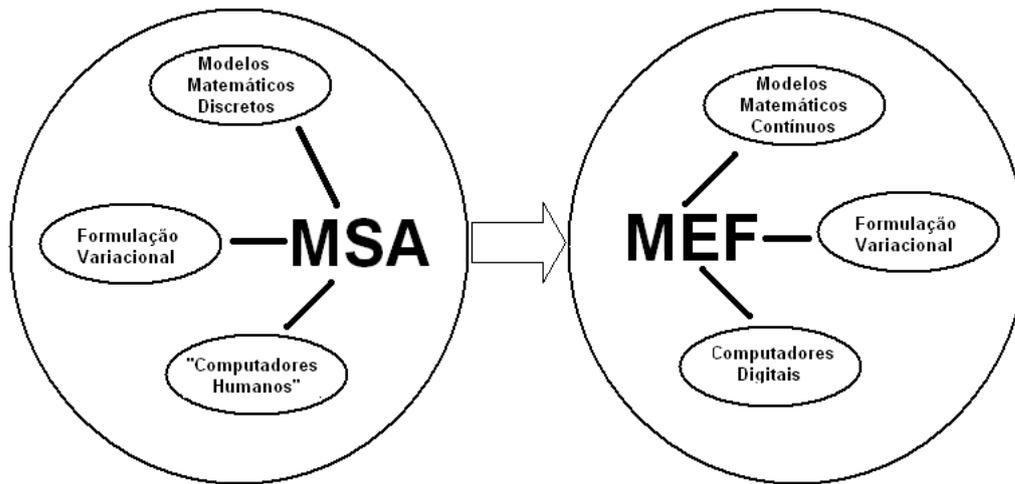


Figura 1.2: Principais aspectos da MSA e do MEF

A partir da década de 70, o MEF passou a ser aplicado também em problemas de mecânica dos fluidos.

1.1

Objetivo do Trabalho

Em geral, a dinâmica de uma estrutura é descrita por um sistema de equações diferenciais parciais em conjunto com condições de contorno, condições intermediárias e condições iniciais. Uma vez conhecidas as frequências naturais e os modos normais de vibração do sistema (exatamente ou aproximadamente), pode-se controlar sua dinâmica. O MEF pode ser utilizado para aproximar, numericamente, as frequências e os modos da estrutura; e, para isso, uma formulação fraca do problema é preferível.

Este trabalho tem por objetivo formar um material didático que será destinado aos alunos de graduação, introduzindo conceitos básicos sobre o estudo de sistemas contínuos e sua discretização pelo método de elementos finitos. Pretende-se explicar o que é esse método de aproximação, como

funciona e qual deve ser o procedimento para calcular aproximações de sistemas contínuos.

Uma idéia é não usar pacotes de programação, mas sim desenvolver programas usando o Matlab e estimular alunos de graduação a programarem. Além disso, deseja-se incentivar os alunos a se preocuparem com noções de aproximação, erro de aproximação e convergência.

Deseja-se construir aproximações para a dinâmica de problemas formados por estruturas simples unidimensionais (barras ou combinação de barras, vigas ou combinação de vigas). Isso será feito nas seguintes etapas:

- Modelagem do problema na Formulação Fraca: parte-se da formulação forte do problema, porém a modelagem pode ser feita diretamente usando o princípio de Hamilton;
- Construção de uma base de aproximação: de forma a representar a solução como $u^N(x, t) = \sum_1^N a_i(t)\phi_i(x)$

Caso os modos de vibração do problema em estudo não sejam conhecidos, o que acontece na maioria dos casos, constrói-se uma aproximação para eles, através do Método de Elementos Finitos (resolvendo o problema de valor característico associado); e, em seguida, constrói-se um modelo reduzido com a aproximação dos modos. A maior dificuldade concentra-se na construção da aproximação, que deve satisfazer um critério de erro pré-fixado (por exemplo, construir os modos com um critério de erro controlável).

Com a aproximação $u(x, t) = \sum a_i(t)\phi_i(x)$, deseja-se aproximar a dinâmica do problema; e isso pode ser dividido em dois problemas:

1. Achar uma base de aproximação (aproximar ϕ_i);
2. Aproximar a dinâmica do sistema (aproximar a_i).

O processo de solução pode ser visualizado pela figura (1.3) e será exemplificado no decorrer do trabalho.:

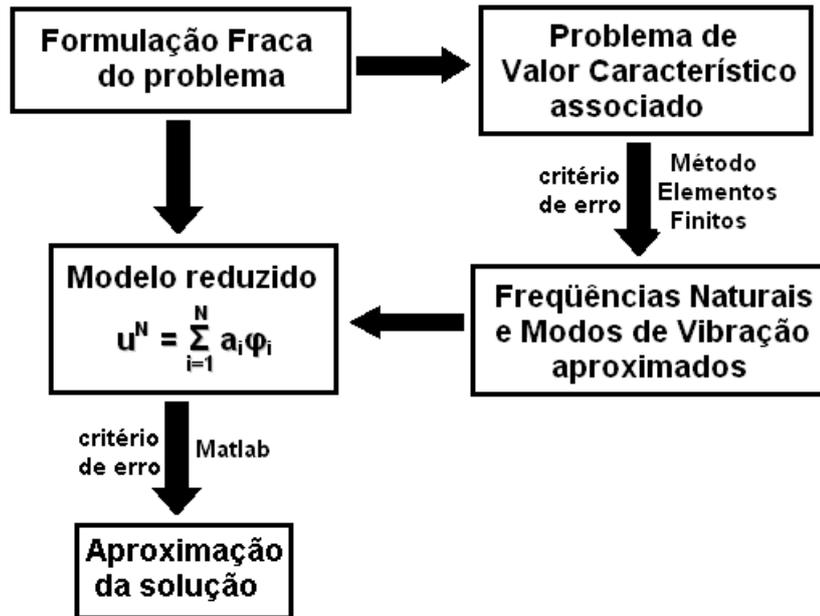


Figura 1.3: Processo de solução

1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 2 será apresentada a modelagem de um problema de barra, de forma que será desenvolvida a equação representativa da dinâmica de movimento desse sistema e, em seguida, será calculada a solução analítica de um problema específico (barra livre-livre), apresentando as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes.

O capítulo 3 apresentará todo o procedimento necessário para calcular a formulação fraca de um sistema contínuo, mostrando as considerações necessárias, as vantagens desta técnica e as características do método variacional adotado. Em seguida, será desenvolvida a formulação fraca de um problema de barra, considerando diferentes condições de contorno.

Os assuntos abordados para problemas de barras, nos capítulos 2 e 3, serão apresentados para problemas de vigas nos capítulos 4 e 5, respectivamente. No capítulo 4, será modelado um problema de viga para calcular a dinâmica de movimento do sistema e será desenvolvida a solução analítica de um problema de viga bi-engastada; enquanto, no capítulo 5, será desenvolvida a formulação fraca de diferentes problemas de vigas, com diferentes condições de contorno.

O capítulo 6 introduzirá conceitos básicos do Método de Elementos Finitos, mostrando o funcionamento do método e todas as etapas necessárias

para a sua aplicação. Serão apresentados diferentes tipos de elementos, que definem o tipo de aproximação; além da construção de equações elementares que, acopladas, formam as equações globais do sistema.

O capítulo 7 mostrará a aplicação do MEF a problemas específicos de barras e vigas. Nele serão apresentadas as matrizes de massa e rigidez elementares bem como as matrizes globais correspondentes.

Já no capítulo 8, serão apresentados problemas de estruturas que apresentam condições intermediárias, sejam apoios, molas ou massas concentradas. Para esses problemas, serão desenvolvidas as formulações fracas correspondentes e serão aproximadas as frequências naturais, os modos de vibração e a dinâmica do sistema.

Em anexo, será apresentado um Manual dos Programas desenvolvidos no Matlab, mostrando todos os passos necessários. Esses programas aproximam frequências naturais e modos de vibração de diversos problemas, através do método de Elementos Finitos; e depois aproximam a dinâmica do sistema.